Niccolò Cusano. Scritti matematici

Introduzione, traduzione e note

Edition Open Access

The Edition Open Access (EOA) platform was founded to bring together publication initiatives seeking to disseminate the results of scholarly work in a format that combines traditional publications with the digital medium. It currently hosts the open-access publications of the "Max Planck Research Library for the History and Development of Knowledge" (MPRL) and "Edition Open Sources" (EOS). EOA is open to host other open access initiatives similar in conception and spirit, in accordance with the *Berlin Declaration on Open Access to Knowledge in the sciences and humanities*, which was launched by the Max Planck Society in 2003.

By combining the advantages of traditional publications and the digital medium, the platform offers a new way of publishing research and of studying historical topics or current issues in relation to primary materials that are otherwise not easily available. The volumes are available both as printed books and as online open access publications. They are directed at scholars and students of various disciplines, and at a broader public interested in how science shapes our world.

Edition Open Access
2020

Niccolò Cusano. Scritti matematici

Introduzione, traduzione e note

Federica De Felice

Sources 13

Edition Open Sources

Edition Open Sources (EOS) pioneers a new paradigm in the publishing of historical sources. Academic editions of primary sources in the history of science are published in online, digital, and print formats that present facsimiles, transcriptions, and often translations of original works with an introduction to the author, the text, and the context in which it was written. The sources are historical books, manuscripts, documents, or other archival materials that are otherwise difficult to access. EOS is a cooperation between the University of Oklahoma Libraries, the Department for the History of Science at the University of Oklahoma, and the Max Planck Institute for the History of Science.

Sources 13

Cover: Niccolò Cusano, *Quadratura Circuli*, 1453, figura 1.

Il volume è pubblicato con il contributo dell'Università "G. D'Annunzio" di Chieti-Pescara, Dipartimento di Scienze filosofiche, pedagogiche ed economico-quantitative.

ISBN 978-3-945561-50-8
e-ISBN [PDF] 978-3-945561-51-5
e-ISBN [EPUB] 978-3-945561-52-2
First published 2020 by Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften
Max Planck Institute for the History of Science
https://www.edition-open-sources.org
Printed and distributed by epubli / neopubli GmbH, Berlin

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at http://dnb.d-nb.de.

Ai miei figli
Lorenzo e Alessandro

Indice

Introduzione

Capitolo 1
Una vita vissuta a pieno

> [Nicolò di Cusa] fu acutissimo disputante ne la filosofia aristotelica, […]non fu genere alcuno di scienza nel quale egli non fosse maraviglioso (come afferma Sisto Senese ne la sua Biblioteca[1]) e sopra il credere di tutti eruditissimo. Di bontà di costumi, dice Schedelio, fu mentre visse, tale che pochi in quei tempi furono migliori di lui; fu acerbissimo nemico dei vitij, aversario de le ambitioni, d'integrità d'animo imutabile, patientissimo fino all'estrema vecchiezza di tutte l'honeste fatiche, benefico e grato a meraviglia, eloquente poi di maniera e copioso, che postosi a l'improvviso a discorrere di qual si voglia cosa, pareva che a quella solamente e non ad altra egli havesse atteso[2].

Bastano queste poche righe di Bernardino Baldi (1533–1617) per farsi un'idea dello spessore intellettuale e umano di Cusano. Ora, che Cusano sia un personaggio chiave della cultura occidentale è cosa nota: molti e importanti sono i contributi che egli dà in ambito filosofico, giuridico, religioso e politico. Gli studi critici hanno evidenziato e continuano a evidenziare i diversi aspetti e le implicazioni della sua vastissima e poliedrica attività speculativa, che impressiona per l'ampio respiro di cui è capace[3]. Meno noti, ma altrettanto significativi, sono l'impegno e la perspicacia con i quali il cardinale cerca di risolvere questioni strettamente matematiche alle quali si dedica costantemente e intensamente per oltre quindici anni.

Certamente l'interesse di Cusano per la matematica percorre tutto il suo iter speculativo: sfogliando, anche solo rapidamente, il *De docta ignorantia*, è evidente la forte impronta matematizzante del suo pensiero. In questo, come nei testi successivi, Cusano utilizza nozioni, figure, definizioni geometrico–matematiche in chiave simbolica, al fine di cogliere le verità che trascendono il piano razionale.

Tuttavia, vi sono molti scritti incentrati su un problema di carattere strettamente matematico, quello della quadratura del cerchio, che Cusano cerca di risolvere con interessanti argomentazioni e procedure logico–matematiche e che, dunque, costituiscono un tassello importante, ma alquanto trascurato, della storia della matematica moderna.

Senza addentrarci sul dibattito, sempre attuale, sulla modernità di Cusano[4], un aspetto sicuramente interessante – e raro – di questo singolare pensatore è lo stretto connubio tra vita e pensiero: la riflessione filosofica di Cusano, infatti, è profondamente radicata nelle vicende storiche e politiche del suo tempo, delle quali egli non è mai mero spettatore, bensì attore, spesso protagonista[5]. Di conseguenza le sue opere non sono concepite e realizzate nello spazio chiuso e silenzioso di un'università o di una biblioteca, ma in mezzo ai conflitti politici, sociali ed ecclesiali della sua epoca. In più scritti egli si lamenta di

[1] Cfr. Da Siena 1566, 433.
[2] Baldi 2007, 257. Il riferimento è a Schedel 1493, 252.
[3] Cfr. Flasch 2004; Vescovini 2016, 11–25.
[4] Cfr. Ritter 1850, 141ss. Hopkins 1996, 83; Gadamer 1970, 39–48; Cassirer 1920; Nicolle 2002.
[5] Cfr. Vansteenberghe 1920, V.

avere poco tempo da dedicare alla matematica perché coinvolto (e spesso stravolto) nelle vicissitudini della Chiesa.

Per questo, prima di passare ad analizzare la filosofia della matematica e gli scritti matematici, è opportuno delineare il profilo biografico di Cusano, dando rilievo a quegli episodi e a quelle circostanze storiche che hanno avuto particolare rilievo per la formazione e lo sviluppo delle teorie filosofico–matematiche. Non ci soffermeremo invece, se non fugacemente, sugli eventi storici aventi un risvolto più strettamente religioso e teologico: di questi vi è un'ampia letteratura che approfondisce questioni ancora aperte e che sarebbe fuori luogo affrontare in questa sede[6].

Niccolò Cusano nasce a Kues, nella diocesi di Trier, nel 1401, da una ricca famiglia di battellieri, mercanti e armatori. Il primo dato certo su Cusano è la sua frequenza della Facoltà delle Arti dell'Università di Heidelberg nel 1416, ma nulla sappiamo se e come abbia completato gli studi e se sia stato in qualche modo influenzato dall'indirizzo allora prevalente ad Heidelberg, ossia l'orientamento nominalistico della "via moderna". Nella sua autobiografia[7] Cusano non fa alcun cenno a questo periodo.

Una tappa decisiva per sua formazione, che egli stesso ricorda, è lo studio di diritto sotto la guida di Prosdocimo Conti (1370–1438), che Cusano elogia come «doctor egregius», «dominus meus et pater singularis», e del cui insegnamento resta traccia nelle sue annotazioni alla *Lectura in librum II Decretalium*[8]. Cusano inizia lo studio di diritto nel 1417, presso l'università di Padova, dove si laurea nel 1423, con il titolo accademico di *Doctor Decretorum*. Questi sono anni fondamentali per Cusano perché a Padova non solo la facoltà giuridica gode di grande fama – qui, tra l'altro, viene a conoscenza della dottrina di Bartolomeo Zabarella (morte 1445) – ma anche la facoltà delle arti vanta la presenza di professori di grande spessore che molto probabilmente Cusano ha modo di ascoltare[9]. Tra questi vi è il matematico e astronomo Prosdocimo de' Beldomandi (1375–1428), allievo di Biagio Pelacani (ca. 1347–1416), il quale aveva commentato attentamente le opere di Nicolas d'Oresme (ca. 1320–1382)[10], insigne rappresentante dei *calculatores* della scuola parigina, e le opere di Thomas Bradwardine (ca. 1290–1349)[11], il «doctor profun-

[6] Per una dettagliata disamina del contesto storico–culturale della riflessione e della produzione letteraria cusaniana, cfr. Peroli 2017, IX–LX; Senger 1972.

[7] Cfr. Meuthen 1976, n. 11.

[8] Cfr. Krchňák 1962, 67–84.

[9] Cfr. Santinello 1983, 71–84; Vescovini 2002, 93–113.

[10] Nel *De uniformitate et difformitate intensionum* (ca. 1350), Oresme espone la più nota prova geometrica del teorema della velocità media, «forse il più straordinario contributo del Medioevo alla storia della fisica matematica» (Grant 2001, 153). Qui si trova infatti la rappresentazione grafica delle variazioni della velocità del moto o dell'intensità di una qualità con linee verticali poste su una retta orizzontale a distanze che corrispondono a intervalli temporali determinati. Questo procedimento avrà larga diffusione dal XIV al XVI secolo in tutta Europa (è possibile che lo stesso Galilei ne sia venuto a conoscenza), contribuendo a preparare gli schemi matematici della fisica moderna (cfr. Grant 2001, 156). Sia questa sia l'altra opera di Oresme, il *De latitudinibus formarum*, saranno ampiamente commentate da Pelacani (cfr. Amodeo 1909, 111–137). Come precursore di Oresme viene considerato il *Doctor mirabilis*, Roger Bacon (ca. 1214–1294), autore del *De graduatione medicinarum compositarum*, in cui si parla espressamente di una *linea intensionis et remissionis*. Clagett dubita che l'autore del testo sia Roger Bacon, ritenendolo invece opera di un pensatore dell'inizio del XIV secolo (cfr. Clagett 1968, nota 15, 57). Sul rapporto tra Cusano e Oresme, cfr. Hofmann e Hofmann 1980, nota 6, 234.

[11] Nel *Tractatus de proportionibus velocitatum in motibus* (1328), Bradwardine cerca di dare una soluzione matematica al problema di come correlare la variazione di velocità di un mobile con la variazione delle cause (come forze e resistenze) che determinano le velocità; giunge così ad affermare l'esistenza di una relazione matematica fra velocità, forza e resistenza, mantenendosi in accordo col postulato aristotelico secondo il quale il movimento si verifica quando la forza motrice supera la resistenza. Oltre al *De velocitate motuum*, scrive il *Tractatus de continuo* in cui si oppone alla concezione atomistica del continuo come

dis», esponente di punta dei *calculatores* del Merton College di Oxford. Sempre a Padova, inoltre, gli studi medici, verso cui Cusano mostrerà sempre grande interesse, sono particolarmente intensi, i dibattiti sulle questioni scientifiche, matematiche e astronomiche sono molto animati ed echeggiano a livello europeo, grazie agli scambi (da sempre) attivi tra i maestri di Padova e quelli di Oxford e Parigi. E' in questo fervido clima culturale - che fa di Padova uno dei centri più importanti in Europa - che il giovane Cusano inizia la sua formazione intellettuale[12].

Durante il suo soggiorno padovano, Cusano stringe rapporti con gli umanisti Vittorino da Feltre (ca. 1378–1446) e Francesco Filelfo (1398–1481); conosce Paolo dal Pozzo Toscanelli (1397–1482), al quale sarà legato da profonda amicizia per tutta la vita e al quale, nel 1445, dedicherà il *De geometricis transmutationibus*. Qui incontra anche Giuliano Cesarini (1398–1444), futuro vescovo e presidente del Concilio di Basilea, al quale dedicherà le sue prime due grandi opere filosofiche, il *De docta ignorantia* e il *De coniecturis*, e il cardinale Domenico Capranica (1400–1458), che ricorderà Cusano e gli anni padovani anche quando sarà all'apice della curia romana. Dopo una presenza a Roma, nel 1424, dove assiste a una predica di Bernardino da Siena (1380–1444), Cusano torna in Germania, inizia a lavorare come legale ed esperto di diritto canonico presso la curia di Treviri e nel 1427 diventa segretario di Otto von Ziegenhain (ca. 1380–1430), arcivescovo di Treviri. Nel 1425 si iscrive all'università di Colonia, il più grande centro intellettuale tra le province tedesche, e qui trascorre un periodo fondamentale per la formazione filosofica e teologica. Non ci sono pervenuti dettagli sulla sua occupazione a Colonia, ma è certo che qui Cusano incontra il teologo olandese Eimerico da Campo (Heymericus da Campo o Heymeric van de Velde, 1395–1460)[13], grazie al quale Cusano non solo recepisce l'albertinismo pseudodionisiano del XV secolo[14], ma conosce anche il catalano Raimondo Lullo (Ramon Llull ca. 1232–ca. 1315)[15], un pensatore che eserciterà un influsso notevole su molti aspetti della sua speculazione (basti pensare all'uso di simboli geometrici per la rappresentazione di concetti metafisici), e di cui Cusano copia una serie di scritti nel 1428, durante un viaggio a Parigi compiuto proprio insieme ad Eimerico[16]. Questi anni di

---

composto di indivisibili. Sul tema, cfr. Bradwardine 1328, 64–140; Murdoch 1987, 103–137. Le opere di carattere più strettamente matematico (*De arithmetica practica*, *De geometria speculativa*, *De quadratura circuli*) mostrano l'influenza di Boezio, Aristotele, Euclide e Campano e ispireranno, sotto vari aspetti, la concezione cusaniana della matematica.

[12] Non bisogna dimenticare che a Padova, infatti, è ancora molto presente l'insegnamento di Pietro d'Abano (ca. 1250–ca. 1315) e di Marsilio da Padova (ca. 1275–ca. 1342).

[13] Sui rapporti tra Cusano ed Eimerico, cfr. Colomer 1964, 198–213; Imbach 2011, 567–570.

[14] Sull'albertinismo a Colonia, cfr. Meerseeman 1935; Haubst 1952b, 420–447; Hoenen 1995, 303–331.

[15] Cfr. Reinhardt 2005, 1–23; Colomer 1964, 88ss.

[16] Come ha mostrato Rudolph Haubst, Cusano inizia a copiare alcuni estratti del *Liber contemplationis* di Lullo a Parigi nel marzo 1428 (Haubst 1980, 198–205). Gli estratti sono contenuti nel cod. Cus. 83 (foll. 51^r–60^v). Su questi ultimi, cfr. Pindl-Büchel 1990a; Lohr 1983, 373–384; Pindl-Büchel 1992. Dall'inventario dei manoscritti della biblioteca di Bernkastel–Kues (cfr. Stork 2010, 67–95) sappiamo che Cusano ebbe tra le mani almeno 68 scritti di Lullo (per le opere di Lullo possedute da Cusano, cfr. Reinhardt 2005, 1–23). Sull'influsso esercitato da Lullo su Cusano in generale, cfr. Platzeck 1953, 357–364; Platzeck 1964, 145–163; Pindl-Büchel 1990b, 73–87. Cusano aveva una copia del *De Sigillo aeternitatis* (cod. Cus, 106, ss. 77r–85r.). Il cod. Bruxellensis (*Br*) 11479,84, che contiene il *De complementis mathematicis* di Cusano, copiato dal suo segretario Pierre Peter Wymar von Erkelenz (1430–1494) e corretto dallo stesso Cusano, secondo una nota del diciottesimo secolo sarebbe appartenuto proprio a Heymericus de Campo. Ruedi Imbach sottolinea che questi, nel suo *Centheologicum*, stabilisce una relazione tra il suo approccio (matematico simbolico) e quello di Cusano. Afferma, riassumendo la teologia geometrica di Cusano: «Sit huic maxima coniecturas humanas veritatis mathematice certitudo - iuxta testimonium Philosophi dicentis quod hoc est in primo gradu certitudinis, cum versatur circa formas a potentia contradictionis absoluta» (Imbach 1995, 301). Cfr. anche Imbach 1983, 466–477; Vescovini 2016, 12. Sull'influenza di Lullo sull'idea cusaniana di circolarità tra

stretta frequentazione con Eimerico sono alla base di un lungo sodalizio intellettuale, che si rafforzerà ulteriormente al Concilio di Basilea, a cui Eimerico prende parte dal dicembre 1432 al febbraio 1435 come rappresentante dell'Università di Colonia.

In questo periodo Cusano intraprende anche studi sulla cultura islamica, su Averroè (1126–1198) e Alberto Magno (ca. 1206–1280) grazie a Ugo Benzi (1376–1439), famoso medico e grecista senese, il quale aveva incontrato e discusso con Biagio Pelacani. Con l'amico e umanista Niccolò Niccoli (ca. 1364–1437) ricerca nei monasteri tedeschi codici latini e greci, trovando anche dodici nuove commedie di Plauto (ca. 250 a.C.–184 a.C.)[17].

Nel 1429 si reca a Roma per consegnare il codice di Plauto al cardinale Giuliano Orsini (ca. 1450–1503), il quale nel 1426, in qualità di legato papale in Germania, lo aveva assunto come segretario. Discute con Poggio Bracciolini (1380–1459) sul manoscritto del *De republica* di Cicerone (106 a.C.–43 a.C.) e conosce il celebre bibliofilo Francesco Pizzolpasso (ca. 1375–1443), vescovo di Pavia e poi di Milano.

Nel 1432 è ordinato prete sacerdote a Coblenza e a Treviri. Assiste in qualità di decano di San Fiorino di Coblenza al Concilio di Basilea, invitato dal suo protettore Ulrich de Manderschein (morte 1436), che aspira all'arcivescovado di Treviri, una carica ambita anche da altri candidati sostenuti da papa Martino V (ca. 1368–1431). Ulrich von Manderscheid era stato scomunicato dal Papa perché si era stabilito con la forza nell'arcivescovado di Treviri, ed esercitava, con l'aiuto della nobiltà e di parte del capitolo, il potere vescovile, malgrado lo stesso capitolo avesse nominato alla sede Jacob von Sierck (ca. 1398–1456), e papa Martino V, per risolvere il conflitto, avesse nominato il vescovo di Spira, Rabano di Helmstadt (ca. 1362–1439). Cusano cerca di difendere abilmente la causa appellandosi ai diritti del capitolo e al consenso dei laici, ma la perde. Intanto si fa conoscere come brillante canonista e come oppositore di Eugenio IV (1383–1447) sul problema dello scioglimento del Concilio. Viene eletto membro della Deputazione della Fede.

È in questa occasione che Cusano fa amicizia con il cardinale Niccolò Albergati (1373–1443), Tommaso Parentucelli (ca. 1397–ca. 1455, il futuro papa Niccolò V), Enea Silvio Piccolomini (1405–1464, il futuro papa Pio II), nonché Ambrogio Traversari (1386–1439).

Nel 1433 Cusano interviene nella lotta politica tra il Concilio di Basilea, presieduto da Giuliano Cesarini, e papa Eugenio IV. La maggioranza dei Padri si schiera a favore della superiorità del Concilio, una posizione che Cusano condivide, pur attenuandone gli aspetti contrastanti: è su questo tema che scrive il *De concordantia catholica*. Il suo prestigio e la sua autorità continuano a crescere: cerca un accordo di pace con gli Hussiti, che sostenevano teorie controverse sui sacramenti e volevano liberarsi dalla morsa di Roma, secondo la predicazione di Jan Hus di Boemia (1369–1415), rettore dell'Università di Praga, morto sul rogo durante il Concilio di Costanza nel 1415. Cusano cerca inoltre una soluzione alla spinosa questione della Presidenza del Consiglio Generale e il posto da dare ai legati pontifici. È a questo proposito che scrive nel 1434 il *De auctoritate praesidendi in concilio generali*, nel quale riconosce ai legati papali una presidenza meramente amministrativa (cioé senza poteri decisionali). Svolge opera di mediazione tra inglesi e spagnoli al Concilio e prepara i decreti sulla simonia. Nel 1436 funge da mediatore di pace tra il Vescovo di Würzburg e il Conte di Westheim, e tra Federico I di Brandeburgo (1371– 1440) e il duca di Baviera. Viene nominato *conservator decretorum* del Concilio. Tra il 1436

matematica e teologia, cfr. De Felice 2015, 49–74, spec. 59–62; Felix 2014.

[17] Sui rapporti di Cusano con gli umanisti italiani, cfr. Garin 1962, 75–100, spec. 82 e 88; Flasch 2002, 175–193.

e il 1437, convinto dell'importanza dell'azione conciliante del Papa, Cusano si avvicina sempre più alla Curia romana e al Pontefice. Contro l'antipapa Felice V (1383–1451), e sollecitato dallo stesso Traversari, sostiene Eugenio IV[18], il quale invia Cusano a Costantinopoli, chiedendogli di invitare l'imperatore e il patriarca di Costantinopoli a partecipare al grande Concilio che avrebbe dovuto svolgersi in Italia, in vista dell'unione delle due Chiese. È durante il viaggio nella capitale cristiana dell'Est che Cusano ha l'intuizione del principio della dotta ignoranza, che sopraggiunge – scrive Cusano al cardinal Giuliano alla fine del *De docta ignorantia* – per una sorta di ispirazione divina («superno dono a patre luminum»[19]).

Poiché i prìncipi tedeschi avevano dichiarato la loro neutralità nel conflitto tra il Concilio di Basilea e il Papa, Cusano lavora per guadagnare la Germania alla parte papale. Si reca alla dieta di Norimberga sostenendo che l'infallibilità del Concilio è messa in dubbio dalla sua scissione, e che la minoranza papale è ormai maggioranza. Il 1438 e il 1448 sono anni che vedono Cusano impegnato in intense attività politiche ed ecclesiastiche, specialmente in Germania, sempre a favore del Papa. Continua a occuparsi della cura delle anime e della salvaguardia dei suoi benefici ecclesiastici. Si impegna nell'attività legale e di negoziazione, senza interrompere la costante applicazione allo studio e alla scrittura.

Nel frattempo si dedica agli studi astronomici per preparare la riforma del calendario, e scrive il *De reparatione calendarii*. Nel 1440 torna da Costantinopoli, dove conosce Gemisto Pletone (ca. 1355–ca. 1450), Basilio Bessarione (1403–1472) e altri eminenti maestri. Da qui riporta la *Theologia platonica* di Proclo (412–485), che affida ad Ambrogio Traversari per la traduzione. Nel 1440, oltre che portare a termine il *De docta ignorantia*, inizia a scrivere il *De deo abscodito* e anche la sua seconda grande opera filosofica, il *De coniecturis*, a cui tuttavia Cusano continuerà a lavorare fino al 1444–1445[20].

Nel 1442, in occasione della Dieta di Francoforte, dove si schiera a favore del Papa, Cusano scrive una lettera importante sulla sua dottrina della chiesa, a Rodrigo Sánchez de Arévalo (1404–1470), ambasciatore di Castiglia e Leon. Sempre durante quest'anno, scrive i brevi trattati teologici *De quaerendo deum* e *De filiatione dei*. A partire dal 1445, nell'arco di circa un quindicennio, fino al 1459, Cusano si cimenta in vari scritti che trattano questioni e problemi di carattere strettamente geometrico–matematico. Nel 1445 scrive il *De geometricis transmutationibus* e il *De arithmeticis complementibus*[21].

Tra il 1445 e il 1446 compone il *De dato patris luminum* e nel 1446 scrive un breve trattato di previsione escatologica, *Coniectura de ultimis diebus*, fondata sul calcolo degli anni della vita di Cristo e i dialoghi *De annuntiatione* e *De genesi* (1447). Il 20 dicembre 1448, dopo essere stato nominato arcidiacono di Brabante da Eugenio IV, viene nominato cardinale dal nuovo Papa Niccolò V e il il 3 gennaio 1449 riceve il titolo di San Pietro in Vincoli.

Nel 1449 Cusano è inviato come legato pontificio in Germania, dove scrive l'*Apologia doctae ignorantiae*, in cui il cardinale cerca di difendersi dalle false accuse di panteismo inflitte contro di lui da un teologo di Heidelberg, l'aristocratico Jean Wenck de

---

[18] Non è questa la sede per approfondire i motivi che possono aver spinto Cusano ad abbandonare il partito conciliare e a schierarsi a favore del papa. È un tema molto discusso tra gli studiosi, di cui si dà ampia letteratura nell'introduzione di Peroli 2017, XXIX–XXX; Christianson 2004, 91–103; McDermott 1998, 254–273; Christianson e Izbicki 1996.

[19] Cusanus 1972a, 263.

[20] La questione relativa alla genesi di queste due opere, tra loro molto diverse per contenuto e linguaggio, è un tema molto dibattuto nell'ambito della ricerca cusaniana. Per approfondimenti, cfr. Peroli 2017, XXVI–XXVII. Cfr. anche Counet 2014, 11–28.

[21] Cfr. Folkerts 2012, XXRX–XXXM.

Herrenberg (morte 1460), autore dell'opuscolo *De ignota litteratura*, nel quale Cusano viene apostrofato come pseudo–apostolo e pseudo–profeta. L'argomento portato a difesa da Cusano è lineare: è vero che tutte le cose sono in Dio, ma in Dio esse sono Dio stesso, ed è vero che Dio è in tutte le cose, ma anche nelle cose Dio non si riduce a qualcosa di particolare; Dio e le cose restano quindi distinti. L'impegno a favore della causa papale contro i conciliari di Basilea lo porta alla porpora cardinalizia.

Nel 1450, l'anno del Giubileo, Cusano si reca a Roma, riceve da Niccolò V il cappello cardinalizio, viene nominato Vescovo–Principe di Bressanone e legato pontificio per la Predicazione del Giubileo in Germania. Il 1450 è un anno molto proficuo dal punto di vita della produzione letteraria del cardinale. Durante quest'anno scrive un opuscolo matematico, il *De quadratura circuli*, e un'altra opera importante, inaugurando la forma letteraria del dialogo, vale a dire i tre libri *De idiota*: I e II. *De sapientia*; III. *De mente*; IV. *De staticis experimentis*. Tra il 1451 e il 1452 Cusano viaggia instancabilmente come legato apostolico insieme a una trentina di persone, percorrendo circa 4500 chilometri, per lo più a dorso di un mulo, e attraversando molte città dell'Austria, della Germania e dei Paesi Bassi, dove egli predica, senza risparmiare le proprie forze, e si impegna, senza successo, in una riforma della chiesa tedesca, che investiva tutti gli ambiti della vita della chiesa, dalla liturgia all'economia, dalla condotta morale del clero alla vita degli ordini monastici[22]. Nel 1452, rientrato nella sua diocesi a Bressanone, inizia un'intensa attività di risanamento economico della diocesi, rivendicando antichi diritti territoriali (feudi, castelli, miniere) che *de facto* erano stati espropriati dai reggenti del Tirolo e dalle famiglie nobiliari locali. Cerca di mettere in pratica i suoi principi di una riforma della vita ecclesiale, specie nel suo aspetto morale che vorrebbe esemplare: come scrive Edmond Vansteenberghe (1881–1943), Cusano voleva fare di Bressanone «una diocesi modello» per virtù e serietà posta al confine culturale tra la Germania e l'Italia»[23], ma trova molte difficoltà e resistenze, arrivando a veri e propri scontri, come quello con le monache dell'abbazia di Sonnenburg, in Val Pusteria, e la loro badessa Verena von Stuben (nascita ca. 1410), la quale, appellandosi all'aiuto del Duca d'Austria Sigismondo (1427–1496) durante un'aspra disputa su alcune terre e alcuni diritti rivendicati dal vescovo, viene scomunicata da Cusano e costretta a lasciare il convento.

Nel 1453, sconvolto dalla notizia della conquista di Costantinopoli da parte dei musulmani guidati da Muhammad II (1432–1481), Cusano scrive il *De pace fidei*, un'opera nella quale immagina sotto forma di una visione un concilio celeste di tutti i rappresentanti delle diverse tradizioni religiose capace di porre fine alle guerre e di assicurare una pace perpetua della fede. Lo stesso anno, nonostante l'episodio della lotta con Sigismondo, Cusano riesce a scrivere il *De visione dei* e il *Complementum theologicum*. Tra il 1453 e il 1454 compone il *De mathematicis complementis* (la prima edizione, in un libro, viene compiuta a Bressanone nel settembre del 1453, la seconda edizione, che include due libri, è ultimata nel novembre 1454). Nel 1454, anno in cui molto probabilmente scrive il *De una recti curvique mensura*, Cusano è inviato, con lettere riservate, per trattare con gli Ussiti e per risolvere la disputa con i Cavalieri dell'Ordine Teutonico.

Nel 1457 si interessa sempre più ai problemi matematici e scrive il *Dialogus de circuli quadratura*. Dopo il lungo conflitto tra il cardinale e il duca del Tirolo e dopo alcuni tentativi di agguato, diverse minacce di morte e tentativi di avvelenamento, Cusano si convince della necessità di rifugiarsi nel castello di Andraz Buchenstein. Qui scrive il *De caesarea circuli quadratura* e il *De beryllo*, dove, metaforicamente, la pietra preziosa è

[22] Cfr. Sullivan 1974, 382–428; Meuthen 1995, 473–502; Watanabe 2011, 29–34; Euler 2014, 63–65.
[23] Cfr. Vansteenberghe 1920, 138; Serina 2016.

concepita come una lente attraverso la quale è possibile vedere le verità invisibili.

Dopo gli anni travagliati di Bressanone, nel 1458, papa Pio II, legato a Cusano fin dai tempi del Concilio di Basilea, invita Cusano a tornare a Roma e lo nomina *legatus urbis*. Anche qui, come durante il viaggio in Germania, Cusano si distingue per sobrietà e stile di vita. Scrive il *De mathematica perfectione* (in due versioni), ritenuto dallo stesso autore il migliore di tutti i suoi scritti matematici. Nel 1459, in assenza del papa, tenta, come *legatus urbis*, di risolvere, senza grandi risultati, i conflitti tra famiglie nobili romane (Anguillara, Colonna, Savelli) e di realizzare, ancora una volta senza successo, una *reformatio generalis* della Chiesa: quest'ennesimo fallimento getta il cardinale nel più triste sconforto[24].

In questo periodo di profonda delusione risale l'ultimo scritto matematico di Cusano, l'*Aurea propositio in mathematicis*, nonché una nuova e intensa lettura del *Commentario* di Proclo al *Parmenide* di Platone (il dialogo era stato integralmente tradotto in latino da Giorgio di Trebisonda (1395–ca. 1473) su commissione dello stesso Cusano nel 1459), che Cusano avena citato espressamente per la prima volta nel *De beryllo*. A questa lettura del *Commentario al Parmenide* è ispirato il sermone *De principio*, nel quale Cusano riporta quasi letteralmente passi dell'opera di Proclo. Nello stesso anno scrive anche il *De aequalitate*.

Sempre tra il 1459 e il 1460 Pietro Balbi di Pisa (1399–1479) traduce per Cusano il *Didaskalikos* di Albino/Alcino (II secolo d.C.) e la *Teologia platonica* di Proclo, l'opera che più di vent'anni prima Cusano aveva portato con sé da Costantinopoli e della quale Cusano può ora disporre di una traduzione completa. Le nuove letture che Cusano compie in questi anni svolgono un ruolo significativo nelle sue ultime opere, nelle quali il cardinale torna a riflettere sul rapporto tra Dio e mondo, in particolare sul rapporto tra *esse* e *posse* nell'Assoluto, un tema che verrà elaborato nel *De possest*, (1460), e approfondito successivamente nel *Compendium* (1463–1464) e nel *De apice theoriae* (1464). Sempre in questi anni Cusano cerca nuove formule per concepire il principio divino, come quella del *non aliud*, che dà il titolo al grande scritto che Cusano compone a Roma tra il 1461 e 1462.

Nel 1460, senza mai risparmiarsi, si impegna (raccogliendo tuttavia ancora delusioni e amarezze) nel contenzioso con il Duca del Tirolo e prevede anche una riforma della Curia e del governo della Chiesa. Dopo un'apparente riconciliazione con il Duca del Tirolo a Bressanone, Cusano è obbligato a rifugiarsi nell'Italia centrale. Nel 1461 scrive il *De cribratione Alkorani* dove confronta il cristianesimo con la religione musulmana.

Oltre ai testi di Platone, l'interesse di Cusano negli ultimi anni della sua vita è rivolto ad Aristotele, come emerge già a partire del *De beryllo*. In verità, già prima di arrivare a Roma, Cusano si era procurato due importanti traduzioni, quella dell'*Etica nicomachea* di Leonardo Bruni (1370–1444) (*cod. Cus.* 179) e quella della *Metafisica* di Bessarione (*cod. Cus.* 184). Aveva inoltre a disposizione la traduzione del *De vitis philosophorum* di Diogene Laerzio (ca. 180–ca. 240), ed è proprio da questa lettura che nasce il *De venatione sapientiae*, scritto a Orvieto tra il 1462 e il 1463. Qui Cusano si trova per trascorrere alcuni

[24] A tal proposito si legga lo sfogo che Cusano fece a Pio II in una lettera riportata dalla stesso papa nei suoi *Commentarii* (VII 9, ed. Bellus–Boronkai, I, p. 351): «nulla mi piace di quanto accade in questa curia. Tutto è corrotto. Nessuno compie il suo dovere; né tu, né i cardinali vi curate della Chiesa. Chi mai osserva le prescrizioni canoniche? Chi rispetta le leggi? Dov'è lo zelo per la liturgia? Tutti sono interessati solo alla carriera e ad accumulare ricchezze. Vengio irriso se nel concistoro parlo di riforma. Qui io sono superfluo. Permettimi di andarmene! Io non posso sopportare questo genere di vita. Sono vecchio e ho bisogno di quiete. Voglio ritirarmi in solitudine e se non posso vivere per il bene comune, allora voglio vivere per me». Il testo è riportato da Flasch 2008, 621.

mesi di cura dopo che l'anno precedente si era gravemente ammalato, molto probabilmente di una malattia intestinale che gli provocava dolori lancinanti. Sempre a Orvieto prepara l'edizione di tutte le sue opere mentre il progetto di riforma della chiesa esposto nella *Reformatio generalis*, elaborato negli anni precedenti, naufraga definitivamente, restando inattuato.

Nel 1463 scrive il *De ludo globi*. Durante il suo viaggio da Roma ad Ancona, dove cerca di raccogliere truppe per la crociata lanciata da Pio II per contrastare la minaccia turca, Cusano muore a Todi, nel palazzo episcopale, in agosto, tre giorni prima di Pio II e poco prima della capitolazione di Sigismondo d'Austria. Il suo corpo è sepolto a Roma, nella chiesa di San Pietro in Vincoli, dove si trova ancora il suo monumento funerario. Il suo cuore, invece, così come aveva disposto, è sepolto a Kues nella cappella del *Cusanusstift* che Cusano aveva fondato (come parte di un lascito) nel 1458. Si trattava di un ospedale di carità, per 33 persone (in memoria degli anni di Cristo), di cui 6 nobili, 6 sacerdoti e 21 persone comuni.

Nel *Cusanusstift* vi è tutt'oggi una delle più ricche biblioteche europee, la Biblioteca dell'Ospedale di San Nicola a Bernkastel–Kues, punto di riferimento degli studi cusaniani, dove sono custodite tutte le opere di Cusano e altri 1841 manoscritti (tra cui 132 incunaboli, 153 titoli del XVI secolo, 323 del XVII, 550 dei XVIII e 683 del XIX), divisi in argomenti, che spaziano dalla teologia pastorale alla psicologia, dalla letteratura mistica alla cosmologia)[25].

[25] La collezione dei manoscritti è pubblicata in un catalogo stampato (cfr. Marx 1905) e microfilmato per fini scientifici. Le copie del film sono disponibili presso l'Institut für Cusanus–Forschung a Trier. Per una descrizione della biblioteca di Cusano, cfr. Watanabe 2011, 363–370. Tra i molti studi che sono stati dedicati alla biblioteca di Kues e ai manoscritti cusaniani, cfr. Bianca 1993, 1–11; Bianca 1983, 669–708; Bianca 2002, 25–36; Heinz-Mohr e Eckert 1963, Kramer 1980, 182–197; cfr. Stork 2010, 67–95.

Capitolo 2
Cusano e la matematica

Prima di indagare gli scritti matematici, è opportuno tener conto di alcune coordinate di fondo della filosofia della matematica elaborata da Cusano nei suoi scritti.

Nel primo capitolo del *De docta ignorantia*, Cusano, analizzando il modo in cui procede la conoscenza razionale[1], afferma che ogni ricerca consiste nell'istituire un confronto tra due cose, di cui una è nota e l'altra è ciò che si intende conoscere. Mediante tale *comparatio* si giunge a individuare un rapporto (*proportio*), che permette di conoscere ciò che è ignoto[2]. Avendo carattere comparativo, la nostra conoscenza si basa fondamentale sulla misurazione, la quale non può realizzarsi senza il numero, che, afferma Cusano, costituisce la condizione necessaria di ogni comparazione[3] e, in quanto tale, è il principio formale di ogni atto conoscitivo della ragione[4]. Da ciò Cusano trae due conseguenze fondamentali. La prima è che l'infinito è per l'uomo inconoscibile, in quanto si sottrae a ogni *proportio* e a ogni *comparatio*[5]: «finiti ad infinitum nulla est proportio».[6] La seconda è che la «precisa veritas est incomprehensibilis»[7], ossia che è impossibile conoscere perfettamente (*adaequate*) le cose, il che conferisce alla nostra conoscenza un carattere strutturalmente congetturale[8].

Misurando, inoltre, l'uomo diventa consapevole dei limiti della propria conoscenza e, facendo esperienza dell'impossibilità di raggiungere la conoscenza dell'*ab–solutum*, acquisisce la saggezza della consapevolezza della propria ignoranza, la *docta ignorantia*[9]. E, poiché il processo attraverso il quale comprendiamo è lo stesso che blocca l'accesso all'infinito e ci separa abissalmente da esso, alla mente non resta che vedere l'infinito prospettivamente, nella miriade di modi in cui si manifesta nel mondo finito, ossia nella

---

[1] Cusanus 1972a, I, 2, 16.
[2] Cusanus 1972a, I, 2, 17–18.
[3] «Numerus ergo omnia proportionabilia includit» (Cusanus 1972a, I–3). Cfr. anche Cusanus 1983a, VI, 95, 4–7; Cusanus 1988a, II, 80, 1–2.
[4] La capacità di numerare si configura, pertanto, come la differenza specifica dell'uomo rispetto agli altri animali non dotati di ragione. Cfr. Cusanus 1972a, II, 3, 108, 2–4. Sull'importanza del numero nell'attività conoscitiva, cfr. Van Velthoven 1977, 133–154ss; Stadler 1983b, 118–131; Stadler 1983a; Eisenkopf 2007; Bocken 2005, 201–220; Böhlandt 2009.
[5] Cusanus 1972a, I, 3, 2–3.
[6] Questo principio dell'incommensurabilità dell'infinito è presente anche in altri passi del *De docta ignorant*ia (Cusanus 1972a, II, 2, 102, 10–11) e ricorre in molti suoi scritti: cfr. Cusanus 2002, 27, 6–8; Cusanus 2000, XXIII, 101, 7–8; Cusanus 1994, 13, 14–16; Cusanus 2010b, 3, 5–7; Cusanus 1973, 10, 7–9. Sul significato di tale principio, cfr. Hirschberger 1975, 39–45; Beierwaltes 1980. Sull'origine di tale principio nella tradizione antica e sulla presenza nella filosofia medioevale, nonché sulla discussione intorno a tale principio, cfr. Peroli 2017, nota 12, 2174–2176.
[7] Cusanus 1972a, I, 3.
[8] Cfr. Pasqua 2013, 345–357.
[9] Cfr. Hofmann 1964, 169–183.

molteplicità dei particolari che, «secundum plus et minus»[10], partecipano di essa[11]. L'infinito è per l'uomo un enigma insondabile, il cui mistero è penetrabile riconoscendo il significato dei segni soprannaturali di cui il mondo è intessuto, o, come scrive Cusano nel *De filiatione dei*, contemplando nelle cose sensibili («che sono segni del vero espressi attraverso simboli») le realtà intellettuali e da queste ascendendo, «con una qualche comparazione senza proporzione», alle realtà eterne[12].

La sproporzione che sussiste tra finito e infinito è la stessa di quella esistente tra numero e unità o tra ciò che è curvo e ciò che è retto. Nell'infinito, nell'unità e nella rettitudine si realizza la perfetta uguaglianza, la *praecisio absoluta* («deus est ipsa absoluta praecisio»[13]) la quale tuttavia resta alla mente umana «inaccessibilis»[14], «inattingibilis»[15] o «in nullo cognoscibili cognoscitur»[16] o «impossibilis [est]in omni finito»[17].

Cusano vede nella *ratio o unitas aequalitatis* la misura dell'essere e del conoscere: ogni misurazione, infatti, presuppone necessariamente un'unità di misura, «sine qua numerus non esset numerus»[18]. Questa unità assoluta, costituendo il principio della numerazione, sfugge, tuttavia, ad ogni misurazione[19]: essa «in pluralitate contracta est»[20] o, detto altrimenti, «numerus est explicatio unitatis»[21]. Questo vuol dure che l'unità non è mai visibile *uti est*, ma solo *in alteritate*[22]. Ma, come ogni realtà, in quanto è, partecipa[23]dell'uguaglianza secondo un diverso grado di proporzione, così ogni immagine, par-

---

[10] «la verità[…] può essere comunicata mediante una sua similitudine, la quale può essere recepita in modo maggiore o minore, conformemente alla disposizione di chi la riceve» (Cusanus 1988b, 18). Cfr. anche Cusanus 1972a, II, X, 155.

[11] Cfr. Herold 1975, 2–3; Falckenberg 1880, 3; Koch 1953, 47–48.

[12] Cusanus 1959b, II, 61, 6–7.

[13] Cusanus 1983b, 29. Cfr. anche Cusanus 1983a, 31–44; Cusanus 2010c, 36.

[14] Cusanus 2002, 33.

[15] Cusanus 1983c, 173.

[16] Cusanus 2010c, 36.

[17] Cusanus 1972b, I, 9.

[18] Cusanus 1972a, II, 3, 108; cfr. anche Cusanus 1972a, II, 3, 105–107.

[19] «L'unità non può essere un numero perché il numero ammette sempre un più, per cui non può in alcun modo essere né il minimo in quanto tale, né il massimo in quanto tale. L'unità piuttosto è il principio di ogni numero, perché è il minimo; ed è il fine di ogni numero perché è il massimo» (Cusanus 1972a, I, 5, 14). Cfr. anche Cusanus 1964, Epilogus, 46; 14, 24–25; Cusanus 1972b, I, 5, 17; Cusanus 1988a, II–65; Cusanus 1982, 14, 24–25.

[20] Cusanus 1972a, I, 2, 6.

[21] Cusanus 1972a, II, 3, 108.

[22] Sotto questo aspetto ogni individuo, nel suo essere contratto, non solo perfeziona il suo pensiero e il suo sapere (cfr. Stallmach 1989), ma acquista anche – e soprattutto – la dignità di un centro infinito di relazioni infinite (Pasqua 2015, 469–478). Se la *complicatio* viene a indicare l'identità in Dio di tutte le cose, l'*explicatio*, che dà luogo a una *contractio* (cfr. Cusanus 1972a, II, 4, 116), rappresenta il momento della distinzione, della non coincidenza tra creatore e creatura. La nozione di contrazione viene ad assumere un ruolo chiave nella spiegazione del rapporto tra Dio e il mondo: «unde quando recte consideratur de contractione, omnia sunt clara» (ivi, 114). Nel V capitolo del II libro del *De docta ignorantia*, Cusano descrive la relazione di ogni cosa con il tutto come contrazione: «...quodlibet recipit omnia, ut in ipso sint ipsum contracte. Cum quodlibet non possit esse actu omnia, cum sit contractum, contrahit omnia, ut sint ipsum» (ivi, 117). A sottolineare l'importanza che la categoria della relazione assume nel concetto cusaniano di *contractio* è Thomas Leinkauf, il quale, riconoscendo alla relazione la caratteristica peculiare della mente: «Das Kontrakt-Sein einer Sache ist ihr universaler Aspekt: nur wenn man am Einzelnen diesen Bezug auf das Ganze denkt, denkt man es als Einzelnes unverkürzt», valuta la molteplicità positivamente («als […] lebendige (dynamische) Einheit») e la differenza, o non–coincidenza, come espressione dell'attività stessa dell'assoluto: «Ausdruck des Identitäts-setzenden Tätigseins Gottes» (Leinkauf 2006, 172–179). Cfr. Hopkins 1983, 97–112.

[23] Cfr. Cusanus 2001, 27, 20–27. Cusano afferma che ogni singola realtà, così come ogni forma di sapere partecipa dell'*aequalitas*: tuttavia, mentre la percezione sensibile coglie l'uguaglianza nella qualità, la fa-

tecipando della verità nell'alterità del suo essere, è sempre lontana dalla verità del suo esemplare[24], che, in sé, è «imparticipabilis»[25].

Tuttavia, tra tutte, le figure matematiche rappresentano per Cusano lo *speculum* più trasparente in cui la verità (ri)splende non come in una lontana immagine (*remota similitudo)*, ma come nella più luminosa delle approssimazioni (*fulgida propinquitas*)[26]. La matematica, per Cusano, viene a configurarsi come la *via regia* del processo di assimilazione mediante cui il soggetto (la mente) cerca di eguagliare l'oggetto ineguagliabile (dio). Questo perché «mens nostra mathematicalia fabricat»[27]: essendo prodotti dalla mente, gli enti matematici non sono soggetti al mutamento che contrassegna i *sensibilia* e sono perciò dotate di maggiore certezza, anzi di una «fermissimam atque nobis certitudinem»[28].

Tuttavia, proprio in quanto prodotti della ragione, gli enti matematici sono finiti e non possono essere raffigurati dall'immaginazione diversamente da come sono: «cum omnia mathematicalia sint finita et aliter etiam imaginari nequeant»[29]. Nella scia di Boezio (ca. 480–ca. 524)[30], infatti, Cusano afferma che qualsiasi figura si esplica necessariamente nella grandezza (*magnitudo*) ed è tale perché è una certa quantità[31], che differisce necessariamente da un'altra. In pratica il geometra vede la figura come entità separata dalla materia corporea e sensibile, ma non dalla materia intelligibile[32]: «sed materia eius magnitudo est, sine qua nihil concipit mathematicus»[33]. E tuttavia, mentre disegna un particolare triangolo o un particolare cerchio, il geometra guarda con la mente all'*exemplar*, ossia al modello infinito[34]. Il triangolo disegnato è in realtà infinito nella mente e non è soggetto alle dimensioni: non è pensato come grande o piccolo, ma come l'atto di tutti i triangoli possibili[35]. Nell'ambito geometrico–matematico l'infinito viene, per così dire, esperito

---

coltà immaginativa la coglie nella quantità, mentre l'intelletto è in grado di coglierla in se stessa, in quanto l'intelletto è ciò che più somiglia all'uguaglianza, essendo «aequalitatis species seu signum» (Cusanus 1964, X, 32). Cfr. anche Cusanus 1964, X, 33–34.

[24] «nulla enim imago esse potest veritatis adaequata mensura, cum in eo, quod imago, deficit» (Cusanus 2002, 15, 20–21).

[25] Cusanus 1988b, 18.

[26] «in speculo mathematico verum illud, quod per omnes scibile quaeritur, reluceat non modo remota similitudine sed fulgida quadam propinquitate» (Cusanus 1994, I, 8–10). Cfr. anche Cusanus 1959b, 3, 65–68. Cfr. Cusanus 1972a, I, 11, 30, 4; XI, 20, 4; Cusanus 2001, 13, 23–25.

[27] Cusanus 1988b, 32, 55. Cfr. anche Cusanus 1972b, I, 1. Sulla ricorrente concezione cusaniana di «mens humana» come «imago»», «similitudo» o «complicatio notionalis», cfr. Cusanus 1983a, II, 58, 9–11; III, 73, 1; V, 74, 22; Cusanus 1988a, 91–92; Cusanus 1982, XVII, 49, 10; XXIX, 86, 3–19. I contenuti del sapere matematico, in quanto *entia rationis*, sono certi e precisi, per cui le leggi che esprimono le relazioni tra le cose sono le stesse della ragione. Va da sé che la certezza della matematica si riferisce solo a quella che Cusano definisce la matematica razionale, e non è applicabile a quella sensibile e intellettuale.

[28] Cusanus 1972a, I, 13. Cfr. Cusanus 1972a, I, 2, 8, 31; I, 10, 27; I, 12, 33; Cusanus 1973, 63, 7–10. Cusanus 1983a, 7–103ss; Cusanus 1988b, 52, 1–7; 63, 6ss. Cusanus 1994, 3, 75ss.; 5, 23–29. Sulla dottrina della *complicatio* ed *explicatio*, cfr. Gómez 1969, 134–140.

[29] Cusanus 1972a, I, 13, 33.

[30] Cfr. Boethius 1867, I, 8, 15; Cusanus 1972a, I, 11, 32; Cusanus 1983a, X, 126; Cusanus 1972b, I, 8, 35, 2; Cusanus 1964, V, 12.

[31] «Homo[…]non videt figuram nisi quantam. Quantitas autem materiam supponit» (Cusanus 2001, 5, 15).

[32] Cfr. Cusanus 1973, 63, 1–18.

[33] Cusanus 1988b, 36, 63.

[34] Scrive Cusano nel *De possest*: «[La matematica]non considera, infatti, il cerchio come esso è in un pavimento corruttibile, ma come esso è nel principio razionale (*in sua ratione*), ovvero nella sua definizione». (Cusanus 1973, 63, 12–15).

[35] Wolfang Achtner mostra che per Cusano, come già per Gregorio di Nissa (ca. 335–ca. 394) e molto più tardi per Georg Cantor (1845–1918), un essere divino deve avere una natura veramente infinita, e non essere un potenziale infinito processo di crescita senza fine (Achtner 2011). L'autore mostra, inoltre, come per Cusano, profondamente influenzato dalla tradizione apofatica, l'infinito possa essere raggiunto dalla

«d[a]ll'intelletto insieme con l'immaginazione»[36].

Ora, se la geometria è vista da Cusano come il terreno previlegiato in cui si può, *certo modo*, vedere l'infinito, questo deriva dal fatto che vi è un luogo geometrico in cui si realizza la perfetta uguaglianza del principio, ossia nella linea retta. La linea retta gode, infatti, di una proprietà "limite": in essa sparisce ogni curvità, cessano di esistere il più e il meno di ciò che può essere più o meno curvo; i concetti di aumento e diminuzione si elidono perché coincidono nell'uguaglianza assoluta.

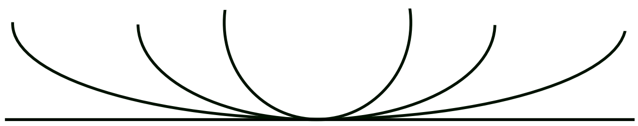


fig. 1

È per questa proprietà che Cusano può affermare che ciò che è retto è misura di tutto ciò che è curvo[37]. Nel più e meno è implicito infatti un criterio di misura che postula l'esistenza di un ente uguale solo a se stesso rispetto al quale definire il più e il meno. Ciò che è curvo è più o meno curvo in base alla sua aderenza (partecipazione) alla retta, che, per definizione, è priva di curvità. E se è vero che non si può immaginare che il curvo arrivi a coincidere col retto anche dopo una successione infinita di curve sempre più aderenti ad esso, la retta resta tuttavia l'ultimo termine di riferimento, l'unità di misura per l'infinità delle linee curve.

Così, nel concetto di *rectitudo* («la linea infinita è rettitudine infinita»[38]), o meglio nella paradossale soluzione del curvo nel retto, ossia nella perfetta uguaglianza della loro coincidenza, Cusano illustra geometricamente l'infinito in atto, fermo restando «l'impossibilità che esista una linea infinita *in atto*»[39].

Nell'*Apologia doctae ignorantiae*, nel rispondere a Wenck che non riusciva a comprendere come l'infinito potesse essere misura dei finiti, dal momento che il finito non ha con l'infinito nessuna *proportio*[40], Cusano riprende l'esempio della linea infinita utilizzato nella sua prima opera, per mostrare come sia possibile pervenire «ad simpliciter infinitum»[41]. Ogni linea (finita) è, in sé, infinita, perché, pur essendo potenzialmente divisibile all'infinito, resta sempre una linea. Questo implica che «una linea finita è indivisibile nel suo esser linea […] Ne consegue che la linea infinita è la ragion d'essere della linea finita»[42]. Allo stesso modo, ogni linea, qualunque sia la sua misura, estesa all'infinito non

---

rappresentazione simbolica e dal ragionamento matematico asintotico, dando così un notevole contributo nel rendere l'infinito accessibile razionalmente (cfr. Achtner 2005, 392–411). Sul rapporto tra la concezione cusaniana di infinito matematico e la matematica scolastica, cfr. Werland 1986, 103–109.

[36] Cfr. Cusanus 1973, 63, 16–18.

[37] «il retto, come dice Aristotele, è la misura di se stesso e dell'obliquo» (Cusanus 1972a, I, 18, 53).

[38] Cusanus 1972a, II, 1, 99.

[39] Cusanus 2002, 48, 6–9. Cfr. Cusanus 1972a, I, 13, 35; I, 16, 46.

[40] Cfr. Wenck 1910, 32, 7–9.

[41] Cusanus 2002, 47, 9. Sul rapporto Wenck–Cusano, cfr. Haubst 1955.

[42] Cfr. Cusanus 1972a, I, 18, 47, 6–7.

è più una linea, ma si identifica con l'infinità stessa[43]. Nella linea infinita, dunque, vi è ogni linea finita, sebbene ciascuna linea finita ne partecipi in gradi diversi. In questo senso, la linea retta infinita costituisce l'esemplare di tutte le figure geometriche che si possono costruire con le linee[44].

Ora, se è vero che l'infinito semplice comprende il massimo e il minimo assoluto, va detto che, poiché solo il massimo assoluto, che contiene tutto, include il minimo; solo il massimo assoluto è uguale a se stesso, e dunque in esso solo è fondata l'uguaglianza assoluta[45]. Così, nel massimo assoluto il cerchio è in ogni poligono, e ogni poligono è nel cerchio: l'uno è nell'altro, e c'è un solo perimetro infinito: la massima linea curva è uguale alla linea retta, così come lo è la minima linea curva[46]. Questo vuol dire che la curva, in sè, non è nulla, ma partecipa della rettitudine secondo un certo grado[47], e dunque, comparando la curva e la retta, si conclude che la linea retta partecipa della linea infinita più di quanto ne partecipi la linea curva: «premetto che la linea retta è più semplice della linea curva, in quanto la linea curva, deviando dalla linea retta, non può essere concepita senza il concavo e il convesso»[48].

La linea infinita, a sua volta, cessa di essere linea perché essa non ha più né quantità né termine; la linea infinita non è più linea, ossia non è più un *ens rationis*, ma la stessa infinità, ossia uguaglianza assoluta[49]. Questo vuol dire che il *maximum in se* non è né linea, né triangolo, né cerchio, né sfera, «ma è piuttosto infinitamente e senza alcuna proporzione al di sopra di esse»[50].

Dunque, attraverso un processo di infinitizzazione delle figure geometriche (linea, triangolo, cerchio, sfera), è possibile avvicinarsi all'«infinito semplice che è del tutto indipendente da ogni figura»[51]. Questo processo avviene, scrive Cusano, *per additionem infinitatis*[52]. Tuttavia, più che come l'attuazione dell'illimitato sviluppo di un'infinità poten-

---

[43] «Infinita linea non est linea, sed linea in infinitate est infinitas […]infinita quantitas non est quantitas, sed infinitas» (Cusanus 2000, XIII, 55, 8–12).

[44] Cfr. Cusanus 1983b, II, 44. «Ma, per illustrare come Dio, considerato assolutamente in se stesso, sia l'atto di ogni potere, vale a dire la forma ad un tempo semplicissima e totalmente infinita, non vedo un'immagine intellettuale più appropriata di quella che si ha se si suppone una linea infinita. Nel mio trattato *Sulla dotta ignoranza* ho sostenuto che, se vi fosse una linea infinita, essa sarebbe l'atto di ogni poter essere di una linea, sarebbe cioè il limite di tutte le figure che possono essere delimitate attraverso una linea e il modello più adeguato di tutte le figure che possono essere tracciate mediante delle linee» (Cusanus 1973, 59, 1–7). Cfr. Cusanus 1972a, I, 13, 35.

[45] «Solo il massimo, che è la ragion d'essere stessa infinita, può partecipare della ragion d'essere nella forma dell'uguaglianza somma» (Cusanus 1972a, I, 18, 47, 3–5), uguaglianza somma che si identifica nella uguaglianza dell'unità. Ancora, «come la linea infinita è la misura della linea retta e di quella curva, così il massimo è la misura di tutte le cose, le quali, in forme certamente diverse, partecipano tutte in qualche modo di lui» (Cusanus 1972a, I, 18, 52, 22–24).

[46] «Qualcosa che sia curvo in modo massimo e in modo minimo non è che retto» (Cusanus 1972a, I, 18, 52). In Cusanus 1994, 13, 9–27 Cusano conclude che, poiché la linea circolare infinita è dritta, la linea retta infinita è la misura vera che misura la linea circolare infinita. Se la coincidenza degli opposti è come la circonferenza di un cerchio infinito, la differenza tra gli opposti è come la circonferenza di un poligono finito. Considerando, per esempio, la corda e l'arco di una circonferenza, egli nota che essi coincidono nell'infinitamente piccolo: «coincideret igitur ibi corda et arcus si ad minimam quantitatem in talibus deveniretur» (Cusanus 2010d, 4). Sul concetto di *minimum* in relazione al principio della coincidenza degli opposti, cfr. Bredow 1970, 357–366.

[47] «Nè il curvo, in quanto curvo, è qualcosa in sè, poichè è una declinazione (*casus*) dal retto» (Cusanus 1972a, I, 18, 52). Cfr. anche Cusanus 1972a, II, 2, 99.

[48] Cusanus 1982, 26, 74. Cfr. Yamaki 2005.

[49] Cfr. Cusanus 2000, XIII, 57.

[50] Cusanus 1972a, I, 20, 61. Cfr. Knobloch 2002, 223–234.

[51] Cfr. Cusanus 1972a, I, 11, 33, 14–15. Cfr. anche Cusanus 1972a, I, 12, 37, 7–23; Vescovini 1998b, 31–48.

[52] Cusanus 1994, III, 75–77.

ziale, l'infinità si configura come rimozione del finito, ossia del limite, dal finito: «quando infinitas additur termino […] non aliud agit eius additio ad terminum quam removere terminum»[53]. Si potrebbe dire che l'*additio infinitatis* altro non è che un'*ablatio finitatis*. Così facendo, si intuisce, in una superiore visione mentale, lo stesso infinito *sine termine*[54], «et tuns nostra ignorantia incomprehensibilter docebitur»[55].

Cusano sa che le figure infinite non esistono *in actu*. Esse sono semplicemente un «enigma intellettuale» – il più adeguato (*propinquius*) – per indicare Dio[56]. La *transumptio* attuata dalla matematica intellettuale, configurandosi come *assimilatio* del finito alla natura infinita divina[57], costituisce un'utile *manuductio* all'indagine umana intorno alle cose divine (*in rebus divinis*[58]) e rappresenta il terreno fertile per un'antropologia metafisica che cerca di conciliare il potere dell'uomo con l'infinita potenza di Dio mediante il principio della *coincidentia oppositorum*[59]. In questo senso David Albertson afferma: «Geometry was for him (i.e. Cusanus) a kind of mathematical laboratory for speculative discoveries, or better, a kind of playground where he could observe his mind's movements and exercise it for theological tasks»[60].

---

53 Cusanus 1994, IV, 42–44. Ancora, nel *De quaerendo dei*, Cusano afferma «Est denique adhuc via intra te quaerendi deum, quae est ablationis terminatorum» (Cusanus 1959b, V, 49, 1).

54 «Et ita ex figuris multiangulis et circulo complicante omnes formabiles polygonias mens ascendit ad theologicas figuras et intuetur dimissis figuris virtutem infinitam primi principii» (Cusanus 1994, V, 23–26). Cfr. Nicolle 2005, 279–293; Vescovini 1972, 609–639.

55 Cusanus 1972a, I, 12, 33. Cfr. Celeyrette 2011, 151–165. Sull'importanza del processo del *transferre* in Cusano, cfr. Cuozzo 2002.

56 Cfr. anche Cusanus 2002, 46, 31; Cusanus 1983b, II, 43: «Per te ipsum hoc clarissime conspicis, quod infinita rectitudo se habet ad omnia sicut infinita linea, *si foret*, ad figuras».

57 Cfr. Cusanus 1972a, I, 13, 35; Cusanus 1972b, XII, 17, 175, 1–3, Cusanus 1982, XVII, 50, 1–5. Cfr. Moritz 2006, 260–264, in cui l'autrice mostra come la nozione cusaniana di *transuptio* abbia origine nella tradizione retorica antica.

58 Cfr. Cusanus 1972a, I, 11, 30, 4; 32, 26–28. Con la più chiara delle sintesi, Cusano scrive: «nos certos reddit sine haesitatione in theologicis id ipsum theologice, quod in mathematicis mathematice affermandum» (Cusanus 1994, II, 83–85). Sul processo di infinitizzazione delle figure geometriche e sul loro uso simbolico, cfr. Grell 1965, 33–41; Breidert 1977, 116–126; Oberrauch 1993b, 373–382; D'Amico 2005, 265–278; Counet 2005, 279–293; Yamaki 2005, 295–312; Brient 2006, 210–225; Nagel 2007; Rusconi 2012.

59 Cfr. Settignani 1922, 219–235.

60 Albertson 2014, 244. Cfr. anche Brient 2006.

Capitolo 3
Gli scritti matematici

3.1 Uno sguardo sinottico

Dal breve profilo bio–bibliografico delineato emerge che Cusano, nell'arco di un quindicennio, tra il 1445 e il 1459, in mezzo a bufere politiche, conflitti territoriali, progetti di riforma e delusioni personali, pur se impegnato nell'attività legale e di negoziazione, riesce non solo a non interrompere la costante applicazione allo studio, ma anche a scrivere testi incentrati su tentativi geometrico-costruttivi atti a trovare la soluzione a un problema di carattere strettamente matematico: la quadratura del cerchio.

Si tratta delle seguenti opere: *De geometricis transmutationibus* (1445), *De arithmeticis complementis* (due versioni; 1450), *De circuli quadratura* (luglio 1450), *Quadratura circuli* (estate 1453), *De mathematicis complementis* (la prima versione, in un libro, viene compiuta a Bressanone nel settembre del 1453, la seconda edizione, che include due libri, fu ultimata nel novembre 1454), *Declaratio rectilineationis curvae* (1454), *De una recti curvique mensura* (1454), *Dialogus de circuli quadratura* (1457), *De caesarea circuli quadratura* (1457), *De mathematica perfectione* (due versioni; 1458), *Aurea propositio in mathematicis* (1459).

Questi scritti possono essere suddivise in tre parti. La prima comprende il *De geometricis transmutationibus*, il *De arithmeticis complementis* e il *De circuli quadratura*. Queste opere, scritte tra il 1445 e il 1450, sono strettamente collegate tra loro per contenuto e procedimento. In essi Cusano si sforza di portare a compimento la quadratura del cerchio attraverso il metodo dell'isoperimetria, che in queste opere è tuttavia soltanto abbozzato e non chiaramente spiegato.

La seconda comprende il *Quadratura circuli*, la *Declaratio rectilineationis curvae*, il *De una recti curvique mensura* e l'opera maggiore, il *De mathematicis complementis*, elaborati tra il 1453 e il 1457. Cusano si propone di utilizzare poligoni dello stesso perimetro per formare un cerchio isoperimetrico, e realizzare così la quadratura del cerchio. Il procedimento e l'approssimazione cui dà luogo tale tentativo vengono sottoposti al giudizio di Toscanelli, le cui critiche costringono Cusano a rivedere le proprie posizioni.

La terza parte consta di cinque opere, scritte tra il 1457 e il 1459: l'opera che lo stesso Cusano considera come la più importante, il *De mathematica perfectione* (di cui è stata tramandata anche una *forma prior*), il *Dialogus de circuli quadratura*, il *De caesarea circuli quadratura*, l'*Aurea propositio in mathematicis*. In queste opere Cusano si sforza di correggere gli errori rilevati da Toscanelli nel *De mathematicis complementis* e cerca di portare a termine le questioni su cui ha meditato e contemplato nei primi scritti matematici.

Tutti gli scritti matematici gravitano intorno alla *vexata quaestio* della quadratura del cerchio, a cui nessuno – sostiene Cusano nel *De mathematicis complementis* e, ancor prima, nel *De quadratura circuli* – ha saputo approssimarsi più di quanto abbia fatto Archimede (ca. 287a.C.–212 a.C.)[1]. Cusano, insieme a Luca Pacioli (ca. 1445–1517)[2], la

[1] Per un'attenta analisi dei concetti di infinito, numero e tempo presso i greci, cfr. Mondolfo 1967.
[2] Cfr. Pacioli 1494 e Pacioli 1509.

cui *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (1494) costituisce l'opera più diffusa all'inizio del secolo, è il veicolo principale della trasmissione al Rinascimento europeo dell'immagine di Archimede[3] come del matematico che più di ogni altro si era prodigato per arrivare alla quadratura del cerchio[4]. Cusano poteva leggere l'opera del grande matematico siracusano nella nuova traduzione latina compiuta nel 1450 da Giacomo da Cremona, noto anche come Iacopo di San Cassiano (ca. 1395–ca. 1454)[5], sotto il patrocinio di Niccolò V[6], come si apprende dalla dedica al papa premessa al *De mathematicis complementis*. Nella terza proposizione della *Misura del cerchio*, l'opera di Archimede più popolare e nota già nel Medioevo, il matematico greco, attraverso costruzioni geometriche elementari – cioè avvalendosi di riga e compasso – cerca di costruire un quadrato della stessa area di un dato cerchio e, introducendo valori numerici e calcoli aritmetici, calcola il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e quella del suo diametro, pervenendo ai famosi limiti di π ($3 + 10/71 < n < 3 + 10/70$). Cusano era inoltre a conoscenza dell'altro e più complesso procedimento di determinazione della misura della circonferenza realizzato dal matematico greco nelle *Spirali*, come emerge nella *Quadratura circuli*, nel *De mathematicis complementis* e nel *De mathematica perfectione*[7].

Sulla scia di Archimede, Cusano si propone di dare il *complementum* all'opera iniziata dal matematico greco e di risolvere il problema rimasto fino ad allora insoluto. Così, pur riconoscendo al matematico greco grande merito, da questi si distanzia circa la metodologia da utilizzare. Anzi, secondo Cusano, è proprio l'errata impostazione del problema accettata fino a quel momento ad aver reso impossibile la soluzione.

3.2 Metodo di archificazione e *coincidentia oppositorum*

In più passi il cardinale afferma che il motivo per cui gli antichi non sono riusciti nell'impresa è dovuto al fatto che essi si sono impegnati (invano) a cercare la quadratura del cerchio partendo dal cerchio, anziché dal quadrato. Dato un cerchio, Archimede aveva tentato di determinarne l'area costruendo una successione di poligoni regolari inscritti e circoscritti con numero rispettivamente crescente e decrescente di lati che assomigliavano sempre di più al cerchio. In questo modo il matematico era pervenuto ai limiti dell'area del cerchio.

Tuttavia, incalza Cusano, per pervenire alla conoscenza di ciò che è ignoto occorre muovere da ciò che è noto. Il cerchio, al pari dell'infinito, non è misurabile, ma è essa stessa la misura[8], sicché non è possibile partire dal cerchio per giungere all'*aequalita*s con il quadrato. Per questo Cusano cerca di mettere in atto un altro metodo, che non sia quello di esaustione/compressione. Oltre a questo errore di prospettiva, Cusano individua un'altra motivazione, di natura ancora più profonda, del fallimento di coloro che lo hanno preceduto:

---

[3] Cfr. Rose 1975, 36ss.; Giusti e Martelli 2010; Giusti e Maccagni 1994; Esteve e Martelli 2011.

[4] Cfr. De Bernart 2002a, 352. Per quanto riguarda modi e forme della recezione di Archimede da parte di Cusano, si veda l'esaustiva trattazione di Clagett 1964–1984b, III, 3, 297–315.

[5] Cfr. Da Cremona 1984. D'Alessandro e Napolitani hanno rinvenuto l'autografo della traduzione di Iacopo nel codice Nouv. Acq. Lat. 1538 della Bibliothèque Nationale de France e hanno dimostrato che l'umanista cremonese utilizzò per la sua traduzione un modello greco non riconducibile a nessuno dei manoscritti greci di Archimede a noi noti. Cfr. D'Alessandro e Napolitani 2012.

[6] Cfr. Manfredi 1994; Vasoli 1968.

[7] Cfr. De Bernart 2002a; Clagett 1964–1984a.

[8] «circulum non mensurari, sed mensurare» (Cusanus 1994, XI, 10). Cfr. Counet 2005, 273–290.

> Gli antichi hanno cercato l'arte di rendere il cerchio uguale al quadrato[...]; nell'uguaglianza hanno presupposto la coincidenza del cerchio e del quadrato [...], ma hanno fallito poiché la ragione non ammette la coincidenza degli opposti. La coincidenza infatti doveva essere cercata intellettualmente[9].

Per far sì che il quadrato sia uguale al cerchio è necessario che il quadrato si identifichi con il cerchio («in identitatem cum circulo se resolvat»[10]). Tale identità, tuttavia, non può essere raggiunta tramite la ragione (*per rationem*)[11], la quale giudica impossibile la coincidenza dei contraddittori[12], ma *intellectualiter*, ossia mediante una superiore visione mentale che scorge tale coincidenza all'infinito, attraverso la serie illimitata di determinazioni finite[13]. L'intuizione intellettuale è così in grado di cogliere ciò che non esiste come limite concreto[14].

Nello specifico, la circostanza razionalmente inimmaginabile della coincidenza del curvo col retto può avvenire in due casi solo apparentemente distinti: nell'infinitamente grande e nell'infinitamente piccolo. Nel primo caso si può immaginare un poligono che al crescere indefinito dei suoi lati tende a coincidere con la circonferenza ad essa tangente. Nel secondo caso si può pensare di restringere, per così dire, all'infinito la corda (ossia il lato del poligono inscritto o circoscritto) fino a che essa non si distingua dall'arco di circonferenza sotteso. La perfezione matematica consiste nella reciproca commensurabilità (*adaequatio*) tra ciò che è retto e ciò che è curvo.

> La mia intenzione è quella di arrivare alla perfezione matematica attraverso la coincidenza degli opposti. E poiché questa perfezione consiste per tutti nel rendere una grandezza rettilinea uguale a una [grandezza] curvilinea, mi propongo di cercare il rapporto di due linee rette che stanno tra loro come la corda e il suo arco[15].

Negli scritti matematici il principio teo–epistemologico della *coincidentia oppositorum* costituisce il filo conduttore che lega i molteplici – e con variazioni in certi casi significative – tentativi di Cusano di quadrare il cerchio e viene ad assumere una forte e crescente tensione costruttiva. Ripercorrendo analiticamente il contenuto di tali scritti nel loro ordine

---

[9] «Quaesiverunt veteres artem aequandi circulum quadrato [...] coincidentiam circuli et quadrati in aequalitate praesupposuerunt […] sed quia ratio non admittit coincidentias oppositorum, defecerunt. Coincidentia autem quaeri debuit intellectualiter» (Cusanus 1994, IV, 4–26).

[10] Cusanus 1973, I, 3, 10.

[11] «Ma la forza infinita è incommensurabile rispetto a tutto ciò che non è infinito, come l'ampiezza del cerchio resta incommensurabile rispetto a tutto ciò che non è circolare» (Cusanus 2010c, 28, 9–10). Cfr. anche Cusanus 1972a, I, 3, 9. Sul tema, cfr. Hofmann 1964, 398–403.

[12] Cfr. Cusanus 1972b, II, 2, 81.

[13] Cfr. Cusanus 2010d, 2–3. La tesi della congetturalità della conoscenza, ossia dell'irraggiungibilità della precisione, non sfocia in un esito scettico, dato che, per Cusano, essa è «positiva assertio veritatem partecipans» (Cusanus 1972b, I, 13) e rappresenta cioè la *ratio essendi* di ogni nostra ricerca. Cfr. Vaiati 1970, 163–172; Koch 1953, 7–48; Miller 1991, 119–140; Pasqua 2013, 345–357; Schulze 1978.

[14] Lo stesso discorso vale per diagonale e il lato del quadrato o per la circonferenza e il suo diametro: «sappiamo che tra la diagonale e il lato di un quadrato non è possibile trovare alcun rapporto che sia esprimibile in termini matematici, perché non possono esserci due numeri il cui rapporto sia precisamente come quello [che vi è tra la diagonale e il lato][…] E sebbene quel rapporto appia possibile, questa possibilità non è mai data in atto. L'atto sarebbe invece quella precisione per la quale i numeri starebbero tra di loro in un rapporto preciso[…] La precisone è presente in quel concetto che esprime ciò che per noi è impossibile concepire» (Cusanus 1973, 42).

[15] Cusanus 2010d, 2, 1–5.

di composizione, Joseph Ehrefried Hofmann ha rintracciato in essi uno sviluppo considerevole sul piano metodologico–scientifico, che dai primi incerti approcci alla questione dell'incommensurabilità retto/ curvo, svolti nel primo scritto (*De geometricis transmutationibus* del 1445), attraverso un sistematico ricorso al principio sovrarazionale della *coincidentia oppositorum*, approderebbe nell'ultimo scritto (*Aurea propositio* del 1459) a un tentativo di fondazione esclusivamente razionale delle proprie argomentazioni[16].

Ora, il procedimento più adatto a «figurare» geometricamente la coincidenza è quello dell'«archificazione»[17], che Cusano preferisce all'impostazione classica greca, a cui Archimede si manteneva sostanzialmente fedele e i cui risultati erano ritenuti esatti e non approssimativi durante tutto il Medioevo[18].

Con «archificazione» s'intende un procedimento di determinazione degli angoli, tipica della matematica indiana, e, da questa, attraverso gli arabi, filtrato in Occidente, secondo cui l'angolo viene immaginato come il risultato di una curvatura (da ciò l'idea di archificazione) della retta e direttamente misurato, in quanto tale, sulla circonferenza di un cerchio. Questo procedimento differisce molto dalla matematica greca, che procedeva alla determinazione degli angoli attraverso i rapporti fra linee rette.

Muovendo dal poligono regolare con il numero minore di lati (il triangolo equilatero) cui è inscritto e circoscritto un cerchio, Cusano osserva che al crescere dei lati dei poligoni isoperimetrici, attraverso quelle che egli chiama *transmutationes geometrices*, il cerchio inscritto e quello circoscritto finiscono per coincidere con la circonferenza, considerata come un poligono di un numero infinito di lati (e angoli). Di questa il cardinale cerca di calcolare il raggio come quella grandezza in cui la serie delle grandezze corrispondenti agli apotemi dei poligoni isoperimetrici di un numero sempre maggiore di lati e la serie, opposta alla prima, delle grandezze decrescenti corrispondenti ai raggi degli stessi poligoni, pervengono al loro punto di coincidenza[19]. In questo modo, percorrendo illimitatamente il finito, le figure, trapassando l'una nell'altra, entrano in una circolazione infinita, in cui il triangolo (la figura geometrica con il minor numero di lati e angoli) viene a coincidere con il cerchio (la figura geometrica con il numero infinito di lati e angoli), che complica in sé tutte le figure[20]. Dunque, attraverso un processo di infinita approssimazione asintotica, si giunge alla quadratura del cerchio o, per meglio dire, a una sorta di circolazione del quadrato[21].

Non possiamo sapere se e quanto Cusano potesse, se pur indirettamente, essere a conoscenza dei precedenti indiani del suo metodo (anche se è certo che il suo corrispondente Georg von Peurbach (1423–1461) conosceva il valore indiano di $\pi = \sqrt{10}$)[22]; certamente

[16] Cfr. Hofmann e Hofmann 1980, Einführung.
[17] È il termine usato da Cantor 1894–1908, II, 187.
[18] Cfr. Cantor 1894–1908, II, 208. Cfr. Sfez 2005.
[19] Per un'analisi dettagliata dei procedimenti matematici impiegati da Cusano nella quadratura del cerchio, cfr. De Bernart 1999; Nagel 1984.
[20] Il cerchio infinito è utilizzato da Cusano come simbolo dell'unità infinita del massimo, in quanto «il cerchio è la figura perfetta dell'unità e della semplicità» (Cusanus 1972a, I, 21, 63, 5). Cfr. anche Cusanus 1972a, 64. Per questa ida Hofmann rinvia a Boethius 1867, II, 30, 121, 20ss. Cfr. anche Volkmann-Schluck 1984, 42. Nella stessa scia, l'immagine della sfera, in quanto «ultima perfectio figurarum, qua maior non est» (Cusanus 1972a, XXIII, 71, 3–5), viene ad essere la rappresentazione più perfetta di Dio inteso come massimo assoluto e può essere ricondotta alla seconda sentenza del Liber XXIV philosophorum («Deus e st sphaera infinita cuius centrum est ubique, circumferentia nusquam»), che Eckhart riporta nei suoi scritti, scritti posseduti e fittamente annotati dal Cusano (Cod. Cus. 21). Cfr. Eckhart 1964, 95; Wackerzapp 1962, 140; Murawski 2016, 97–110. Sul simbolo della sfera infinita, cfr. Mahnke 1937, spec. 48ss. Blumenberg 1960, 159ss.
[21] Cfr. Cürsgen 2007.
[22] Cantor 1894–1908, II–559.

a quel tempo la matematica dell'Occidente latino derivava dalla mediazione operata dalla cultura araba sui testi di scienza e di filosofia greche e, soprattutto nel campo della trigonometria, il sapere arabo era largamente debitore di quello indiano. Detto ciò, è probabile che il particolare metodo di archificazione attraverso poligoni isoperimetrici seguito da Cusano sia stato influenzato dai riferimenti presenti nella *Geometria speculativa* di Bradwardine e dal trattato di Zenodoro (vissuto forse alla fine fine del sec. II a. C.), *Sulle figure isoperimetriche*[23].

Non va neanche trascurata in proposito l'influenza che può avere esercitato su Cusano l'*Ars magna* di Lullo: oltre che ad aver potuto indirizzare Cusano verso il metodo degli isoperimetri, la matematica "empirica" di Lullo (presente nell'*Ars magna* e sviluppata nel *De quadratura et triangulatura circuili* e nel *Liber de nova geometria)*[24], pur costituendo un episodio del tutto insignificante sul piano propriamente scientifico, poteva avergli suggerito un approccio al problema della quadratura del cerchio che faceva leva sul presupposto che all'interno della realtà vi fosse il principio divino della sua strumentalizzazione e quindi della "manipolabilità" mentale delle strutture concettuali in funzione del conseguimento di una verità teologica[25].

Questo approccio, sostanzialmente diverso rispetto alla rigida impalcatura assiomatico–deduttiva della scienza greca, pur essendo meno rigoroso, doveva apparire più duttile e funzionale allo scopo che Cusano intendeva perseguire, ossia l'«adaequatio recti et curvae», perché permetteva di muovere, di «transmutare» le figure l'una nell'altra fino a farle coincidere all'interno di uno spazio mobile, concepito come luogo di grandezze tanto rettilinee quanto curvilinee, di rapporti sia razionali sia irrazionali.

In questo modo, attraverso la riproposizione del punto di vista banausico e non rigoroso dell'archificazione, il principio della *coincidentia* conferiva alla dimensione pratica della geometria una nuova rilevanza teorica.

3.3 Dimensione pratica e dimensione teorica della geometria

Dalla lettura degli *Scripta mathematica* emerge un dato di importanza capitale ai fini di un'analisi attenta della portata storica degli scritti matematici di Cusano. Le costruzioni cusaniane condotte secondo il procedimento dell'archificazione si configurano come tentativi di considerare nuovi punti di vista sul problema della quadratura del cerchio; emerge una nuova dimensione, quella della geometria pratica, in cui, nonostante la mancanza delle appropriate tecniche algebriche e geometriche che consentiranno nei secoli a venire lo sviluppo rigoroso di quei punti di vista, si esprimono una forza di immaginazione e una precisione di pensiero destinati a incidere non poco sulla problematica filosofico-scientifica dei tempi successivi.

Va anche sottolineato che, nei medesimi anni in cui si dedica agli scritti matematici, Cusano scrive il *De staticis experimentis* (1450), in cui propone un metodo empirico di quadratura del cerchio. Nel quarto dei dialoghi dell'*Idiota*, il rapporto approssimativo tra il cerchio e il quadrato viene calcolato sperimentalmente con l'uso della bilancia[26].

---

[23] Cfr. Hofmann e Hofmann 1980, XI–XVIII.

[24] Cfr. Hofmann 1942.

[25] Questo interesse può spiegare perché Cusano si fosse applicato, a un certo punto della sua formazione, a trascrivere, di proprio pugno, il manoscritto lulliano *De quadratura et triangulatura circuli*. Cfr. l'introduzione di questo testo.

[26] «se si costruirà un vaso cilindrico di diametro ed altezza note ed un altro cubico del medesimo diametro e della stessa altezza, e si peserà l'acqua di cui sono stati riempiti, mediante la diversità dei pesi si troverà la

Per evidenziare la nuova prospettiva filosofica di Cusano, bisogna tenere presente, come ben sottolinea Luciana De Bernart[27], che, nella concezione della matematica del Medioevo – già presente in Boezio[28] e che Cusano eredita –, due sono gli aspetti predominanti: quello di derivazione "platonica" del suo rapporto con la teologia; e quello (apparentemente opposto) della sua applicabilità a problemi di misurazione, mentre scarsissimo era l'interesse per la matematica come struttura logica. Proprio questo secondo aspetto si era andato notevolmente sviluppando sia fuori che dentro le scuole nel XIII e XIV secolo, fino ad arrivare agli studi sulle proporzioni del movimento, sulle teorie di intensione (*intensio*) e remissione (*remissio*) delle forme, del minimo e del massimo proporzionale, temi che il cardinale mostra di conoscere bene nei suoi scritti[29], perché ampiamenti discussi nell'ambiente scientifico di Padova, in particolare da Biagio Pelacani e Prosdocimo. E se è vero che Cusano non parla mai di *geometria pratica*, né di *geometria speculativa*, è indubbio che conoscesse l'opera di Bradwardine e che da essa abbia tratto non pochi spunti[30].

Tuttavia, mentre nell'ambiente padovano queste teorie erano state sviluppate in senso strettamente matematico o nella *philosophia naturalis*, Cusano le elabora in direzione teologica, secondo una tradizione già inaugurata dalle scuole ispirate alle ultime dottrine di Duns Scoto, Ockham, Marsilius d'Inghen (ca.1340–1396). Cusano realizza un'inedita saldatura tra i due aspetti della riflessione medievale e conferisce una rilevanza teorica alle ricerche pratico–geometriche, che vengono ora a configurarsi come tentativi di "applicazione" al mondo sensibile della verità del superiore principio della *coincidentia oppositorum*.

Cusano opera dunque una sorta di inversione di rotta, anzi un vero e proprio rovesciamento, del tradizionale rapporto instaurato nel Medioevo tra geometria pratica e geometria speculativa: quest'ultima diventa ora non il mezzo, bensì il fine (e l'origine) della prima e la geometria, nella sua dimensione pratico–costruttiva, trova ora la sua legittimità in sede teorica, facendo uscire quest'ultima dai margini del modello assiomatico–costruttivo della geometria classica.

3.4 Lo spazio come luogo della mente

Un aspetto originale della dimensione concettuale entro cui si muove Cusano è l'idea di uno spazio "malleabile", di una spazialità dotata di una fluidità intrinseca, che consente all'immaginazione di far tendere le determinazioni oppositive della *ratio* verso il punto metafisico (teologico) della loro coincidenza[31].

Tale "fluidità" deriva dal fatto che, per Cusano, lo spazio geometrico è un prodotto della mente umana e, in quanto prodotto, può essere non solo misurato, ma anche, in qualche modo, manipolato. Se, infatti, è vero che lo spazio geometrico (mentale) e lo spazio fisico (reale) non corrispondono perché non derivano dallo stesso autore, è altrettanto vero che tanto l'autore (umano) dello spazio geometrico, quanto l'autore (divino) dello spazio fisico hanno la medesima potenza creatrice: questo di un infinito Uno assoluto, quello dei

---

proporzione tra il quadrato inscritto ed il cerchio in cui è inscritto e quindi, con una congettura approssimata (*propinqua coniectura*), si troverà la quadratura del cerchio» (Cusanus 1983c, 138). Cfr. Estrada 2008, 135–146.

[27] Cfr. De Bernart 2002b, 31ss; Bredow 1977, 103–115.

[28] Cfr. Folkerts 1970.

[29] Cfr. Clagett 1968; Cusanus 2010e, 10; Cusanus 2010f, 7; Hofmann e Hofmann 1980, nota 6, 234.

[30] Cfr. Hofmann e Hofmann 1980, XI–XII.

[31] Sul nesso teologia e matematica, cfr. Cfr. Cusanus 1994, spec. II, III; Cusanus 2010d, 1; Böhlandt 2009; Cassirer 1927, 70; Counet 2005, 273–290.

rapporti seriali, ossia di proporzioni continue attraverso cui le opposizioni dello spazio mentale tendono verso l'unità metrica[32]. Certamente, e Cusano lo dice espressamente nel *De theologicis complementis*, l'unità, nella quale gli opposti coincidono, è il fondamento originario ed è proprio perché pre–supposto che esso può fungere da punto di tendenza della serialità[33].

La natura costruttiva – quindi dinamica e seriale – delle relazioni geometriche stabilite dal cardinale riflette a sua volta la concezione cusaniana dello spazio come il luogo della *mens* nel quale si esplica l'attività di *mensura*.[34] L'intelletto solo, in quanto uno e indivisibile – concezione che egli eredita molto probabilmente da Biagio Pelacani[35] – è in grado di stabilire rapporti proporzionali atti a far coincidere gli opposti nell'unità originaria ossia nell'uguaglianza assoluta. Proprio perché è *proportio* o *ratio aequalitatis*,[36] ossia una unità uguale a se stessa, identità indivisibile, la mente può *mensurare*, ossia stabilire rapporti di proporzionalità continua verso l'unità, nella quale «non nisi aequalitas videtur»[37].

---

[32] «dal momento che la mente umana, alta similitudine di Dio, partecipa, per quanto le è possibile, della facoltà della natura creatrice, essa tare da se stessa, quale immagine della forma onnipotente, gli enti di ragione a somiglianza degli enti reali» (Cusanus 1972b, I, 1, 5). Cfr. anche Cusanus 1983a, 6, 88, 19–20; Hopkins 2002, 13–29.

[33] Cfr. Flasch 1973; Nicolle 2002, 85–88. Unità e punto non coincidono esattamente, ma vi è una corrispondenza tra serie numeriche e figure geometriche. A differenza del punto, che, in quanto complicazione della linea (cfr. Cusanus 1988a, I, 10, 10), è la più piccola non–grandezza iniziale da cui si generano tutte le grandezze: linee, superfici e figure solide («Quantitas, quae non potest esse minor, non est quantitas, sed punctus» (Cusanus 2010g, 14, 10–11), l'unità non ha posizione perché è immateriale: «omnis autem numerus ab uno est, in quo complicatur. Sicut igitur ex puncto fluit linea, ita ab uno numerus» (cfr. Cusanus 1994, IX, 44–45). E ancora: «unitas igitur, sine qua numerus non numerus esset, est in pluraliatem et hoc quidem est unitatem explicare, omnia scilicet in pluralitate esse» (Cusanus 1972a, II, 3). È evidente l'influenza del *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide* di Proclo, secondo il quale l'unità, per la sua semplicità e indivisibilità, è più perfetta del punto e precede il punto. Dall'uno derivano tutti i numeri, fungendo da unità di misura di tutte le grandezze intermedie: cfr. Proclus 1873. Il testo greco verrà stampato nel 1533 a Basel, da Simon Grynaeus, e la traduzione latina si avrà per opera di Francesco Barozzi (1537–1604) solo nel 1560, dopo quasi un secolo dalla morte di Cusano, che chiaramente attinse anche ad altri manoscritti. É tuttavia indubbio che copie manoscritte di Proclo circolassero nel XV secolo e sappiamo anche che Bessarione, a cui Cusano era legato, possedeva molte copie. Di conseguenza, nulla vietata a Cusano l'accesso al *Commentarius* nella versione greca, o che qualcuno abbia potuto tradurlo per lui. Come scrive Eisenkopf 2005, 225: «Proklos wird von Cusanus in Verbindung mit der Zahl nicht explizit erwähnt, da er diesen aber aufmerksam rezipierte und Proklos an die pythagoreische Zahlenspekulation genauso anknüpfte wie er die Überlegungen Euklids kommentierte und systematisierte, ist auch er als wichtige Quelle des cusanischen Denkens anzusehen. Dies zeigt aber auch, dass die Quellen, auf die sich Cusanus bezieht, aus zweiter und dritter Hand stammen und exakte Zuordnungen im einzelnen schwierig sein dürften». Cfr. anche Carratelli 1998, 201–225.

[34] Cfr. Cusanus 1983a, I, 63; Cusanus 1988b, 6, 1ss. Cusanus 2007, CLXX, 3, 13–17: «Illa ‹anima› mensurat, dividit et componit et numerat. Illa facit ex se mensuras, et vocatur mens a mensurando». L'etimologia che connette *mens* con *mensurare* deriva molto probabilmente da Alberto Magno (ca. 1206–1280). Cfr. Magnus 1972, I, 31, XXXVII, pars I, 16b, 63ss. che Cusano cita in un sermone (Cusanus 2007, CLXXIV, 12, 1–6). Cfr. anche Aquinas 1975–1976, q. 10, art. 1, 210ss.

[35] Cfr. Vescovini 2005a, 238–239; Rignani 2005, 247–266.

[36] Per primo Thomas Bradwardine, nel *Tractatus de proportionibus* del 1328, nota che nel concetto di proporzione di uguaglianza (*proportio* o *ratio aequalitatis*) «nessun rapporto è maggiore o minore di un rapporto di uguaglianza». Da ciò deriva la nozione di verità come *praecisio*, concetto che viene sviluppato da Biagio Pelacani, in particolare nel suo *Commento al Trattato sulle proporzioni*, «per dimostrare, in termini matematici, la natura indivisibile dell'intelletto»: la *proportio aequalitatis*, espressa dalla proporzione 1 : 1, è per Biagio un'unità che è in proporzione di uguaglianza solo con se stessa, il rapporto dell'uno con se stesso; tale concetto indica un'unità intellettuale identica solo a se stessa, un punto matematico indivisibile: l'indivisibile, infatti, non è né uguale né disuguale rispetto a nessuna cosa, essendo identico a sé stesso.

[37] «sebbene l'unità debba essere considerata come il padre dell'uguaglianza , in quanto l'uguaglianza è

Come «il numero non dipende dalle cose numerate»[38], così le rappresentazioni/costruzioni non dipendono dalle figure rappresentate, bensì dall'attività dell'intelletto.

Il concetto chiave espresso nel *De docta ignorantia* per cui la *transumptio ad infinitum* è possibile grazie al processo "aggiuntivo" di infinitizzazione dello spazio geometrico attuato dalla mente umana, è ripreso nell'*Idiota de mente*, del 1450, opera scritta nello stesso periodo di composizione del *De circuli quadratura*, in cui Cusano scrive che «… mentem esse ex qua omnium rerum terminus et mensura»[39].

La mente umana, simile alla mente divina[40], è una forza essenzialmente creativa, progettuale, che produce "da sé" i contenuti – in se sempre congetturali – del suo sapere[41]. Tali contenuti, ossia le nozioni, i concetti e le operazioni con i quali la mente cerca di quadrare il cerchio, la mente li trae, li dispiega e li sviluppa a partire da se stessa perché ad essa pre–disposti, e, in quanto tali, assimilabili[42].

Più che l'attitudine, comune a molti esponenti della tradizione neoplatonica da Proclo in poi, ad assumere gli enti e le relazioni matematici come espressioni simboliche di verità trascendenti il piano razionale[43], a rendere "moderno" il pensiero di Cusano è la centralità del dinamismo creatore dello spirito umano, con cui Cusano cerca – in qualche modo – di superare la sproporzione tra finito e infinito, facendo coincidere gli opposti[44].

---

l'unità presa una sola volta […], tuttavia l'uguaglianza assoluta complica in sé l'unità[…] Nell'unità, in effetti, non si vede che l'uguaglianza» (Cusanus 2001, 28, 20–25).

[38] Cfr. Cusanus 2001, 25, 20.

[39] Cusanus 1983a, I, 57. Ancora, nel *De venatione sapientiae*, Cusano scrive: «La mente umana, che è un'immagine della mente assoluta e che è libera secondo il modo che è proprio dell'uomo, pone nei suoi concetti limiti a tutte le cose […] E qualunque cosa si propone di fare, la mente la determina prima dentro di sé, ed è pertanto il limite di tutte le sue opere. Inoltre, tutte le cose che essa fa non la delimitano al punto che essa non possa farne di più, per cui essa è, a modo suo, un limite senza limite. Su questo argomento ho scritto nel mio libro *De mente*» (Cusanus 1982, XXVII, 82, 13–20).

[40] L'analogia tra l'attività creatrice della *mens divina* e quella della *mens humana* e il tema dell'assimilazione sono un tema di fondo del pensiero di Cusano e ricorre costantemente in tutti i suoi scritti. Cfr. Cusanus 1983a, I, 72, 6–9; Cusanus 1988b, 6, 2–5; Cusanus 1972b, I, 1, 5, 3–10; Cusanus 1988a, II, 93, 17. Molte chiare sono le parole espresse nel *De venatione sapientiae*: «dato che la conoscenza è assimilazione, l'intelletto trova tutte le cose in se stesso come in uno specchio vivo dotato di vita intellettuale; e quando guarda dentro se stesso, vede in se stesso tutte le cose assimilate. E questa assimilazione è un'immagine viva del creatore e di tutte le cose» (Cusanus 1982, XVII, 50, 1–5). Cfr. Kremer 2004, 1–49; Schwaetzer 2005, 113–132.

[41] Cfr. Cusanus 1972a, I, 5, 14, 18–20; Cusanus 1972b, I, 1, 5, 4–7; II, 17, 178, 3–7; Cusanus 1988b, 7, 2–5; 56, 57; Cusanus 1988a, II, 93, 1–18; Cusanus 1973, 43, 7–13; Cusanus 1983a, I, 70, 2; 97, 2; 98, 10; 104, 2; 157, 13. In tutti i passi citati Cusano sottolinea il carattere spontaneo e attivo della mente umana, che trae da sé («a se exserit») gli enti matematici, i numeri e le forme delle cose.

[42] Da questo punto di vista è significativo, come sottolinea Van Velthoven 1977, 97–98, che Cusano attribuisca all'uomo la creatività, un termine che nella teologia medioevale, è riservato esclusivamente a Dio. Cfr. Aquinas 1918, 1926, 1930, II, 21, 98–99: *Quod solius Dei est creare*: «creatio est propria Dei actio […] Nulla igitur substantia praeter Deum potes aliquid creare». Un'analisi dettagliata della *mens* in Cusano è svolta da Leinkauf 2006. Va qui sottolineato, come ha messo ben in rilievo Joseph Stallmach, che: «Wenn also der Geist als *Geist* durch *schöpferische Spontaneität* gekennzeichnet ist, so der endliche Geist als *endlicher* gerade durch den *assimilativen und konformativen Charakter* eben dieser schöpferischen Tätigkeit. Sein Begreifen ist *entium assimilatio* so wie das göttliche *entium creatio* ist. Der menschliche Geist hat seine eigene Welt, sein eigenes Universum, aber dieses ist eine *universitas assimilationis rerum*» (Stallmach 1967, 50–54, cit. 52).

[43] Le parole pronunciate da Proclo nella *Teologia platonica* circa «l'attitudine ad elevare propria del numero» (Proclus 2005, IV, 34, 16–23, trad. 599) sembrano quasi riecheggiare nell'*incipit* del *De circuli quadratura*, in cui Cusano esordisce dicendo: «All'inizio ti ho invitato a passare da queste matematiche alla teologia attraverso la via dell'assimilazione; questo, infatti, è il modo più adatto di elevarsi» (Cusanus 2010c, 28ss.).

[44] Cfr. Oberrauch 1993a.

Il problema matematico della quadratura del cerchio ha una natura paradossale perché illumina la mente della sua costitutiva opacità. La mente umana, confrontandosi con il problema della quadratura del cerchio, diventa consapevole che: 1. il suo ragionare è sempre oppositivo[45]; 2. è essa stessa il principio d'unità di quelle opposizioni.

La ragione contraddice in un certo senso il proprio *modus operandi*: più tenta di elevarsi alla semplice unità in cui gli opposti non sono opposti, più diventa consapevole della sua impotenza e del suo legame necessario e imprescindibile con il mondo dell'alterità, trasportando così la divisione e l'opposizione dentro se stessa[46]. Tuttavia, proprio perché ha il potere («posse») di far coincidere gli opposti, ossia di tendere all'*aequalitas*, la mente assomiglia a dio. Una somiglianza che certamente non concerne i suoi prodotti, inevitabilmente destinati alla *propinquitas* e alla *impraecisio*, ma la sua capacità di costruire strumenti e determinare procedimenti (*proportiones continuae*) adeguati a far coincidere ciò che alla ragione appare come incommensurabile (quadrato/ cerchio; retto/ curvo) attraverso la logica eminentemente 'seriale' di mediazione degli «opposti» geometrici.

La matematica, mostrando (alla ragione che la utilizza) l'impossibilità di pervenire all'*absoluta praecisio*, costituisce, per così dire, la condizione della possibilità di questa impossibilità; le ingegnose *trasmutationes geometrices* attraverso le quali Cusano cerca instancabilmente di giungere alla perfezione matematica, cioè alla quadratura del cerchio, dimostrano l'impossibilità di dimostrare la quadratura del cerchio perché *l'aequalitas*, nella quale gli opposti coincidono, è visibile solo trascendendo qualsiasi *comparativa proportio*: «cum inter illas quantitates adeo contraria forte non cadat numerabilis habitudo. Necesse erit igitur me recurrere ad visum intellectualem»[47].

3.5 Le fonti

Come abbiamo già evidenziato, le questioni relative alla quadratura del cerchio e alla rettificazione del cerchio non sono argomenti nuovi tra gli intellettuali del tempo: la maggior parte dei matematici del tempo s'interessa al metodo delle figure isoperimetriche[48], uno su tutti, Raimondo Lullo, il quale, nella *Geometria Nova* e, in particolare, nel *De quadratura et triangulatura circuli*[49], tenta di risolvere la questione della quadratura del cerchio.

Il discorso sulle fonti è molto ampio e qui ci limiteremo a fare brevi accenni su alcuni autori a cui Cusano si ispira per le sue riflessioni sulla matematica[50]: da Anselmo d'Aosta (ca. 1033–1109) Cusano, come egli stesso afferma, desume l'esempio della *rectitudo*, ossia della linea retta, *aenigma* che ritrovava anche in Alberto Magno (ca. 1200–1280)[51], come apprendiamo dal *De beryllo*; nel *De sigillo aeternitatis* del suo amico e maestro Eimerico da Campo[52] (opera, posseduta dal Cusano e conservata ancora oggi nel *Cod. Cus.* foll.

---

[45] «In Metaphysica autem dicit curvum et rectum in natura contrariari, quare unum non posse converti in aliud» (Cusanus 1988c, XXVIII, 45). Nella stessa scia, Vengeon 2006, 222: «...selon lui, l'impossibilité de la quadrature du cercle équivaut à l'expression géométrique du principe de non contradiction».

[46] Cfr. Cuozzo 2002, 47ss.; Cusanus 2010h, 25–30. In questo senso si può dire che la ragione ha una natura paradossale in quanto è essa stessa la condizione di possibilità dell'impossibilità di cogliere l'infinito. Sul tema cfr. De Felice 2019, 61–76.

[47] Cfr. Cusanus 2010d, 2–3. Cfr. Cusanus 1994, II–III.

[48] Cfr. Gericke 1982, 160–187; Di Meglio 2010, 15–21.

[49] Cfr. Hofmann 1942, 21–37.

[50] Cfr. Flasch 2008; Nicolle 1998, 128–150.

[51] Cfr. Haubst 1952b, 420–447.

[52] Cfr. De Campo 2001a, 93–128 e De Campo 2001b, 129–168.

106 s, 77^r), Cusano trova l'esempio del triangolo infinito come espressione del massimo e l'immagine del cerchio con il triangolo inscritto e i raggi che partono dal centro[53].

Sebbene non vi siano riferimenti espliciti negli *Scritti matematici*, sono molte le fonti che influenzano la filosofia matematica di Cusano, tra questi Plotino e Proclo, specie nella concezione generale della matematica come *medium* tra infinito e finito, e Boezio nell'idea della sproporzione tra finito e infinito, nonché dell'infinito potenziale del numero come modello per la ragione. Da Boezio Cusano riprende soprattutto la teoria delle mediazioni, delle proporzioni continue, che Cusano descrive in termini di *medietas dupla*, come i mezzi attraverso cui è possibile convergere tutte le disuguaglianze nel principio di uguaglianza da cui esse derivano. Ma, sebbene Boezio nelle *Istitutiones arithmeticae*[54] fornisca gli algoritmi per calcolare le incognite del rapporto, non sembra che Cusano ne tragga profitto. Cusano riprende solo l'idea che attraverso le proporzioni continue si può (ri)salire la scala dei numeri: egli non usa mai i numeri (solo un calcolo nella *Quadratura circuli*, che, tuttavia, non porta lontano) sia perché non aveva dimestichezza con i numeri, sia perché la quadratura del cerchio non avrebbe portato alla determinazione di un rapporto esprimibile attraverso i numeri interi.

Se gli autori appena citati, insieme a molti altri che qui non possiamo analizzare (tra questi, Dionigi, Alberto Magno e Master Eckart), possono essere considerati le fonti della filosofia della matematica di Cusano[55], diverso è il discorso da farsi circa le fonti strettamente scientifiche del pensiero cusaniano. È molto difficile stabilire con precisione la lista delle opere possedute e consultate dal cardinale. Dalle citazioni esplicite nelle sue opere, si nota che i riferimenti sono rari e riguardano i *veteres* e mai i matematici a lui contemporanei. Si trovano citazioni delle opere dei matematici greci, soprattutto Euclide (*Elementi*, VI, 9) e Archimede (*La misura del cerchio* e *Le spirali)*, ma i riferimenti sono sempre standardizzati e sporadici: è come se fosse un passaggio dovuto all'interno di un'operazione di volgarizzazione della matematica antica piuttosto che il frutto di una lettura diretta delle opere originali. Così sembra che egli legga Euclide attraverso il già citato *Commento* di Proclo, il *Commento agli Elementi di Euclide* di Campano da Novara (Johannes Campanus) (1255–1259)[56] e la *Geometria speculativa* di Bradwardine[57], di cui era noto anche il *Tractatus de proportionibus* (1328)[58]; e Archimede attraverso il *De*

[53] Cfr. Haubst 1952a, 255ss.; Rusconi 2008, 59–70. Per quel che concerne l'influenza lulliana e il ruolo di mediazione svolto da Eimerico, cfr. Hofmann 1942, 21–37; Colomer 1964, 198–213; Colomer 1961; Vescovini 2005b, 139–154; Calma e Imbach 2009, 15–51; Imbach 2011.

[54] Cfr. Boethius 1867, 2, 50, 7–12.

[55] Oltre a quelli citati, di particolare interesse sono gli studi di Vansteenberghe 1928, 275–284 e di Vescovini 1997, 393–413 e 1983, 661–684, che mettono in luce l'origine ermetica della matematica di Cusano, impostando le basi per un confronto tra l'opera del cardinale e quella di Bonaventura di Bagnoregio (ca. 1217–1274).

[56] La versione latina degli *Elementi* di Euclide, realizzata da Campano dall'arabo, probabilmente elaborata sulla base della traduzione in latino di Adelardo di Bath (XII sec.), viene pubblicata da Ehrard Ratdolt a Venezia nel 1482 e costituisce la prima edizione stampata di Euclide. In seguito Simon Grynaeus curerà *l'editio princeps* in greco nel 1533, alla quale aggiungerà il testo greco del Commento al I libro di Proclo. Nel frattempo appariranno due edizioni latine ad opera di Bartolomeo Zamberti (ca. 1473–ca.1543) nel 1505 e di Luca Pacioli nel 1509 che si richiamano rispettivamente alla tradizione greca di Teone di Alessandria (commentatore di Euclide vissuto nel IV secolo) e alla tradizione latina di Campano. Un'edizione comparata delle due traduzioni latine verrà pubblicata da Jacques Lefèvre d'Etaples a Parigi nel 1516. Cfr. Crapulli 1969, 14–15. Cfr. Kästner 1796–1800, 289–299; Weissenborn 1882, 1–7; Heath 1926, I–92ss.

[57] Di questo testo, così come dell'*Arithmetica speculativa*, non abbiamo notizie certe sulla data di pubblicazione. Cfr. Bradwardine 1495b, 115–120.

[58] Cfr. Bradwardine 1328, 64–140.

Arte mensurandi di Johannes de Muris (ca. 1290–ca. 1351)[59] o il *De curvis superficiebus archimenidis* di Johannes De Tinemue (vissuto agli inizi del XIII secolo). Tuttavia, è indubbio che Cusano vede Archimede come il punto di riferimento, il maestro che si intende superare; questi, infatti, all'interno delle opere matematiche, è molto più presente di Euclide, il quale sembra piuttosto un richiamo standardizzato.

L'impressionante inventario della biblioteca di Cusano conservata a Kues realizzato agli inizi del Novecento da Joseph Marx[60] è inevitabilmente incompleto e a volte impreciso: una delle difficoltà è che ciascun volume rilegato contiene più opere i cui titoli non sono facilmente reperibili. D'altra parte questa biblioteca è stata largamente ampliata dopo la morte del suo fondatore, ma manca ancora un indice dei testi e il fatto che lo stesso Marx non abbia rilevato alcun titolo di Archimede o Euclide o Plotino fa pensare che questa non fosse "La" biblioteca di Cusano. Delle fonti arabe si trova qualche titolo nell'inventario, ma niente indica che Cusano ne abbia preso visione. Non c'è nelle opere matematiche alcun riferimento esplicito agli arabi, e nemmeno ad Al-Khwarizmi (ca. 780–ca. 850), sebbene sia evidente l'influsso della tradizione araba nell'uso di una certa terminologia utilizzata da Cusano, nonché nell'uso del metodo di archificazione[61]. Non si trovano nemmeno testi in ebraico. Le fonti matematiche di Cusano sono esclusivamente latine. Tra queste si può annoverare il già citato Johannes de Muris, il quale amplia le conoscenze del *Quadrivium* attraverso vari scritti, tra cui il *De arte Mensurandi*, commentate a Padova da Prosdocimo di Beldomandi[62]. Come scrive Graziella Federici Vescovini, «Prosdocimo fu l'anello di congiunzione tra l'insegnamento di Biagio da Parma e Nicola Cusano»[63].

Certamente Biagio Pelacani, maestro di Prosdocimo, aveva lavorato molto in direzione di la teorizzazione di un'epistemologia di tipo matematico, secondo cui la verità *ex suis terminis* si basa sul concetto di *precisio* e scaturisce dalla nozione di *ratio aequalitatis*, e può essere colta solo dalle scienze matematiche.

Un'altra fonte è Nicola d'Oresme. Molti argomenti e figure utilizzate da Cusano nel *De una recti curvique mensura* e nella seconda parte del *De mathematicis complementis* presentano palesi affinità con il *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* del matematico francese. Tuttavia, la precipitazione con la quale Cusano redige la seconda parte dell'opera matematica più lunga e la densità dei riferimenti impliciti a Oresme suggeriscono una lettura rapida del *Trattato* di Oresme da parte di Cusano. Oltre a questi indizi, negli scritti dei 1453–1454 non si trovano ulteriori tracce di un'influenza del matematico francese[64].

3.6 *Cusanus… geometra ridiculus?* La recezione degli scritti matematici

Visti i numerosi e importanti legami di Cusano con i vari esponenti della cultura del tempo, è certo che i manoscritti matematici, composti tra il 1445 e il 1459, circolano da subito tra le persone con cui il cardinale può e sa di potersi confrontare riguardo a specifici argomenti, tra cui Toscanelli e Peurbach. Quando poi vengono pubblicati, gli scritti cusaniani si diffondono ancor più rapidamente, offrendo ai matematici del tempo un ricco materiale su cui riflettere. Il dibattito inizia ben presto visto che le due opere maggiori, il

[59] Cfr. De Muris 1998.
[60] Cfr. Marx 1905.
[61] Stuloff 1964, 420–436.
[62] Cfr. Santinello 1983, 71–84; Vescovini 2002, 93–113; Favaro 1879; Belloni 1986.
[63] Vescovini 2005b, 223–240, cit. 230.
[64] Cfr. Clagett 1968.

De mathematicis complementis del 1453–1454 e il *De mathematica perfectione* del 1458, sono pubblicate nell'edizione strasburghese delle opere di Cusano del 1488 e in quella milanese del 1502; a queste si aggiungono, nell'edizione parigina curata da Lefevre d'Étaples del 1514, il *De geometricis transmutationibus* e il *De aritmeticis complementis* (entrambi del 1445).

Nel 1533 viene pubblicato a Norimberga, ad opera di Johannes Schöner (1477–1547), un'opera (composta in realtà nel 1464) che segna la nascita della trigonometria moderna, ossia il *De triangulis omnimodis* di Regiomontanus, pseudonimo di Johannes Müller da Königsberg (1436–1476).

Schöner non si limita a stampare il testo. In appendice a esso pubblica alcuni scritti di Cusano sulla quadratura del cerchio e la rettificazione della curva, più precisamente il *De circuli quadratura* del 1450 (che, insieme al capitoletto che l'accompagna nell'edizione norimberghese col titolo *De sinibus et cordis*, costituisce un abbozzo successivamente sviluppato nel primo libro del *De mathematicis complementis*[65]); il *Dialogus de circuli quadratura*, contenente una conversazione fra Toscanelli e il cardinale; una lettera di Toscanelli a Cusano che riporta una fondamentale obiezione al *De mathematicis complementis* e inopinatamente annessa da Schöner agli scritti di Cusano[66]; il testo *Declaratio rectilineationis curvae*, rivolto a Peurbach con l'intenzione di chiarire alcuni punti sempre del *De mathematicis complementis*, e infine il *De una recti curvique mensura*, anch'esso da considerare come un lavoro preparatorio alla stesura del *De mathematicis complementis*[67].

Questi scritti erano stati inviati da Cusano al suo amico Georg von Peurbach e, attraverso questi, erano pervenuti all'allievo di Peurbach, appunto Regiomontano.

Schöner, rinvenendo tra le carte di Regiomontano questi scritti, decide non solo di pubblicarli, ma di farli seguire, a loro volta, da altri lavori sempre di Regiomontano dedicati all'esame e alla confutazione del procedimento utilizzato da Cusano nei suoi scritti.

Quest'edizione norimberghese è molto importante perché, pur comprendendo solo un'esigua parte dell'opera matematica cusaniana, dà conto del metodo di Cusano e documenta le obiezioni ad esso mosse da matematici specialisti come Toscanelli[68] e, soprattutto, Regiomontano. E tuttavia, questa edizione del 1533 non aggiunge molto alle informazioni che sul metodo cusaniano si potevano trarre dalle opere maggiori, in particolare dal *De mathematicis complementis*, opera rispetto a cui, come si è detto, gli scritti compresi nell'edizione norimberghese costituiscono per lo più dei lavori preparatori[69]. Dunque, già prima di – e indipendentemente da – l'edizione del 1533, le due opere maggiori del cardinale sono presenti, circolano e fanno discutere i cultori della matematica degli ultimi anni del XV e della prima metà – e oltre – del XVI secolo[70].

Nel dialogo *De quadratura circuli secundum Nicolaum Cusensem* (composto nel 1464)[71] Regiomontano definisce infondati i calcoli «lulliani» di Cusano, il novello geo-

---

[65] Cfr. Hofmann e Hofmann 1980, XXXI, nota 15, 212. Cfr. Regiomontanus 1533, 13–21.

[66] Cfr. Hofmann e Hofmann 1980, XXXII.

[67] Cfr.Hofmann e Hofmann 1980, XXXV, nota 1, 237; nota 8, 239.

[68] Cfr. Cusanus 2010f, 229–232; Sambin 1979, 141–145.

[69] Solo nel 1565 si procedette a scorporare gli scritti cusaniani dell'edizione norimberghese dalla critica di Regiomontano e a comprenderli nell'edizione di Basilea. Per le informazioni sulle edizioni degli *Scritti matematici* di Cusano, cfr. Hofmann e Hofmann 1980, LI–LII.

[70] Da questo punto di vista, concordiamo con l'analisi di Luciana De Bernart, secondo cui «la risonanza dell'edizione norimberghese degli scritti di Cusano va considerata sono un episodio, anche se di estrema importanza, nel quadro dell'influenza dell'opera matematica cusaniana sul pensiero matematico successivo» (De Bernart 2002b, 38).

[71] Regiomontanus 1533, 22–28.

metra al quale «obbediscono le linee e i numeri»[72], e definisce questi come un «geometra ridiculus Archimedisque aemulus»[73]. Il *mos geometricum* delle argomentazioni di Cusano utilizzate nella quadratura del cerchio è refutato dal Regiomontano perché totalmente sprovvisto di rigore e di un'adeguata formalizzazione matematica.

Il giudizio severo di Regiomontano è mitigato da Gerolamo Cardano (1501–1576), il quale, nel suo *Encomio della Geometria*[74], pronunciato all'Accademia palatina di Milano nel 1535, tra i *recentiores* che si occupano di geometria, fa cenno a Cusano, il quale «disputò con tanta sottigliezza, che nulla si potrebbe escogitare di più acuto: tuttavia procedette in modo tale da mostrare non ciò verso cui tendeva, ma soltanto l'acume dell'ingegno, e le sue conclusioni furono per lo più false»[75]. In effetti, a dispetto delle conclusioni trionfalistiche e malgrado l'ingegnosità di cui fornisce prova, tutti i tentativi di Cusano di quadrare il cerchio approdano a un fallimento. È lo stesso Cusano ad ammettere nel *De mathematica perfectione* l'impossibilità dell'impresa sul piano della matematica razionale e la necessità di servirsi della matematica intellettuale, capace di cogliere la coincidenza degli opposti nel *minimum simplex*[76].

E ha ragione Regiomontano, e prima di lui Toscanelli, a rinvenire nell'attrezzatura concettuale del cardinale un arsenale geometrico–matematico fatto di figure più o meno immaginariamente costruite, e non di espressioni algebriche corrette.

Tuttavia, il livello delle argomentazioni cusaniane è notevole, e di queste si può comprendere la portata solo a patto di rispettarne, per quanto possibile, il decorso logico, che, per la sua peculiare natura filosofica – e non soltanto per l'inadeguatezza delle tecniche di calcolo storicamente disponibili (all'epoca non esistono il simbolismo algebrico, il metodo analitico, il concetto di funzione, definizioni precise per la trigonometria) – si presenta irriducibile ai presupposti eminentemente formali su cui si fonda la possibilità di applicare l'algebra alla geometria[77].

Non bisogna dimenticare che l'intento che anima le indagini matematiche di Cusano è quello di mostrare la sorprendente potenza del principio della coincidenza e, da questo punto di vista, la quadratura del cerchio rappresenta ai suoi occhi un caso, il più "visibile", di *coincidentia oppositorum* in atto[78]. Ed è soprattutto per questo aspetto che Giordano Bruno, ne *La cena delle ceneri* del 1584, riconoscendo nel pensatore di Kues la fonte della propria ispirazione, appella Cusano come «divino»[79], nonché, nel quinto dialogo del *De la causa, principio et Uno*, come «inventor di piú bei secreti di geometria»[80].

Negli scritti matematici di Cusano emerge la chiara consapevolezza che la condizione metodologica di possibilità del darsi della *coincidentia* non può che risiedere in una diversa impostazione geometrica, in una dimensione dello spazio come il luogo della *mens–mensura*. Certamente la nuova filosofia della mente resta irretita entro una forma eminentemente teologica di intuizione teorica che, di fatto, non permetteva di padroneggiare «la potenza insita nella serialità che tale intuizione conteneva e a sintetizzare la ri-

---

[72] Regiomontanus 1533, 27.
[73] Cfr. Hofmann e Hofmann 1980, XII–XXXII; Santinello 1971, 104.
[74] Cfr. Cardano 1663, IV.
[75] Cardano 1663, II, 443b–444a.
[76] Cfr. Counet 2005, 286–290.
[77] Da questo punto di vista, Müller parla di una doppia matematica in Cusano: una geometria aritmetica (matematica deduttiva) e una geometria speculativa (matematica induttiva), mostrando, nella scia delle analisi di Bocken 2005, 201–220, che vi è un *gap*, all'interno della riflessione cusaniana, circa il rapporto tra algebra e geometria (cfr. Müller 2010, 45–46; 76–77).
[78] Cfr. Counet 2000.
[79] Bruno 1985, 91.
[80] Bruno 1985, 335.

gidità delle determinazioni geometriche e la mobilità operativa della *mens*»[81]. E tuttavia, proprio quell'intuizione dinamica, per quanto deformata dalla poderosa immaginazione teorica del filosofo, sarà uno stimolo di notevole portata innovativa ai nuovi «Archimede» del Rinascimento[82]. Sussumendo l'intrinseco e concreto movimento dell'attività di misura all'interno della dialettica astratta della *mens*, le costruzioni di Cusano suggeriranno ai posteri molto di più di quanto non siano in grado di dimostrare[83].

Ora, se da un lato lo scritto di Regiomontano pone fra discorso filosofico e discorso matematico una barriera che sancisce l'esclusione dall'ambito della legittimità matematica, qualsiasi fattore immaginativo (che pure è indispensabile alla costruzione teorica)[84], dall'altro lato la pregnanza filosofico–concettuale dei tentativi cusaniani di quadratura del cerchio sollecitano lui e i matematici specialisti del tempo a una riflessione su nuove possibilità di sviluppo del discorso matematico, costringendoli, per così dire, a pensare nuovi approcci di tipo metrico–meccanico al problema dell'incommensurabile e nuove vie per pervenire all'aritmetizzazione della geometria[85].

Da questo punto di vista, Cusano può essere considerato un pensatore–limite che, con le sue innovazioni teoriche, anche in campo matematico, seppe, come sintetizza felicemente John Hopkins, «spalancare la porta della modernità senza però riuscire a oltrepassarne la soglia»[86].

Ancora, suggestionato dal principio lulliano di strumentalità del sapere, Cusano concepisce la mente umana in termini di «partecipazione» alla natura creativa della mente divina, il che si riflette sull'idea che la matematica non è solo *theoria*, bensì un modo per costruire i concetti necessari per comprendere il mondo, uno strumento operativo prodotto dalla mente dell'uomo per cogliere la struttura del mondo.

La stessa idea che gli oggetti matematici non esistono indipendentemente dall'intelletto umano, ma ne sono una creazione, è una concezione della matematica che sarà accettata pienamente nel mondo scientifico soltanto nel XIX sec, fermo restando che in Cusano tale creazione non è assoluta, bensì partecipativa o assimilativa dell'assoluto.

Nel *De mathematicis complementis* Cusano, dopo aver discusso l'opera con Toscanelli e Peurbach, propone un metodo di costruzione per approssimazioni successive del

[81] De Bernart 2002b, 61.

[82] Folkerts non esita a definire la matematica cusaniana come un prezioso contributo espresso, tuttavia, in una forma inadeguata: «Allerdings hat die unzureichende mathematische Form dazu geführt, daß der wertvolle Gehalt seiner mathematischen Schriften in Vergessenheit geriet. Erst im 20. Jahrhundert haben sich die Mathematikhistoriker, vor allem J. E. Hofmann, ernsthaft mit den Schriften des Cusanus beschäftigt und festgestellt, daß sich hinter seinen Formulierungen zukunft-sweisende Ideen verbergen, u. a. infinitesimale Ansätze und Vorstellungen über funktionale Abhängigkeiten. Daher kann man Cusanus als einen Wegbereiter der neuzeitliche Mathematik sehen» (Folkerts 2003, 332).

[83] La lettura dello spazio geometrico si riflette sulla concezione cusaniana del movimento, che risulta eminentemente estensiva, senza tuttavia riuscire a contemplare il fattore temporale. Come mostra De Bernart, questa mancata intuizione – presente tra l'altra già in Archimede – non permette a Cusano di tradurre in termini di uniformità la differenza dei percorsi cinematici generatori delle grandezze, il che rende praticamente impossibile portare a termine le *trasmutationes geometrices* messe in atto al fine di giungere alla quadratura del cerchio (cfr. De Bernart 2002b, 61–62).

[84] Cfr. Baldi 2007, 255–266, spec. 262–263.

[85] Cfr. Müller 2014, 86–102. Conclude sinteticamente Simon: «Hätte Cusan die theoretische Durchbildung Regiomontans besessen und wäre seine Zeit nicht durch den Dienst der Kirche und den beklagenswerten Kampf um sein Bistum Brixen so völlig in Anspruch genommen worden, Cusan stände als reiner Mathematiker eben so groß da, wie als Theosoph und mathematischer Philosoph» (Simon 1912, 128–337).

[86] Hopkins 1996, 83. Cfr. anche Gadamer 1970, 39–48; Cassirer 1920. A sottolineare la natura ambigua, persino contraddittoria, dell'opera politica, metafisica e scientifica di Cusano è Maurizi 2008, il quale, analizzando i concetti di *concordantia*, *coincidentia* e *praecisio*, vede nella filosofia di Cusano l'espressione di una ricerca provocante, capace di interrogare la modernità stessa.

raggio di un cerchio di cui è nota la circonferenza[87]. Dalla conoscenza delle relazioni tra gli elementi della serie matematica Cusano deduce le proprietà matematiche dei valori limite della serie in questione. Questa intuizione fondamentale porterà alle soglie di una nuova matematica dei limiti e rivestirà un indubbio valore, facendo da base teorica per la legittimazione del metodo numerico e della concezione dei rapporti fra grandezze in termini «funzionali», anche se l'assunto di Cusano sull'esistenza di una relazione tra raggio e superficie dei poligoni inscritti e circoscritti al cerchio è errata. Già Toscanelli gli indicherà l'errore in una lettera scritta nell'inverno del 1453–1454[88].

L'idea che il cerchio è un poligono con un numero infinito di lati sarà ripresa nella metà del Cinquecento dal monaco matematico Michael Stifel (ca. 1487–1567), il quale nell'*Arithmetica integra* del 1544 riprende anche l'idea cusaniana della connessione esistente tra progressioni aritmetiche e progressioni geometriche. La stessa idea ricompare nei *Discorsi* del 1638 di Galileo Galilei (1564–1642), il quale, peraltro, non fa alcuna menzione di Cusano[89]. Tuttavia, molti elementi indicano che egli sia influenzato dalla sua opera, e ciò vale in particolare per il concetto di 'non quantità'. Cusano difatti parla di un 'non triangolo', nel caso in cui in un triangolo l'ampiezza dell'angolo opposto alla base è progressivamente aumentata sino a 180°, in quanto in questo caso il triangolo si annulla trasformandosi in una retta. Le indagini di Cusano saranno riprese o usate in modo più o meno critico da molti autori del XVI sec. che si occuperanno del problema della quadratura del cerchio o del calcolo di π, tra i quali Oronce Finé (1494–1555) (1544), Jean Borrel o Buteus (1492–1572) (1559) e Cristophorus Clavius (1537–1612) (1604). Ludolph van Ceulen (1540–1610) sarà uno dei primi a valutare le idee di Cusano senza lasciarsi influenzare dalle critiche di Regiomontano, e ne darà un giudizio altamente positivo. Nel suo scritto *Van den Circkel* (1569), usando il metodo di Archimede dei poligoni inscritti e circoscritti a un cerchio, egli calcola il valore di π sino alla ventesima cifra decimale esatta, e successivamente sino alla trentacinquesima cifra esatta. Un giudizio critico su Cusano sarà espresso invece da Adrian van Roomen (1561–1615), un altro rappresentante della scuola matematica olandese tra il XVI e il XVII secolo. Nel suo scritto *In Archimedis circuli dimensionem expositio et analysis* (1597), oltre che criticare Cusano, egli respinge anche i calcoli errati di Oronce Finé (1494–1555), Giuseppe Giusto Scaligero (1540–1609) e Raymarus Ursus (1551–1600). Nel 1594, nella sua confutazione dell'errata quadratura del cerchio di Scaligero, François Viète (1540–1603), dimostrerà che nel *De mathematica perfectione* (1458) Cusano non fornisce una soluzione per approssimazione, bensì un limite superiore per tutte le soluzioni approssimate con l'ausilio di poligoni isoperimetrici: $r \lesssim (2r_n + \rho_n)/3$, dove r_n e ρ_n sono i raggi di una successione di poligoni regolari inscritti e circoscritti al cerchio, isoperimetrici a un cerchio di raggio r[90].

È inoltre evidente l'influenza che le sue riflessione eserciteranno su alcuni pensatori del Cinquecento, ad esempio sul cusaniano Charles De Bouelles (ca. 1475–ca. 1553), la cui *Géométrie practique* (edita e riedita dal 1546 ai primi del Settecento) godrà di notevole diffusione e apprezzamento fra i cultori della matematica della Francia della seconda metà del '500[91].

Anche la problematica sul concetto di minimo e di massimo, ampiamente utilizzato negli scritti matematici, influenzerà profondamente i pensatori successivi, tra cui Johan-

87 Cfr. Uzielli 1894; De Bernart 1999.
88 Cfr. Cusanus 2010f, 6. Sul ruolo di mediazione svolto da Toscanelli tra Cusano e gli intellettuali del Quattrocento italiano, cfr. Flasch 2002, 175–193, spec. 182ss.
89 Cfr. AA.VV. 1964; Orbetello 1965.
90 Cfr. Nagel 2007; Watanabe 2011.
91 Cfr. Hofmann e Hofmann 1980, XI–XII; Klibansky 1980, 358–362.

nes Kepler (1571–1630), il quale, nel *Mysterium Cosmographicum* (1596), esprime la sua ammirazione per il cardinale, lo nomina come suo precursore e lo chiama con entusiasmo «Cusanus mihi divinus»[92]. Le stesse riflessioni cusaniane sul concetto di continuo, di indivisibile, di limite e illimitato, saranno certamente feconde per la formazione e lo sviluppo del concetto di infinitesimo[93]. Anche nella legge di continuità formulata da Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) è sotteso il principio cusaniano della coincidenza[94].

In questa scia, nel 1747, Abraham Kästner (1719–1800), architetto tedesco e maestro di Carl Friedrich Gauss (1777–1855), debitore anch'egli delle intuizioni geometriche del cardinale[95], in *Das Lob der Sternkunst*[96] definisce Cusano, insieme a Copernico, come uno dei due «Wiederhersteller des wahren Weltgebäudes» e mostra come il cardinale, nelle sue considerazioni sull'infinito, arrivi a contemplare, senza tuttavia approfondire, il calcolo infinitesimale: «Er dachte an vergängliche Größen, nur er wußte nicht, wie diese Vorstellung benutzt werden würde»[97].

Moritz Cantor (1829–1920), primo professore di storia della matematica della Germania, nelle sue *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, dedica molto spazio a Cusano e fornisce un'esposizione chiara del metodo di quadratura esposto nel *De mathematicis complementis*, che ha il pregio di non limitarsi, come spesso è stato fatto dagli studiosi della matematica di Cusano, a tradurre in linguaggio algebrico moderno i risultati dell'argomentazione di Cusano, per verificarne su questa base i limiti di attendibilità, ma di cercare di seguire le fasi delle argomentazioni cusaniane[98].

Ancora, dalla metà del secolo scorso sono stati prodotti studi specifici sulle opere matematiche di Cusano, che, nonostante – e forse grazie a – gli inevitabili limiti dell'impostazione metodologica –, sottolineano l'importanza degli scritti matematici di Cusano nell'ambito dello sviluppo di quella *forma mentis* matematica tipicamente moderna che si è andata progressivamente affermando tra il XV e ei XVI secolo attraverso cunicoli spesso oscuri e inconsapevoli[99].

---

92 Cfr. Johannes 1938, II, 23. Sull'influenza di Cusano su Kepler, cfr. Omodeo 2014, 215–226; Bialas 2003, 45–53; Koyré 1973, 336.

93 Cfr. Vescovini 1998a, 107: «Tuttavia anche sul piano strettamente matematico Cusano ha avuto il merito di introdurre una problematica sul concetto di minimo e di massimo, di indivisibile, tutta una tematica del limite e dell'illimitato, delle grandezze infinite, che è stata certamente feconda nella direzione della riflessione successiva sul concetto di infinitesimo».

94 Roth 1997, 63–80; Glezer 2018, 51–55.

95 Cfr. Gauss 1984, 435–455.

96 Si tratta di un lungo articolo scritto da Kästner nel 1747 e pubblicato nell'Hamburgische Magazine. L'articolo è stato riprodotto in Kirsch 2007.

97 Kirsch 2007, 4–22. Cfr. anche Nagel 2007.

98 Cfr. Cantor 1965, 51–203.

99 Cfr. Hofmann 1967, 124–154; Hofmann 1970, 385–398; De Gandillac 1937, 127–133; Stuloff 1967, 55–64; AA.VV. 1970.

Capitolo 4
Codici manoscritti ed edizioni a stampa

In linea con la versione critica, sono qui riportati, in ordine alfabetico, i codici e le edizioni a stampa contenenti gli scritti matematici di Cusano, con le relative abbreviazioni che sono utilizzate nelle note dei singoli scritti.

4.1 Codici

A = codice milanese della biblioteca ambrosiana. G 74, inf. (Milano, biblioteca ambrosiana)[1].

Si tratta di un codice cartaceo, di 20 fogli, (XV secolo), contenente solo i testi matematici.

f. I^{v}–2^{r} : *Aurea propositio in mathematicis*
f. 3^{r}–4^{r}: *De caesarea circuli quadratura*
f. 5^{r}–20^{r}: *De mathematicis complementis* (testo più lungo)

Bb = Codice della biblioteca apostolica vaticana, Barb. Lat. 350 (indicazione precedente: X. 168) (Città del Vaticano)[2].

Si tratta di un codice di 92 fogli, composto da 8 parti diverse, scritto tra il XIV e XV secolo. Gli scritti matematici di Cusano sono contenuti nella parte 3 e 4:

f. 20^{v}–23^{r}: *De una recti curvique mensura*
f. 43^{r}–60^{r}: *De mathematicis complementis* (testo più lungo)

Bl = codice della biblioteca regia di Bruxelles, 2962–2978[3].

Si tratta di un codice di 248 fogli (scritto tra il 1500 e il 1510), che contiene la maggior parte dei testi di fisica e due scritti matematici di Cusano.

f. 45^{r}–77^{r}: *De mathematicis complementis* (testo più lungo)
f. 78^{r}–88^{r}: *De mathematica perfectione*

I testi sono scritti in maniera chiara. Il paragrafo 39, che mancava nel primo, fu aggiunto molto probabilmente da un altro amanuense dopo la fine del primo libro. Il secondo libro non è integro, mancano molte pagine (f. 63^{v} e f. 68^{rv}, f. 73^{v}–74^{r}), ma le figure sono presenti.

---

[1] Il codice è descritto da Rivolta 1933, 232–249; Kristeller 1963–1992, I, 291; Gabriel 1968, 142; Mazzuconi 1980, 49–66. Cfr. anche Hofmann e Hofmann 1980, XLVII–L.

[2] Del codice discute ampliamente Haubst 1955, 16–19. I testi matematici ivi compresi sono dettagliatamente descritti da Silverstein 1957, 107–109 e da Kristeller 1963–1992, I, 444. Cfr. anche Hofmann e Hofmann 1980, XLVII–L.

[3] Del codice hanno trattato Calcoen 1965, I–61, e più brevemente, Kristeller 1963–1992, III, 114. Cfr. anche Hofmann e Hofmann 1980, XLVII–XLIX.

Br = codice della biblioteca regia di Bruxelles, 11479–11484[4].

Si tratta di un codice di 78 fogli, scritto nel XV secolo. Nel foglio 59 si legge: «Ex dono Heymerici de Campo patri Oliverii. Lovanium». Il codice contiene due scritti di Cusano:

f. 59^{r}–65^{v}*: De mathematicis complementis* (testo più breve)

f. 68^{r}–78^{v}: *De theologicis complementis*

I testi matematici sono trascritti da un'unica mano. Nel *De mathematicis complementis* ci sono poche correzioni e diverse sottolineature alle proposizioni; molte note sono scritte a margine da un amanuense successivo. Le figure non mancano.

C = Codice della biblioteca dell'ospedale di San Nicola, cod. 218 (Bernkastel–Kues)[5].

Il codice, di 141 fogli, contiene, insieme al codice *Cu*, 21 opere di Cusano, che Pierre Peter Wymar von Erkelenz, segretario del cardinale Cusano, ebbe cura di riunire. Verosimilmente i codici *C* e *Cu* furono scritti a Roma tra il 1458 e il 1464. Lo stesso Cusano esaminò attentamente i codici, corresse molti punti e aggiunse qualche nota. Nel codice *C* ci sono le opere filosofiche e teologiche elaborate tra gli anni 1440–1450. C'è solo un testo di matematica:

f. 68^{r}–78^{v}: *De mathematica perfectione*, prima versione; il testo è in gran parte cancellato.

Cu = Codice della biblioteca dell'ospedale di San Nicola, cod. 219 (Bernkastel–Kues)[6].

Il codice cartaceo, di 211 fogli, contiene le opere elaborate dopo il 1450, tra le quali due testi matematici:

f. 51^{r}–66^{v}: *De mathematicis complementis* (testo più lungo)

f. 194^{r}–198^{v}: *De mathematica perfectione*

I testi matematici sono trascritti nitidamente da un'unica mano. Nel *De mathematicis complementis* ci sono poche correzioni molte note a margine e non c'è dubbio che l'autore sia Cusano. Le figure non mancano.

E = Codice monacense latino della biblioteca della città bavarese, Clm 14213 (München, Bayerische Staatsbibliothek)[7].

Il codice cartaceo, di 142 fogli (scritto nel XV secolo), proviene dal monastero di Sant'Emmerano. Vi sono molti scritti di Cusano, tra cui il *De docta ignorantia*, il *De coniecturis* e i seguenti scritti matematici:

f. 96^{r}–101^{r}: *De geometricis transmutationibus*

f. 101^{r}–104^{v}: *De circuli quadratura*

f. 105^{r}–108^{v}: *De mathematicis complementis* (testo più breve)

I testi matematici sono trascritti nitidamente da un'unica mano. Delle poche correzioni presenti è autore l'amanuense. Le iscrizioni sono in rosso e le figure sono disegnate con molta cura.

---

4 Sul codice cfr. Van de Vyver 1962, 47–61, spec. 54–57; 59–61; Van de Vyver 1964, 325ss. Il codice è descritto da Gheyn 1975, 61; Kristeller 1963–1992, III, 119. Cfr. anche Hofmann e Hofmann 1980, XLVII–XLIX.

5 Sul codice cfr. Klibansky 1999, 205–236. Esso è descritto anche da Marx 1905, 212–214; Hofmann e Haubst 1973; Gestrich 1992.

6 Sul codice cfr. Marx 1905, 214–217; Hofmann e Hofmann 1980, XLVII–XLIX. Si fa menzione del codice anche in Lutz 1981, 149B, 815.

7 Il codice è descritto in Faider 1876, IV, part. II, 144. Cfr. anche Hofmann e Hofmann 1980, XLVIss.–L.

Em = Codice caroloruense della biblioteca di Baden, E.M. 32 (Karlsruhe)[8].

Il codice cartaceo, di 178 fogli (molti dei quali vuoti), è stato scritto alla fine del XV secolo e proviene dalla biblioteca di Johannes Stoeffler (1452–1531) e di Philipp Imsser (1500–1570), ed è stato ritrovato nel monastero Etten–Müster a Karlsruhe. I testi sono per la maggior parte astronomici. Di Cusano c'è solo:

f. 5^{r}–8^{v}: *Quadratura circuli*; compresa la parte *De sinibus et cordis* (f. 8^{rv})

F = Codice fiorentino, biblioteca nazionale centrale, Conv. Soppr. J. IX.16. (Firenze)[9].

Codice cartaceo (della fine XVI secolo, visto che è inserito l'anno 1578), è composto di 453 fogli. Esso riporta una sola volta: Florentia San Marco 161. Contiene estratti e note da diverse opere per la maggior parte di matematica e fisica scritti in lingua greca, latina, italiana, tra cui:

f. 191^{r}–212^{v}: *Quadratura circuli ad mentem Cusani*

Il testo dei fogli 191^{r}–212^{v}, il cui autore non è nominato, offre la maggior parte della *Quadratura circuli*, quasi la metà dello scritto di Toscanelli dato a Cusano e una parte tratta dal *Dialogus de circuli quadratura*; infine ci sono passi scelti dalle note di Regiomontano riguardo a ciò che Cusano scrisse sulla quadratura e sulla rettificazione del cerchio e che nel 1533 Schöner stampò (vedi *n*). Il testo è di difficile lettura.

Gr = Biblioteca dell'università di Groningen, Ms. 103 (Rijksuniversiteit)[10].

Il codice cartaceo di 274 fogli contiene vari scritti in latino e in lingua batava; fu scritto da Walterus Enchusen (il quale nel 1530 trascrisse anche il *Tractatus de Configurationibus Qualitatum et Motuum* del 1355 di Oresme) probabilmente tra il 1520 e il 1540, nel monastero di Tabor, situato nella Frisia occidentale. Vi sono più di 40 testi sia interi sia estratti, specie di aritmetica, geometria, astronomia e astrologia. Gli scritti di Cusano sono:

f. 153^{r}–166^{r}: *De mathematicis complementis* (testo più lungo)

f. 166^{r}–169^{r}: *De mathematica perfectione*

I testi sono scritti in maniera chiara e con molte abbreviazioni. Le figure non mancano. Gli scritti matematici di Cusano sembrano dipendere dall'edizione strasburghese.

Hr = codice londinese, della biblioteca britannica, Harleianus 3169 (London)[11].

Il codice si compone di 140 fogli, incollati su due parti; all'inizio il codice, scritto nel XV secolo, aveva entrambe le parti. La prima parte (f. 1^{r}–125^{v}) contiene scritti patristici e agiografici; l'altra parte, due opere di Cusano:

f. 126^{r}–138^{v}: *De mathematicis complementis* (testo più lungo)

f. 105^{r}–108^{v}: *De theologicis complementis*

Nel secondo fascicolo i fogli sono ammassati e non sono in ordine. A quei tempi la serie dei fogli era: f. 126–130; 134–135; 133; 138; 136–137; 131–132; 139–140. Il testo del *De mathematicis complementis* è trascritto da un solo amanuense in maniera chiara;

---

[8] Il codice è descritto da Senger 1972, 12ss; Ettlinger 1899, 437–469, spec. 456; Preisendanz 1973, 16–100ss. Cfr. anche Hofmann e Hofmann 1980, XLVII–XLIX.

[9] Il codice è descritto in Björnbo 1911–1912, 3.12, 97–132, spec. 100–102.

[10] Il codice è descritto in Brugmans 1998, 36–41; Folkerts 1970, 21–23; Steensma 1970, 230–259. Di Cusano troviamo anche: f. 169^{r}–177^{v}: *Tractatus de reparatione kalendarii*; f. 177^{v}–182^{v}*: Idiota de staticis experimentis*.

[11] Il codice è descritto in Faider 1808, III, 7. Cfr. anche Hofmann e Hofmann 1980, XLVII–XLIX e Hallauer 1986, 45–47.

l'autore delle poche correzioni che ci sono sembra sia l'amanuense stesso. Le figure sono presenti.

M = Codice della biblioteca municipale metese, Ms. 355 (Metz)[12].

Il codice cartaceo, di 266 fogli, scritto nel XV secolo, nel 1763 era nell'abbazia di Santo Arnulfo. Nel settembre del 1944 il codice fu completamente bruciato, ma ad Heidelberg le immagini delle opere di Cusano sono protette dalla luce (non di tutte). Vi appartengono molti scritti di teologia e delle opere matematiche di Cusano solo il *De mathematicis complementis* (testo più breve) (f. 123^{v}–132^{r}).

L'autore delle poche correzioni presenti nel *De mathematicis complementis*, scritto con chiarezza da un'unica mano, è lo stesso amanuense. Le figure sono presenti.

Mn = codice monacense latino della biblioteca della città bavarese, Clm. 1862 (München, Bayerische Staatsbibliothek)[13].

Il codice cartaceo, di 292 fogli, proviene dal monastero di San Quirino O. S. B. Tegernseense (vecchia indicazione: Teg 621). Molte parti estratte dalle opere di Cusano furono trascritte dal frate Sigismundus Schröttinger. La parte più consistente è quella teologica. Di Cusano troviamo:

f. 261^{r} – 270^{r}: *De mathematica perfectione*[14]

Il testo del *De mathematicis perfectione* è scritto con chiarezza da un'unica mano; le figure sono presenti.

Na = Codice namurense della biblioteca del museo archeologico, Ms. 77 (Namur, Biblioteca della società archeologica)[15].

Il codice cartaceo, di 232 fogli, scritto nel XV secolo, proviene dall'abbazia «de gardineto iuxta walcuriam» (=Abbaye du Jardinet, Walcourt) (ord. Cistercense); nel foglio I^{r} si legge (sec. XV/XVI): «questo libro appartiene al monastero del giardinetto della beata vergine Maria vicino a Walcourt». Di Cusano troviamo:

f. 2^{r} – 8^{v}: *De geometricis transmutationibus*

O = Codice enipontano della biblioteca universitaria (Innsbruck)[16].

Il codice cartaceo, di 219 fogli, scritto nel XV secolo, è stato ritrovato nel monastero del monte di tutti i santi Schnals Aeni al ponte. Qui troviamo tra i vari scritti, il *De anima* di Cassiodoro (f. 167^{v}–175^{r}); il *Dyalogus de genesi* , trascritto nel 1447 a Lodi (f. 176^{r}–183^{v}); *l'Epistolae ad Bohemos* (f. 184^{r}–196^{v}); *l'Epistola Enee Silvii ad Iohannem de Aich de curalium vanitatibus* (f. 207^{r}–219^{r}). Delle opere matematiche di Cusano troviamo:

f. 197^{r}–204^{v}: *De geometricis transmutationibus*

Ob = Codice della biblioteca apostolica vaticana, Ottobon.lat. 1870 (Città del Vaticano).[17]

---

[12] Il codice è descritto in Faider 1879, V, 149ss. Cfr. anche Hofmann e Hofmann 1980, XLVII–L. Il codice contiene anche il *De pace fidei* (f. 101^{r}–123^{r}); il *De theologicis complementis* (f. 133^{r}–147^{v}) e le *Epistulae ad Bohemos* (f. 148^{r}–167^{r}).

[13] Il codice è descritto in Faider 1876, IV, III, 4, 190. Cfr. anche Hofmann e Hofmann 1980, XLVII–L.

[14] Nel codice vi è anche il *De beryllo* (f. 270v–292v).

[15] Il codice è descritto in Faider 1934, I, 167ss. Cfr. anche Hofmann e Hofmann 1980, XLVII–L.

[16] Il codice è descritto in Kristeller 1963–1992, II, 419. Cfr. anche Hofmann e Hofmann 1980, XLVI–XLIX.

[17] Il codice è descritto in Daly e Ermatinger 1964, 3–17, e Daly e Ermatinger 1965, 12–29; spec. 19ss. Cfr. anche Kristeller 1963–1992, II, 419; Hofmann e Hofmann 1980, XLVII–L. Sull'importanza del codice delle opere di Cusano, cfr. Haubst 1952a, 16–18. In questo codice si trovano anche due opere di Archimede: il *De quadratura circuli* (f. 151^{v}–156^{r}) e il *De mensura circuli* (f. 156^{r}–157^{v}). Entrambi sono editi in Clagett

Il codice cartaceo, di 176 fogli, prodotto nel XV secolo, contiene, tra gli altri scritti, il testo cusaniano:

f. 166^r–166^v: *Dialogus de circuli quadratura*.

R = Codice monacense latino della biblioteca della città bavarese, Clm 14908 (München, Bayerische Staatsbibliothek)[18].

Il codice cartaceo, di 523 fogli, proviene dal Santo Emmeramo presso regina Castra, con la vecchia indicazione Em. R. 8. Il codice intero fu composto tra il 1455 e il 1464 da Fridericus Amann (morte ca.1465), che trascrisse tra il 1436 e il 1464 molti testi di matematica, fisica, teologia, che sono passate alla memoria attraverso 12 codici, una volta del Santo Emmeramo[19]. Poichè Cusano nel 1451 frequentava regina Castra, è verosimile che abbia potuto incontrare Amann. Nel codice vi sono molti scritti specie di aritmetica e geometria. Tra queste ci sono le seguenti opere matematiche di Cusano:

f. 407r – 423v vecchia numerazione = f. 426r – 442v nuova numerazione: *De geometricis transmutationibus* (testo scritto nel 1459)

f. 423r – 432v vecchia numerazione = f. 442r – 451v nuova numerazione: *De circuli quadratura* (testo scritto nel 1459)

f. 435r – 452v vecchia numerazione = f. 454r – 470v nuova numerazione *De mathematicis complementis* (testo più breve scritto nel 1459)

Fridericus trascrisse le opere di Cusano nel 1459[20]. Gli opuscoli di matematica furono scritti rapidamente con molte abbreviazioni. L'originale del *De mathematicis complementis* e del *De geometricis transmutationibus* pare fosse il codice *E* dal Santo Emeramo.

Nel *De mathematicis complementis* sono tracciate delle linee sotto le proposizioni; non mancano le figure, ma sono disegnate con poca attenzione.

Rt = codice monacense latino della biblioteca della città bavarese, Clm 18570 (München, Bayerische Staatsbibliothek)[21].

Il codice cartaceo, di 147 fogli, scritto intorno al 1453–1454 nel monastero di San Quirino O.S.B. Di Tagersee (vecchia indicazione: teg. 570), contiene vari scritti teologici e di Cusano, tra gli altri scritti filosofici e teologici[22]: *De mathematicis complementis* (testo più breve, f. 52r – 62v).

Il testo del *De mathematicis complementis* è scritto con chiarezza da un'unica mano; le poche correzioni presenti sono in gran parte errori di scrittura (refusi), che lo stesso amanuense corresse. Non mancano le figure, disegnate, tra l'altro, molto accuratamente.

Sa = Codice oxoniense della biblioteca bodleiana Saviliana 55 (Oxford, biblioteca bodleiana)[23].

Il codice cartaceo, di 110 fogli, composto intorno al 1451–1454 ad Aquisgrana da più autori, in primis da Joanne Scoblant, nel 1694 venne in possesso di Joannus Wallisius

1964–1984a, I, XXXIX; 91–135.

[18] Il codice è descritto in Faider 1876, IV, 250 e in Vogel 1954, 11–19. Cfr. anche Bischoff 1967, II–128 e Hofmann e Hofmann 1980, XLVIss.–L.

[19] Cfr. Wunderle 1995, I, XIVss.

[20] Tra queste anche il *De docta ignorantia* (libro I, cap. 13–15) f. 453^r–455^v (vecchia numerazione) e alcuni estratti del libro I del *De coniecturis*, (f. 456^r–464^v vecchia numerazione).

[21] Il codice è descritto in: Faider 1876, IV, 182. Cfr. anche Hofmann e Hofmann 1980, XLVI–L.

[22] Tra questi: f. I^r–26^v: *De visione dei*; f. 28^r–51^v: *De pace fidei*; f. 65^r–77^v: *De theologicis complementis*; f. 78^r–94^v: *Epistulae ad Bohemos*.

[23] Il codice è descritto in Madan e Craster 1905, I, 185ss. (n. 26123). Cfr. anche Hofmann e Hofmann 1980, XLVI–L.

(1616–1703), che ne fece dono nel 1696 alla biblioteca di Oxford. Delle opere matematiche di Cusano vi è solo il *De mathematicis complementis* (testo più breve, trascritto nel 1454; f. 61^{r}–68^{v})[24].

Nel testo del *De mathematicis complementis*, scritto da un'unica mano, vi sono molti errori, la maggior parte dei quali fu corretta dallo stesso amanuense, che verosimilmente provvide anche a colmare le omissioni e i salti di trascrizione per omoioteleuto. Le figure non mancano.

T = Codice monacense latino della biblioteca della città bavarese, Clm 18711 (München, Bayerische Staatsbibliothek)[25].

Il codice cartaceo, di 268 fogli (fatti di membrana), scritto intorno al 1452 nel monastero di San Quirino O.S.B. Di Tagersee (vecchia indicazione: Teg. 711), contiene i seguenti scritti di matematici di Cusano:

f. 234^{v}–242^{r} : *De geometricis transmutationibus*
f. 242^{v}–249^{v} : *De circuli quadratura*[26]

I testi matematici, scritti nitidamente, sono stati emendati da uno scarso amanuense del tempo.

To = Codice toledino della biblioteca capitolare Ms. 19–26 (Toledo, biblioteca Capitolar)[27].

Il codice, di 193 fogli, prodotto negli anni 1460–1470 probabilmente in Italia, appartenne al cardinale Pier Leone di Spoleto (ca. 1445–1492), che riunì i codici che contenevano le opere di Cusano e in questo codice scrisse gran parte delle note a margine[28]. In seguito il codice passò tra i libri del cardinale Francesco Xaverio Zelado (1717–1801), romano di stirpe ispanica; di là, prima del 1808, fu portato a Toledo. Al codice appartengono 12 opere di Cusano di filosofia, teologia e matematica. Quelle di matematica sono:

f. 169^{r}–175^{r}: *De geometricis transmutationibus*
f. 175^{r}–176^{r}: *De arithmeticis complementis* (prima versione)
f. 176^{r}–187^{v}: *De mathematicis complementis* (testo più lungo)
f. 188^{r}–191^{r}: *De mathematica perfectione* (prima versione)
f. 191^{v}–192^{v}: *Dialogus de circuli quadratura*

Chi trascrisse il codice non aveva il *corpus* delle opere di Cusano: più che descrivere le opere, le riunì, accostandosi a rari codici; a testimonianza di ciò sta il fatto che soltanto il

---

24 In questo codice si trovano: il *De mente* (f. 1^{r}–25^{r}); il *De staticis experimentis* (trascritto nel 1451, f. 26^{r}–34^{r}); le *Epistulae ad Bohemos* (f. 35^{ra}–46^{rb}); il *De theologicis complementis* (trascritto nel 1454, f. 71^{ra}–83^{rb}); il *De pace fidei* (trascritto nel 1454; f. 85^{ra}–110^{rb}). Tra il *De mathematicis complementis* e il *De theologicis complementis* si trova il *Quadratra circuli* di Campano (ed. Clagett 1964–1984a, I, 606).

25 Il codice è descritto in Faider 1876, IV, 200ss. Cfr. anche Hofmann e Hofmann 1980, XLVIss–L.

26 Gli altri cusaniani presenti nel codici sono: il *De quaerendo deum* (f. 1^{r}–9^{r}); il *De docta ignorantia* (f. 13^{r}–71^{r}); l'*Apologia doctae ignorantiae* (f. 73^{r}–88^{v}); il *De mente* (f. 92^{r}–118^{v}); il *De staticis experimentis* (f. 119^{r}–127^{r}); il *De sapientia* (f. 128^{r}–144^{r}); un *Sermo* e una *Epistula* (f. 144^{v}–162^{r}); il *De coniecturis* (f. 162^{r}–219^{r}); *De filiatione dei* (f. 222^{r}–228^{r}), il *De dato patris luminum* (f. 228^{v}–234^{r}); le *Epistulae ad Bohemos* (f. 250^{v}–268^{v}).

27 Del codice ha ampliamente parlato Reinhardt 2005. Ha descritto brevemente il codice Kristeller 1963–1992, IV, 636. Cfr. inoltre Rotzoll 2002, 253–287, spec. 266.

28 Cfr. Schnarr 2002, 187–213. Nel 1489, probabilmente al servizio del cardinale Marco Barbo (1420–1491), Leone incontrò Luca Pacioli, che nella sua *Summa de arithmetica* ricorda come Leone gli avesse mostrato il rarissimo *De circuli quadratura* di Cusano, di cui Leone possedeva e aveva studiato diverse opere. Leone fu il solo degli studiosi italiani del Quattrocento – con l'unica eccezione di Ermolao Barbaro (1454–1493) – a possedere, studiare e fittamente postillare sia un certo numero di opere di Cusano, specie quelle "irenistiche", quali il *De visione dei* o il *De pace fidei*, sia le opere di Lullo.

codice *To* tramandò le prime versioni (che sono per così dire abbozzi) del *De arithmeticis complementis* e del *De mathematica perfectione*. Non si fa menzione di Cusano nel codice *To*. Il testo degli opuscoli matematici, da quanto si può supporre, è stato scritto da un unico amanuense. Non sono state aggiunte note a margine; le correzioni sono poche e mancano tutte le figure. Le lettere iniziali nelle ultime due opere sono omesse.

U = Codice vindobonense del convento dell'ordine dei predicatori 6/6 (Wien, Dominikanerkonvent)[29].

Il codice cartaceo, di 317 fogli, scritto nel 1454, contiene solo opere di Cusano, tra cui le seguenti opere matematiche:

f. 296^{r}–308^{r}: *De geometricis transmutationibus*
f. 308^{v}–317^{v}: *De circuli quadratura*

Y = Codice della biblioteca di New Haven, Yale Medical Library, The Historical Library. Ms 24[30].

Il codice cartaceo, di 460 pagine, è stato composto nel XV secolo nel monastero mellicense; vecchie segnature; Melk 794, Melk 367; Melk G. 27.

Al codice appartengono molti opuscoli di astronomia e di matematica, scritti su Johannes de Gmunden (ca. 1380–1442), George Peurbach, Johannes Regiomontanus. La maggior parte degli scritti verte su come fabbricare e usare gli strumenti astronomici (l'astrolabio, il quadrante, l'orologio solare, il cilindro, l'organoptolemaico, il torqueto). Di Cusano c'è solo il *Quadratura circuli*, pp. 449–454.

Il codice parigino della biblioteca nazionale, n.a.l. 1103[31].

Il codice cartaceo, di 170 fogli, è stato composto nel XV–XVII secolo. In esso sono riuniti frammenti di diversi codici, tra essi c'è un foglio (f. 98^{rv}), che contiene un frammento del *De mathematicis complementis* di Cusano. Il testo del frammento è lo stesso di quello contenuto nell'edizione a stampa *p*. Oltre al testo di Cusano, nel foglio è stata tramandata anche la parte del commento di Omnisantus; l'inizio del testo del commento è: «poi traccia una linea che sia perpendicolare a hp» (= p, f. LXVIIv, linea 1). In questo frammento ci sono le parole del *De mathematicis complementis*: «assegnare una curva circolare uguale a una retta data» (n.31,1) fino a «che sia ortogonale a hp» (n.35,5ss.).

4.2 Edizioni a stampa

a = edizione strasburghese (Argentoratum), stampata nel 1488 senza anno, né luogo, da Martin Flach (ca. 1440–ca. 1514). Poiché dipende dai codici *C* e *Cu*, contiene questi scritti matematici:

fol. f 4^{v}–h 8^{r}: *De mathematicis complementis*
fol. z 5^{v}–A 3^{v}: *De mathematica perfectione*

---

[29] Il codice è descritto in Czeike 1952, 7 e Kristeller 1963–1992, III, 53. Cfr. anche Hofmann e Hofmann 1980, XLVI e LI.

[30] Del codice ha parlato ampliamente Senger 1972, 14ss. Il codice è descritto in Faider 1889, 535–537; Bond e Faye 1962, 57ss; Kristeller 1963–1992, III, 30 e Kristeller 1963–1992, V, 293. Cfr. anche Hofmann e Hofmann 1980, XLVI–L.

[31] Sul codice, cfr. Omont 1915, 21ss e Kristeller 1963–1992, III, 273.

m = edizione erroneamente definita milanese, in verità fu stampata nel 1502 presso Cortemaggiore nel castello del marchese Rolando Pallavicini (1393–1457) da Benedetto Dolcibello di Carpi (morte:1512). Contiene gli stessi scritti di *a*:

f. 196^r–217^v: *De mathematicis complementis*
f. 356^v–362^r: *De mathematica perfectione*

p = edizione parigina, stampata nel 1514 nella bottega del tipografo fiammingo Josse Bade van Assche (Jodicus Badius Ascensius, 1462–1535), a cura di Jacques Lefevre d'Etaple o Jacobus Faber Stapulensis (ca. 1455–ca. 1537). Consta di 3 volumi, nel volume II sono presenti gli scritti matematici:

f. 33^r–53^v: *De geometricis transmutationibus*
f. 54^r–58^v: *De arithmeticis complementis*
f. 59^r–92^v: *De mathematicis complementis* (versione più lunga)
f. 101^v–114^r: *De mathematica perfectione*

Le prime due opere erano state donate a Faber Stapulensis dall'amico Jacobus Faber di Daventer (1473–ca. 1517); Omnisanctus Vasarius, religioso del convento di Livry, dell'ordine regolare dei canonici di Sant'Agostino, ampliò i testi con annotazioni, che sono state aggiunte o tutte alla fine di ciascun testo o in spazi diversi.

n = edizione norimberghese, che è un'appendice del *De triangulis omnimodis libri quinque* di Regiomontanus, edita nel 1533 da Schöner[32]. In appendice si trovano i seguenti scritti matematici e il responso di Toscanelli dato a Cusano:

p. 5–9: *Quadratura circuli*
p. 10–12: *Dialogus de circuli quadratura*
p. 13–14: *Magister Paulus ad Niccolaum Cusanum Cardinalem*
p. 14–15: *Declaratio rectilineationis curvae*
p. 16–21: *De una recti curvique mensura*

b = edizione basilense, stampata nel 1565 da Henricus Petrus (1508–1579), presso la sua Officina Henricpetrina. Questa edizione segue sostanzialmente le edizioni *p* e *n*. Queste le opere matematiche che vi ineriscono:

p. 939–991: *De geometricis transmutationibus*
p. 991–1003: *De arithmeticis complementis*
p. 1004–1090: *De mathematicis complementis* (testo più lungo)
p. 1091–1095: *Quadratura circuli*
p. 1095–1098: *Dialogus de circuli quadratura*
p. 1099–1100: *Magister Paulus ad Niccolaum Cusanum Cardinalem*
p. 1100–1101: *Declaratio rectilineationis curvae*
p. 1101–1106: *De una recti curvique mensura*
1120–1154: *De mathematica perfectione*

Nei quattro scritti presi da *p* non mancano le annotazioni di Omnisanctus, che sono aggiunte in *p*.

[32] Cfr. Hofmann 1967.

4.3 Genesi, datazione e successione cronologica dei singoli scritti matematici

4.3.1 *De geometricis transmutationibus*

Il *De geometricis transmutationibus* è lo scritto matematico più antico che noi conosciamo di Cusano. Sembra sia stato terminato il 25 settembre 1445 e inviato a Toscanelli (come si evince dalla fine di *O*). Il trattato è stato tramandato in 7 codici (*E, Na, O, R, T, To, U*); manca in *a* e *m*, poiché Cusano non volle che il trattato fosse ripreso nei codici *C/Cu*; è presente in *p* e *b*. Per l'edizione *p* Jacobus Faber Stapulensis (Jacque Lefèvre d'Étaples) utilizzò il manoscritto di Daventer di difficile lettura, che andò disperso. Omnisanctus Vasarius (coeditore con Jacobus Faber Stapulensis dei lavori di Cusano pubblicati a Parigi nel 1514) ampliò il manoscritto con varie annotazioni, che sono riportate in *p*[33].

L'ipotesi ammessa da Franz Anton Scharpff (1809–1879), da Paul Schanz (1841–1905) e da Edmond Vansteenberghe[34] era che questo trattato fosse stato composto nel luglio 1450 e concluso a Rieti. Contrario a questa data, tuttavia, Joseph Hofmann, e ancor prima Johann Uebinger[35], sottolinea che Cusano, nell'introduzione del *De circuli quadratura* del luglio 1450, parla di un precedente lavoro matematico. Cusano stesso presenta il testo sulla quadratura del cerchio come una spiegazione più precisa della prima premessa del *De geometricis transmutationibus*, alla quale allude direttamente, pur senza nominare mai il testo. Anche nel *De arithmeticis complementis* si fa riferimento al *De geometricis transmutationibus* concluso poco prima. Il *De geometricis transmutationibus* può essere collocato tra il *De filiatione dei* del luglio 1445 e il *De dato Patri*s *luminum* dell'inverno 1445–1446. Il testo completo di questa prima opera matematica è stato tramandato in *Na, O, T, U*. *E* è pieno di errori; la maggior parte di *R* concorda con *E*; il testo di *To* è simile a *Na*, ma in molti passi ci sono errori. La sintassi latina è imprecisa, il testo discorda in diversi punti nelle versioni manoscritte, il che lo rende oscuro e di difficile lettura.

4.3.2 *De arithmeticis complemementis (forma prior)*

Cusano mandò quest'opuscolo a Toscanelli con l'intento di confermare con argomenti aritmetici le dimostrazioni geometriche contenute nel *De geometricis transmutationibus*.

La *forma prior* del *De arithmeticis complementis* è presente solo in *To* e presenta molti errori. È chiaro che chi lo trascrisse non capì in alcun modo il contenuto: non intese il significato delle frazioni, per cui pensò di omettere tutti i passi con gli esempi in cui erano presenti le frazioni, lasciandoli vuoti. Il testo è ricostruito sul codice *To*, che tuttavia, essendo disseminato di errori, risulta di difficile comprensione[36].

4.3.3 *De arithmeticis complementis*

L'ultima versione del *De arithmeticis complementis*, qui tradotta, differisce molto da quella iniziale. Il testo è indirizzato a Toscanelli: è probabile che questi avesse indicato a Cusano un'argomentazione scorretta nella prima versione, e per questo Cusano cercò di emendare il primo testo con quest'altro. Il *De arithmeticis complementis*, che è la prosecuzione diretta del *De geometricis transmutationibus*, sembra sia stato scritto non molto più tardi di quest'ultimi, ossia verso la fine dell'autunno del 1450, durante il periodo di

[33] Non essendo utili alla comprensione dell'opuscolo, le annotazioni di Omnisanctus, in conformità con l'edizione critica, non sono state qui tradotte.
[34] Cfr. Hofmann e Hofmann 1980, nota 1, 189.
[35] Cfr. Uebinger 1895, 414–422.
[36] Cfr. Folkerts 2012, 315–333.

Coblenza[37]. L'ultima versione del *De arithmeticis complementis* è stata tramandata soltanto in *p* e *b*, che contengono il testo cusaniano, di difficile lettura, e le annotazioni di Omnisanctus Vasarius.

4.3.4 *De circuli quadratura*

Questo testo è stato scoperto sotto forma di manoscritto da Raymund Klibansky[38] e porta la data 12 Luglio 1450[39]. L'edizione critica di Menso Folkers fa riferimento a *T*[40], sebbene si trovi in altri tre codici (*E,R,U*)[41]. La seconda parte del trattato, che assume toni simbolici e mistici, si avvicina molto alle argomentazioni contenuti nel *De docta ignorantia*. Una volta si pensava che non fosse altro che l'opera *Quadratura circuli*, poiché si trovava in *n*. Adelaida Dorothea Riemann e Carolus Bornmann, pubblicando il *De theologicis complementis*[42] aggiunsero in appendice l'ultima parte del *De circuli quadratura* (28–39). In linea con l'edizione critica, la traduzione si base fondamentalmente sul codice *T*.

4.3.5 *Quadratura circuli*

L'opuscolo, di cui non è stato stabilito né l'anno, né il giorno della sua composizione, si riteneva negli anni precedenti che fosse stato elaborato nel Dicembre 1450, ma Fritz Nagel dimostrò che verosimilmente questo testo era stato scritto da Cusano nel mese di Luglio o Agosto del 1453 a Bressanone[43]. L'ipotesi di uno slittamento della data di composizione della *Quadratura circuli* fa leva sulla somiglianza testuale e contenutistica che c'è tra la *Quadratura circuli* e il *De mathematicis complementis* (del 1453). L'opuscolo è stato tramandato in *Em, Y* e in *n*. Nel codice *Em* ci sono molte glosse tra le righe e a margine, soprattutto nel primo foglio; nel codice *Y* si trovano due glosse a margine. Il testo del codice *Y* è più chiaro del codice *Em*, ma mancano le figure. Entrambi i codici e l'edizione a stampa *n* dipendono da un unico esemplare[44]. Si trovano diversi passi estratti dalla *Quadratura circuli* nel libricino del codice *F* intitolato *Quadratura circuli ad mentem Cusani*, di autore ignoto, che sembra sia stato utilizzato nell'esemplare andato perduto.

4.3.6 *De mathematicis complementis*

Il *De mathematicis complementis* è il testo più lungo e il più importante tra gli scritti matematici di Cusano; è dedicato al papa Niccolò V. Ci è pervenuto in due versione: una, più breve, di un libro, probabilmente iniziata nel settembre 1453 a Bressanone e conclusa a Bronzolo; l'altra, più lunga, compiuta a Bressanone in VIII Kal. di Dicembre (24.11). Con la *forma prima* Cusano volle porre davanti agli occhi dei lettori non troppo esperti

[37] Cfr. Hofmann e Hofmann 1980, 198.
[38] Cfr. Liebmann 1929, 261.
[39] Sulla datazione cfr. Uebinger 1895, 403–413.
[40] Cusanus 2010a, XXIX–XXX.
[41] Il codice *T* è un ottimo testo, sebbene vi siano parecchie omissioni (la maggior parte per omoioteleuta), che però sono colmate a margine del testo. Il codice *E* è molto simile a *T. U* non ha le imperfezioni dei codici E e *T*, ma è danneggiata da errori propri. Il codice *R* è scritto con negligenza; l'amanuense corresse immediatamente molti errori. Nel codice *R* dopo le parole: «nella tesi così dichiarata» (24–25) il discorso si interrompe.
[42] Cfr. Cusanus 1994.
[43] Cfr. Nagel 1984, 70–73.
[44] Cfr. Senger 1972, 15–17.

di matematica le novità conseguite nella *Quadratura circuli* e nel *De theologicis complementis*. Toscanelli, a cui era stata inviata la prima versione, confutò le affermazioni di Cusano, e questi, mosso dalla critica dell'amico, aggiunse un secondo libro. Dopo poco Cusano revisionò l'intera opera, cambiando qualche particolare. Nella seconda versione e nelle diverse edizioni a stampa si ritrovano molti degli argomenti presenti nel codice *Cu*.

La prima versione si trova in sei codici (*Br, E, M, R, Rt, Sa*); nel codice *Sa* sono aggiunti anno e giorno: VI Kal. Martias (24.2) del 1454; dunque il codice *Sa* è successivo alla seconda versione. Quest'ultima si trova in sette codici (*A, Bb, Bl, Cu, Gr, Hr, To*), e in quattro edizioni a stampa (*a, m, p, b*); *p* e *b* – che dipende da *p* – sono ampliati da Omnisanctus.

Cusano aggiunse alla versione più breve del *De mathematicis complementis* il *De theologicis complementis*. Tutti i codici, che contengono il *De theologicis complementis* (eccetto il codice *R*), contengono anche la versione più breve del *De mathematicis complementis*[45]. I codici contenenti la prima versione (*Br, E, M, Rt*) sono perfettamente descritti. È stato tramandato il testo integrale in *Br* e *Rt*. *R* sembra dipendere da *E* ed è scritto in modo non accurato. In *Sa* si trovano molte imperfezioni.

Tra i codici contenenti la seconda versione, *Cu* occupa un posto di rilievo, poiché è esaminato e ampliato da Cusano con numerose note a margine. Il testo del codice *A* e del codice *Cu* sono i più simili al testo di *Cu*. Ottimo è anche il testo del codice *Hr*; la fine dell'altro libro (dopo n. 82,2) manca di fogli andati perduti. Il testo del codice *To* è scritto da un ignaro di matematica, che fece molto errori, soprattutto nello scrivere le lettere delle figure. Il testo del codice *Bl* è ottimo; in esso sono contenuti il libro primo e parte del libro secondo (n. 61–67, n. 71–90, n. 92–98).

L'edizione a stampa *a* contiene l'intero testo dei due libri; *m* dipende da *a*, ma è inficiato da molti errori. Il codice *Gr* è una copia del libro *a*, ed entrambi si trovano in *p*, che dipende *b*.

È qui presentata la traduzione del testo della seconda versione e si rifà al codice *Cu*.

4.3.7 *Declaratio rectilineationis curvae*

Con questo opuscolo inviato a Peurbach Cusano cerca di spiegare la rettificazione del cerchio, di cui parla nel *De mathematicis complementis*. La *Declaratio* è pervenuta fino a noi solo tramite *n* e *b*. Non sappiamo quando sia stato scritto.

4.3.8 *De una recti curvique mensura*

Anche di questo opuscolo non sappiamo la data di composizione. È stato tramandato in *n* e *b* e nel codice *Bb*, il cui testo è lo stesso di quello contenuto in *n* e *b*. Tuttavia, poiché nelle tre tesi del testo si fa riferimento al contenuto del *De mathematicis complementis*, è molto probabile che esso sia stato composto subito dopo il testo più lungo[46].

4.3.9 *Dialogus de circuli quadratura*

Il dialogo, di cui si parla nel titolo, è quello tra Cusano e Toscanelli: è molto probabile che la prima metà sia stata portata a termine nel 1457, prima della pubblicazione del *De caesarea circuli quadratura*. Si trova in due codici (*Ob* e *To*) e nelle edizioni *n* e *b*; un breve frammento si trova nel trattato *Quadratura circuli ad mentem Cusani*, tramandato

[45] Heide D. Riemann e Karl Bormann hanno ben esposto questa circostanza in Cusanus 1994, XX–XXII.

[46] Cfr. Hofmann e Hofmann 1980, nota 8, 239.

in *f.* Nel primo foglio di *Ob* ci sono molte lacune e diversi errori, che sono stati corretti successivamente. *To* è identico al codice *Ob*.

4.3.10 *De caesarea circuli quadratura*

Con questo opuscolo, indirizzato all'imperatore Federico IV, Cusano rispose alle obiezioni espresse da Toscanelli al *De mathematicis complementis*; è certo che Cusano compose le prime righe di quest'opuscolo il 6.8.1457, nella città di Andrax. Poiché non si trova in alcun codice se non in *A*, trovato da Klibansky nel 1929, si ritenne che non fosse di Cusano. Questo testo, insieme all'*Aurea propositio in mathematicis*, non fu stampato nel XV e XVI secolo, e fu edita solo molto tempo dopo da Daniela Mazzuconi[47]. La prima parte è scritta dal segretario di Cusano, Petrus Erckelenz. La seconda da Cusano stesso. L'insieme risulta un lavoro incompleto: le ultime pagine mancano e non sembra sia stato rivisto né inviato al suo destinatario.

4.3.11 *De mathematica perfectione (forma prior)*

Il testo, presente alla fine di *C*, all'inizio era stato cancellato, probabilmente con una pietra pomice, ma oggi può essere in parte letto[48]. Nel 1983 Klaus Reinhardt reperì il testo nel codice *To*: è probabile che Cusano stesso abbia ordinato di cancellare il testo in *C*. Marco Böhlandt ha formulato alcune ipotesi per spiegare i motivi di tale eliminazione[49]. C'è un'indubbia affinità di contenuto tra questo testo e il *De beryllo*, un'opera che Cusano produsse per i monaci supplici di Tegernsee. È probabile che le due opere, il *De mathematica perfectione* e il *De beryllo*, siano state prodotte nel medesimo periodo ed è altrettanto probabile che Cusano decise di non trascrivere nel testo definitivo del *De mathematica perfectione* le esposizioni generali sulla filosofia e sulla teologia contenute nella prima versione in quanto, essendo simili a quanto esposto nel *De beryllo*, risultavano un'inutile ripetizione; per questo motivo è verosimile che Cusano ordinò che il primo testo fosse cancellato. Hofmann pubblicò le parti del primo testo, che si trovano in *C*, ampliandole con diversi commenti; trascrisse il testo di *To* e Reinhardt lo pubblicò[50]. Menso Folkerts ha pubblicato solo il testo dal codice *To*, includendo le parti del codice *C* che si possono distinguere e aggiungendo le figure, che mancano completamente in *To*. Sulla base di *C* e le integrazioni da parte di Reinhardt è stata ricostruita integralmente la *forma prior* del *De mathematica perfectione*, oggi disponibile in Cusanus 2010h, 183–199.

4.3.12 *De mathematica perfectione*

Cusano portò a termine la versione definitiva del testo nell'autunno del 1458 a Roma, e la spedì al cardinale spagnolo di S. Crisogono, Don Antonio Cerdá y Lloscos (1390–1459). A margine di *Cu* Cusano stesso annotò che riteneva il *De mathematica perfectione* il trattato migliore tra i suoi scritti matematici, «che... emerge su tutti». Il testo, che egli stesso ordinò di includere nel codice *Cu*, è stato tramandato anche in altri codici (*Bl, Gr, Mn*) e passato in *a, m, p e b*. Omnisanctus aggiunse al testo numerosi commenti, che sono in *p* e in *b*.

---

[47] Cfr. Mazzuconi 1980, 49–72.
[48] Cfr. Hofmann e Haubst 1973, 13–57; Nicolle 1998, nota 21, 121.
[49] Cfr. Böhlandt 2002, 194–109; Böhlandt 2005, 3–40.
[50] Cfr. Reinhardt 1986, 96–141, spec. 134–141.

4.3.13 *Aurea propositio in mathematicis*

È l'ultimo opuscolo di matematica che conosciamo, scritto da Cusano a Roma l'8 Agosto 1459 durante la sua legazione nella città.[51] È stato tramandato in *A*, trovato da Raymund Klibansky, ed edito nel 1980[52].

4.3.14 *Appendix: Magister Paulus ad Nicolaum Cusanum cardinalem*

L'autore dello scritto, con cui si confuta una proposizione fondamentale (la dodicesima) del *De mathematicis complementis*, sebbene non sia indicato, è sicuramente Toscanelli, come emerge da due note a margine di *Cu* scritte da Cusano stesso. Verosimilmente Toscanelli concluse lo scritto nell'inverno 1453–1454. Dall'ultima frase del testo si evince che il testo doveva essere tramandato a Peurbach, e da questi a Regiomontano. Nel 1533 Schöner pubblicò lo scritto (nell'edizione *n*) e a noi è pervenuto per mezzo di *b*, che dipende da *n*.

[51] Cfr. Meuthen 1989.
[52] Mazzuconi 1980, 49–72. Cfr. Nicolle 2010.

Capitolo 5
Criteri di traduzione

Gli scritti matematici sono riportati in ordine cronologico nel volume XX dell'edizione critica dell'*Opera omnia* di Cusano a cura di Menso Folkerts (Cusanus 2010a) e qui riprodotti integralmente per gentile concessione del curatore. In Appendice vi è un testo intitolato *Magister Paulus ad Nicolaum Cusanum cardinalem*, in cui Paolo Toscanelli esamina con sottile acume l'opera di Cusano *De mathematicis complementis*. È su questa edizione critica latina che si basa la traduzione degli undici scritti cusaniani qui presentati, escluse le *formae priores* del *De arithmeticis complementis* e del *De mathematica perfectione*. Della *forma prior* del *De mathematica perfectione* sono stati tradotti nell'ultima nota della traduzione de *La perfezione matematica* tre lunghi passaggi in cui emergono le differenze più significative e interessanti rispetto alla versione definitiva. La traduzione del *De circuli quadratura*, del *De mathematicis complementis* e del *De mathematica perfectione* è stata pubblicata nell'edizione a cura di Enrico Peroli[1] e qui riproposta senza sostanziali cambiamenti.

Per la traduzione si è tenendo conto delle due uniche traduzioni esistenti: quella tedesca di Josepha Ehrenfried Hofmann (Hofmann e Hofmann 1980) e quella francese di Jean Marie Nicolle (Nicolle 2007). Le introduzioni e i commenti di Joseph Ehrenfrien Hofmann ai *Mathematische Schriften* spiegano accuratamente le questioni matematiche che Cusano tratta nei suoi scritti (escluse due opere, che non erano note all'illustre studioso). Anche gli studi e la traduzione parziale degli scritti matematici portati avanti alla fine dell'Ottocento da Johannes Uebingen (Uebinger 1895; Uebinger 1896 e 1897) sono stati preziosi contributi.

In questa traduzione si è preferito rispettare lo spirito dei testi, per quanto bizzarro possa apparire, cercando tuttavia di rendere leggibili i passaggi e i procedimenti in essi contenuti.

Per questo motivo la traduzione, pur non essendo strettamente letterale e privilegiando, per quanto possibile, il criterio di chiarezza espositiva, ha avuto cura di conservare il significato che avevano all'epoca i termini e le espressioni matematiche, tranne i casi, segnalati in nota, in cui, per rendere il testo scorrevole, è stato necessario attualizzare. La punteggiatura è stata riadattata secondo l'uso odierno.

[1] Peroli 2017, 1997–2161.

Capitolo 6
Glossario

Sono qui riportati i termini utilizzati più frequentemente da Cusano negli scritti matematici. Va sottolineato che il cardinale utilizza spesso termini diversi per significare la stessa cosa, ossia tali per cui la differenza di significato è minima. Complessivamente, egli preferisce le denominazioni greche a quelle latine.

Da un punto di vista terminologico è interessante sottolineare che Cusano rinnova i termini matematici di quel tempo, come *costa, potentia, sagitta*, ma non utilizza altri, benché fossero usati a quel tempo, come *hypotenusa e cathetus*, con i quali si designano i lati del triangolo rettangolo; al loro posto ricorre a *prima linea, secunda linea, tertia linea*. Ci sono vocaboli che hanno significati diversi rispetto all'uso che si trova negli scritti matematici del suo tempo, come *lunula, rhombus, sector*; e talvolta lo stesso termine ha molteplici e diversi significati, come *columna, longitudo, medium, portio, superficies, commensurabilis*. È inoltre evidente, nella terminologia utilizzata da Cusano, l'influsso della tradizione araba: il termine seno, per esempio, è inteso da Cusano nel senso di "semicorda dell'arco doppio", secondo un'invenzione indiana tramandata dagli arabi all'Occidente medievale.

Abscissio – sezione

Additio – addizione, somma; a secondo del contesto, il termine indica l'operazione o il risultato dell'operazione

Aequalis – uguale. Cusano utilizza questo termine per indicare uguaglianze di lunghezze, di superfici o di volumi

Aequatrix – equatrice; Cfr. *De mathematicis complementis*, Fig. 31; si tratta di una linea parallela alla tangente e perpendicolare al raggio, tale che essa taglia due settori uguali, l'uno nel cerchio sotto il punto di tangenza, l'altro fuori dal cerchio sotto l'equatrice

Aequidistans – equidistante, tradotto nella maggior parte dei casi con "parallelo"

Area – area, intesa come superficie delle figure piane

Altitudo – altezza, spesso profondità

Angulus – angolo

Arcus – arco

Ars – arte, intesa come metodo, sapere

Capacitas – estensione; ampiezza, capacità, ma anche superficie, intesa dal punto di vista della grandezza

Centrum – centro

Chorda – corda

Circulus – cerchio

Circumferentia – circonferenza

Columna quadrangula – parallelepipedo rettangolo

Columna rotunda – cilindro

commensurare/commensurabilis – termine equivoco, che designa un'uguaglianza di misura, un'uguaglianza di area (equivalenza) o anche una semplice proporzionalità

Comparates – corde in proporzione, ossia quelle corde – di cui una è tracciata come minore, l'altra come maggiore –, poste in modo che distino dalla corda di mezzo una lunghezza pari all'arco compreso tra le corde, Cfr. *De mathematicis complementis*, § 94, Fig. 40

Contingens – tangente

Corpus – solido

Costa – lato

Curvitas – curvatura; termine ambiguo che designa tanto l'inflessione di una curva, quanto l'essenza dell'essere curvo (curvilineo)

Diameter – diametro, ma Cusano utilizza *diameter* anche per definire la diagonale di un quadrilatero

Ducere – condurre, moltiplicare

Ductio – condotto, operazione. Il termine tecnico *ductio* significa sia il movimento di costruzione geometrica sia l'operazione aritmetica della moltiplicazione

Excedere – eccedere, superare

Excessus – eccesso, ossia la quantità della quale una grandezza (linea, perimetro o superficie) supera un'altra

Figura – figura, che indica non solamente la rappresentazione disegnata nel testo, ma anche l'oggetto geometrico costruito che si intende studiare.

Figura rectilinea – figura delimitata da linee dritte; a volte sta ad indicare anche la superficie

Figura poligona – poligono

Figura circularis – cerchio

Figura quadrangularis – figura con quattro lati, riferita tanto al quadrato quanto al rettangolo e al parallelogramma.

Freccia – freccia, retta perpendicolare al centro della corda dell'arco

Gradus – grado (ampiezza di un angolo)

Habitudo – rapporto

Helica – spirale

Hexagonus – esagono

Isoperimetris – isoperimetrico

Isopleurus – regolare

Latus – lato

Linea – linea; più generalmente, segmento di retta

Linea recta – linea retta, intesa come linea dritta, non curva

Linea prima – prima linea: linea tracciata dal centro verso la metà di un lato di un poligono, altrimenti detta il semidiametro del cerchio inscritto al poligono

Linea secunda – seconda linea: linea tracciata dal centro a uno degli angoli del poligono, altrimenti detta il semidiametro del cerchio circoscritto al poligono

Linea complementi – linea di complemento (Cfr. *De mathematicis complementis*, §85). Una linea di complemento è una linea del poligono inscritto che, aggiunta al semilato del poligono circoscritto corrispondente, forma il semilato del poligono di medesima superficie. Questa espressione sembra non avere alcun rapporto con il concetto di angoli complementari in un triangolo

Longitudo – altezza

Medietas – mezzo, media, metà

Medietas duplae – metà della doppia proporzione (cfr. *Quadratura circuli*, § 9, nota 25 etc.)

Medium – mezzo, ma anche medio

Multiangulus – multiangolo, poligono

Multiplicatio – moltiplicazione

Orthogonus – ortogonale, ad angolo retto

Pars aliquota – parte aliquota

Pentagonus – pentagono

Perimeter – perimetro inteso come linea di contorno; il termine *perimeter* è più frequente rispetto a *peripheria*

Peripheria – perimetro, circonferenza

Polygonum – poligono; *polygonum* è molto più utilizzato rispetto a *multiangulus*

Portio – parte, porzione di linea retta (segmento), porzione di linea curva (principalmente archi) o porzioni di superficie (settori circolari o segmenti di cerchio)

Potentia – quadrato (nel senso di seconda potenza)

Proportio – proporzione, rapporto, proporzionalità

Punctus – punto

Quadrangulus – rettangolo

Quadrangulus rectilineus – parallelogramma

Quadrans – quadrante (quarto di cerchio)

Quantitas – quantità, grandezza, lunghezza (riferito a una linea)

Rectilineus – rettilineo

Rectus – retto (per una linea o per un angolo)

Rhombus – rombo

Sagitta – freccia, cioè la frazione della perpendicolare alla metà di un arco compreso fra la corda e la circonferenza del cerchio. Cusano la definisce anche come la differenza fra la seconda e la prima linea

Sector – sia settore, cioè la porzione di superficie di un cerchio compresa fra due raggi e un arco di circonferenza, sia raggio

Sinus – seno; termine non ben definito. Cusano lo utilizza come sinonimo di curva o di arco, non nel senso attuale del rapporto fra il lato opposto all'angolo e l'ipotenusa

Sphaerea – sfera

Superficies – superficie in generale

Terminus – termine, limite, estremità (di un segmento)

Tetragonus – quadrilatero; lavorando sui poligoni regolari, Cusano utilizza più frequentemente *tetragonus* (quadrilatero) che *quadratus* per intendere il quadrato. Per rendere più scorrevole il testo, si è tradotto con quadrato

Triangulus – triangolo

Trigonus – triangolo; *trigonus* è utilizzato più frequentemente rispetto a *triangulus*

Versione originale latina

De geometricis transmutationibus

Traduzione italiana a p. 165.

1. Paulo magistri Dominici, physico Fiorentino, optimo atque doctissimo viro, liber de geometricis transmutationibus Nicolaus de Cusa cardinalis.

2. Etsi veteres magno ingenio praediti sedula indagatione conati sunt milita tunc abscondita sibi et posteris nota facere perfecerintque utiliter in plerisque maximis atque optimis artibus, non tamen omne desideratum, in quibusque altioribus theoriis attigerunt, praeordinante hoc universorum optimo provisore, ut in nobis vis illa divinae intelligentiae non torpeat, sed admiratione vehementiori ad ipsa latentia et scitu possibilia feratur. Ardentius quidem in obscuri penetrationem movemur, ut quietius de mentis vigorositate delectemur. Inter ea autem, quae geometricis speculationibus insudantibus hucusque impedimento fuere, unum ab omnibus, quorum vires ingenii libri, qui ad nostram notitiam deducti sunt, curiosius observant, incognitum remansit, de recti scilicet atque curvi aequalitate aut in invicem transmutatione statuenda, ita ut non minimis, immo paene omnibus huic inquisitioni deditis post immensos labores visum sit viam ad huius notitiam acquirendam a nobis sublatam, hoc rei impossibilitate agente et natura ipsam tantae oppositionis coincidentiam repellente. Ego vero rei huius difficultatem in parvitate apprehensionis et intermissione diligentiae, non summo acumine vigilantium, ut obscuritas negotii deposcit, potius existimans dato qualicumque otio ad artem novam, qua ad quaesitum pertingerem, me contuli ei diligenter satis ob altiores fines insudando, quousque cunctarum meditationum mearum subscriptam formula facilem resolutionem efficerem. Quoniam autem in tanta et hactenus ignota arte, a qua non tantum perfectio geometricae transmutationis dependet, sed et etiam introductio ad altiora ascendendi figuratur, non erat in obscuritate et parvitate ingenioli mei confidendum, recte statui ad te, arbitrum peritissimum atque veritatis zelatorem, confugere et iamdudum probatissimo amico inventionem pandere, ut in statera aequissimi iudicis extimetur. Noli igitur, amice dilectissime, ista, etiam si in maioribus verseris, quasi cruda indigestaque abicere. Lectu enim parva, intellectu vero facillima sunt. Sed quanto me ab annis iuventutis atque adolescentiae nostrae strictiori amicitiae nodo atque cordiali quodam amplexu indesinenter constrinxisti, tanto nunc accuratius emendationi animum adhibe et in communionem aliorum nisi correctum predire non sinas.

3. Post innumeros paene modos, quibus, semper tamen deficiens, ad institutam artem pervenire contendi, tandem ad principium, quo in De docta ignorantia usus sum, respiciens via mihi patefacta existit. Exigit autem ars, quam inquiro, praeter ea iam tradita in geometricis versionem curvi in rectum ac recti in curvum. Inter quae cum nulla rationalis proportio cadat, oportet in quadam coincidentia extremorum hoc latere secretum. Quae cum in maximo sit, ut alibi traditur, et maximum sit circulus, qui ignoratur, in minimo, qui est triangulus, inquiri ipsum debere ibi ostenditur.

4. Omnium autem figurarum multorum angulorum, quae polygoniae, et aequalium laterum, quae isopleurae, et eiusdem longitudinis laterum, quae eandem habentes peripheriam isoperimetrae dicuntur, triangularem minimae capacitatis existere constat. Et cum tanto quaelibet isoperimetra sit capacior, quanto plures angulos habuerit, erit circulus isoperimeter figurarum omnium capacissima. Ad quam per angulorum multiplicationem deveniri nequit, sicut nec in numero ad maximum. Nulla igitur polygonia ad circularem isoperimetram proportionem rationalem habere potest.

5. Quia vero differentia capacitatis isoperimetrarum figurarum correspondet differentiae ‹semidiametrorum› circulorum infrascriptorum eisdem, ut iam ante hoc notum est, quare nec circulus inscriptus, qui semper minor est, nec circumscriptus, qui semper maior est, ad circulum isoperimetrum rationalem proportionem habebit. Semidiametri autem illorum iam dictorum circulorum maxime inaequales in trigono existunt, in aliis successive minus inaequales, in circulo vero ‹isoperimetro› coincidentes, cum ibi inscriptus, circumscriptus et peripheria coincidant. Hinc inquirendum, qua arte ad coincidentiam ipsam atque propositum nostrum pertingere valeamus.

6. Videtur autem ad artis quaesitae sufficientiam primum pertinere, ut datae rectae detur aequalis curva. Secundo, ut secundum habitudinem curvae ad curvam detur recta ad rectam. Tertio, ut inter datas lineas duae proportionales assignentur. Quarto, ut secundum habitudinem duarum datarum sciatur ad tertiam datam dari quarta. Primum hactenus ignotum. Secundum nondum consideratum. Tertium a paucis obscure tactum. Quartum clare a multis explicatum. Complicatur in his omne, quod transmutatoriae huic arti opportunum est, ut praemissis istis, quae circa haec necessaria sunt, in exemplaribus subsumptionibus ostendere conabor.

Primum praemittendum

7. Posse lineam curvam esse, quae datae rectae nec maior nec minor sit, ab omnibus admittitur, licet non omnes eam signari posse affirment. Potest igitur peripheriae datae polygoniae circuli alicuius peripheria nec maior nec minor esse, ut sint isoperimetrae. Sed quomodo haec detur, inquirimus.

8. Quoniam autem tanto circulus polygoniae aequilaterae seu isopleurae circumscriptus maior est quanto ipsa paucorum angulorum, et ei inscriptus tanto minor, hinc nemo negare potest, quin omnis circulus polygoniae aequilaterae inscriptus minor sit circulo isoperimetro atque quod omnis circumscriptus maior. Quare inter inscriptum atque circumscriptum isoperimeter cadens habet semidiametrum omni semidiametro cuiuscumque inscripti circuli cuicumque polygoniae isopleurae et isoperimetrae maiorem et circumscripti semidiametro minorem. Manifestabitur autem id, quod quaerimus, post multos difficiliores modos facili consequentia ex hac propositione:

9. Semidiameter circuli isoperimetri trigono inscripto se habet ad lineam a centro circuli, cui trigonus inscribitur, ad quartam lateris ductam in proportione sesquiquarta.

10. Sit circulus super *a* centro descriptus, cui *bcd* trigonus inscribitur, diviso *bc* latere in quattuor partes aequales per *e, f, g* signatas. Dico, si de *a* ad *e* linea ducta extendatur per quartam sui, ut sit *ah*, illam fore semidiametrum circuli, cuius circumferentia aequatur tribus trigoni lateribus.

11. Hoc sic facillime verum comprobatur. Nam tracta de *a* ad *f* linea illam semidiametrum circuli inscripti fore constat, quae est omnium inscriptorum polygoniis isoperimetris minima. Et similiter linea de *a* ad *b* ducta est semidiameter circumscripti, quae est omnium circumscriptorum isoperimetris polygoniis maxima (cfr. figura 1). Et si de *a* prope *f* ad *i* punctum lineam duxeris extendendam secundum habitudinem *if* portionis ad *bc* latus, quae extensa sit *ak* illam minorem esse semidiametro circuli isoperimetri manifestum, cum semidiameter circuli isoperimetri sit omnium inscriptorum polygoniis isoperimetris maxima. Similiter si de *a* prope *b* ad punctum *f* linea ducta extensa fuerit secundum habitudinem portionis *if* ad *bc*, quae sit *am*, illam esse maiorem quaesita per se clarum est, cum quaesita sit omnium ‹semi›diametrorum circulorum circumscriptorum polygoniis isoperimetris mimima. Potest igitur inter *l* et *i* ad aliquem punctum de *a* linea duci, quae extensa secundum habitudinem portionis inter punctum illum et *f* cadentis ad latus *bc* aequabitur quaesitae.

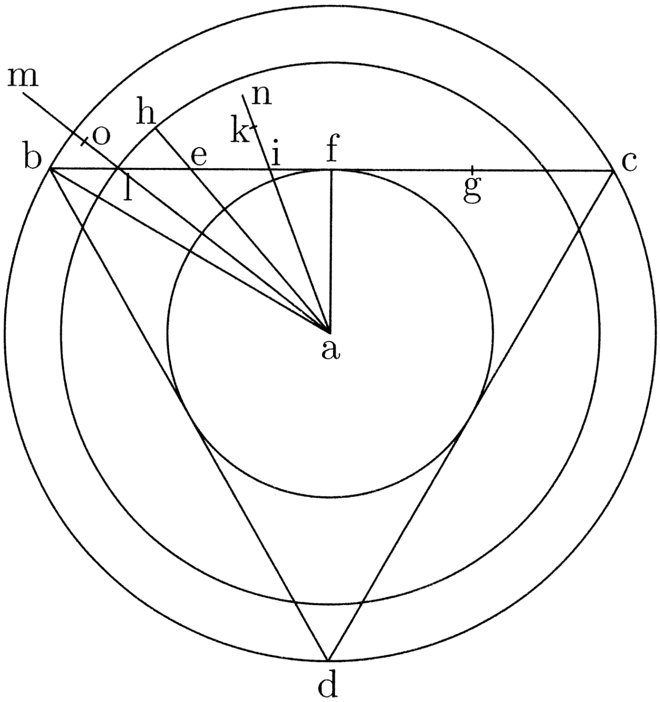


fig. 1

12. Pariformiter si fuerit linea *ai* extensa secundum habitudinem portionis *ib* ad *bc*, ut sit *an*, illam minorem fore quaesita manifestum est. Et similiter si fuerit *al* extensa secundum habitudinem *lb* ad *bc*, ut sit *ao*, illam maiorem esse quaesita certum existit. Cadet igitur inter *l* et *i* punctus, ad quem de *a* linea ducta et extensa secundum habitudinem portionis inter punctum illum et *b* cadentis ad *bc* latus aequabitur quaesitae. Unde uti reperitur punctus, puta *i*, ad quem linea ducta si extenditur secundum habitudinem ambarum portionum sive versus *b* sive versus *f* ad latus trigoni, remanet minor. Et alius punctus, videlicet *l*, reperitur, ad quem linea ducta sive extendatur secundum habitudinem unius sive alterius portionis ad latus trigoni, fit semper maior quaesita. Sic erit punctus *e* tertius, ad quem linea ducta et extensa secundum habitudinem cuiuscumque portionis ad latus trigoni non fit nec maior nec minor. Et constat alium quam *e* punctum esse non posse, in quo solum secundum utriusque portionis extensionem idem evenire potest.

13. Poteris pariformiter dicere: si *ai* linea extenditur secundum habitudinem *fi* ad *bc*, est minor, et similiter: si extenditur secundum habitudinem quadrati *if* ad quadratum *bf*, est minor. Et si *al* extenditur secundum habitudinem *lf* ad *bc*, est maior, et similiter: si extenditur secundum habitudinem quadrati *lf* ad quadratum *bf*, est maior. Erit igitur punctus inter *l* et *i*, ad quem linea ducta et extensa secundum habitudines duas iam dictas nec maior erit nec minor, et hoc necessario est *e*.

14. Poteris etiam adhuc adicere tertiam habitudinem, scilicet si *ai* extensa secundum habitudinem quadrati *if* ad quadratum *bf* et habitudinem *if* ad *bc* et habitudinem *bi* ad *bc*, semper est minor, et *al* secundum illas habitudines extensa est maior. Erit punctus ad quem linea de *a* ducta et secundum trinas istas habitudines extensa nec est maior nec minor, et iste est *e* punctus aequedistans a *b* et *f*.

15. Probatur autem idipsum hac via. Manifestum est in omni polygonia isoperimetra lineam de centro ad punctum medium lateris esse semidiametrum inscripti et continue secundum capacitatem maiorem polygoniae plus accedentem ad aequalitatem semidiametri circuli isoperimetri, et similiter lineam ductam de centro ad finalem terminum lateris esse semidiametrum circuli circumscripti et illam tanto minorem continue fieri, quanto capacior fuerit polygonia. Cadet igitur inter illa duo puncta, scilicet terminalem et medium lateris cuiuslibet polygoniae, punctus unus, ad quem si linea de centro ducitur et secundum habitudinem quadrati portionis inter punctum contactus et medium lateris ad quadratum medii lateris vel secundum habitudinem portionis ad latus extenditur, erit ut semidiameter circuli isoperimetri. Et hoc quidem nihil haesitationis habet.

16. Continget autem hunc punctum in omnibus polygoniis differenter distare ab illis duobus punctis, scilicet terminali et medio lateris, plus accedendo ad medium lateris et recedendo ab extremali, quanto capacior fuerit polygonia. Sicut igitur hic punctus continue accedit ad medialem in capacioribus, quousque in capacissima deveniatur ad coincidentiam omnium trium illorum punctorum, ita necessario in minus capacibus recedit punctus ille a mediali, quousque in minime capaci ab illis duobus punctis maxime distet. Quare *e* est medius punctus aequaliter maxime ab extremis distans, in quo incapacissimo trigono habetur quaesitum. Ob hoc omnis semidiameter circuli circumscripti cadit de *a* ad aliquem punctum lineae *be* secundum praefatas habitudines portionis versus *b* extensae, et *ae* sic extensa est omnium illarum minima. Hinc est semidiameter circuli isoperimetri, cum semidiameter illa sit omnium semidiametrorum talium circumscriptibilium circulorum minima, cum qua coincidit maxima semidiameter inscriptibilium. Unde in *e* puncto est coincidentia ascensionum de *f* versus *e* semidiametrorum inscriptibilium et descensionum de *b* versus *e* semidiametrorum circumscriptibilium, extensionibus factis secundum praefatas habitudines portionum versus *b* in una et versus *f* in alia.

Secundum praemittendum

17. Aiebam iam ante praemitti oportere, qua via habitudo attingeretur inter rectam et rectam, quae est inter curvam et curvam, quoniam, ut sequentia ostendent, perfectio transmutatoriae artis, quam inquirimus, non poterit hoc ignorato adipisci. Cumque ego inquirendo hoc ipsum ad rectilineum trigonum respicerem, ubi de portione lateris unius ad similem lateris alterius portionem linea ducta ad latus primum triangulum claudens, a quo aequedistat, eam habet proportionem qualem portio lateris alterius, per quam ducta est, ad totum latus; et simile in arcu inquirerem quale hic in latere rectilineo, vidi quod si triangulum depingerem unum latus arcuale habens et aliud rectilineale, tunc non possit linea per portionem arcualis lateris duci ad alterius lateris similem portionem, quae se ad latus rectilineum secundum quaesitam habitudinem habeat, si latus tertium fuerit rectilineum. Nam si latus curvum fuerit convexum, manifestum est de eius medio ad medium rectilineam ductam maiorem esse medietate lateris rectilinei triangulum claudentis. Si vero concavum fuerit, necessario minus erit.

18. Sic si arcuale fuerit latus, tunc si fuerit uti aliud, puta concavum si est concavum aut convexum si est convexum, erit linea maior aut minor per portionem tracta ut in genere iam statim praemisso. Sed si latus ipsum fuerit convexum alio existente concavo, et fuerint portiones arcuales eiusdem circumferentiae circularis et aequales, excedere necesse est lineam per portiones arcuales eiusdem ductam eam, quae secundum habitudinem esse debet quaesitam. Nam chordae si arcubus subtenduntur, eundem efficiunt angulum quem arcus. Et si fuerint chordae medietatum arcuum, iterum idem angulus exsurget. Et cum chordae medietatis excedant medietatem chordarum integri arcus, erit manifestum lineam de medietate ad medietatem ductam secundum excessum chordae medietatis arcus super medietatem chordae integri arcus excedere.

19. Oportet ergo alterum latus arcuale alio brevius esse. Non potest autem concavum brevius esse. Nam chordae si illis arcubus subtenderentur, angulus chordarum angulo arcuum minor esset, et ille angulo, qui ex chordis medietatis arcuum exsurgeret. Hinc linea de portione ad portionem tracta maior foret quaesita. Quare necesse erit, quod triangulus ille, quem quaerimus, sit ex tribus lateribus, quorum duo sint arcualia inaequalia, ita quod maius sit maior portio circumferentiae circuli et concave superficiem claudat, aliud vero arcuale latus minor sit portio circumferentiae eiusdem circuli et convexe superficiem trianguli terminet, tertium autem latus rectum existat. Necesse est autem, quod cum lateribus istis arcualibus chordas subtendis, quod angulus chordarum maior sit angulo arcuum et angulus chordarum medietatis arcuum maior angulo arcuum et minor angulo chordarum integrorum arcuum, tanto quidem minor, quanto excedunt chordae medietatis arcuum chordas medias integrorum. Et cum hac via conspicerem possibile fore dato triangulo iam dicto lineas per portiones ductas esse minores ac etiam esse maiores atque aequales quaesitis, quaerere proposui triangulum, cuius latus rectilineum esset ut semidiameter circuli laterum arcualium, et quod latus maius arcuale esset ut quadrans.

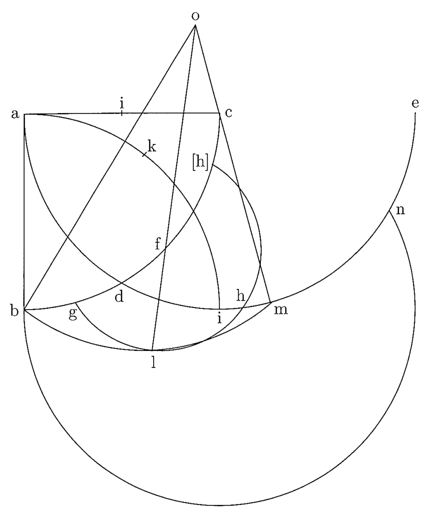


fig. 2

20. Descripsi igitur quadrantem *bc* super *a* centro ac posito pede circini in *c* descripsi semicirculum *ade* (cfr. figura 2). Divisi arcum *bc* per medium significando *f*, descripsi semicirculum super *f*, qui sit *gh*, cuius semidiameter ut medietas *ac*. Descripsi super *b* semicirculum occultum *ik* et in eius circumferentia quaesivi punctum, in quo posito uno pede circini et alio in *b* extenso arcum describerem, qui transiret per semicirculum minorem *gh* ad semicirculum maiorem *ade*, ita quod punctus arcus illius, ubi secatur semicirculus *gh*, puta *l*, sit medius totius arcus aequedistans a *b* puncto et a puncto contractus arcus *de*, puta *m*. Aequaliter traxi igitur lineam *cm* et habui triangulum *cbm* quaesitum. Cum autem quaererem punctum *m*, adverti ipsum necessario debere distare a *d* per medietatem arcus *bc*, puta medietatem quadrantis. Nam hic punctus est cadens inter propinquissimum et remotissimum possibiles. Posito enim pede circini in circumferentia occulta *aki*, scilicet in *a*, propinquissimus punctus erit *d*, qui est coincidens cum *bc* arcu. Et si posuero pedem circini in puncto, ubi arcus occultus *aki* secat *de*, puta in *i*, et descripsero *bn* arcum, erit *n* maxime distans. Non enim poterit in arcu *de* punctus reperiri plus distans a *d*. Manifestum est autem *d n* in arcu *de* per quadrantem distare, in cuius medio est *m* punctus, in quo extrema ad aequalitatem mediam reducta reperiuntur. Hac via triangulum quaesitum adinveni.

21. Post haec adverti, si *cm* ducerem in continuum et directum in infinitum et ducerem de *l* per *f* lineam similiter in continuum, quod necessario illae in aliquo puncto concurrerent, cum non sint aequedistantes. Notavi igitur punctum concursus per *o* punctum. Consideravi igitur, quod lineae omnes, quae de portione ad portionem et in continuum ducerentur, cum ambabus illis necessario concurrerent, nec citius cum una quam cum alia. Quare omnes in *o* puncto convenirent. Habui igitur, quod si de *o* puncto linea duceretur per quamcumque portionem quadrantis *bc* usque ad arcum *bm*, quod portio lineae rectae illius illos inter arcus cadens se habebit ad rectam *cm* sicut portio arcus de *b* ad sectionem lineae rectae ad totam quadrantem *bc*, puta eadem est proportio arcus *bf* ad *bc* quadrantem, quae est lineae *fl* ad lineam *cm*, et hoc erat quaesitum.

Tertium praemittendum

22. Tertium, quod antemittendum asserui, est quomodo inter datas lineas duae proportionales statuantur. Iamdudum notissimum fuit, si datae duae lineae simul iunctae diameter circuli fiant et eas chorda orthogonaliter separaverit, quod semichorda est medio loco inter ipsas proportionalis, quoniam semichordam inter sagittam et residuum diametri mediare necessarium est (cfr. figura 3). Si igitur duae lineae indefinitae longitudinis, ut *ab* et *cd*, se orthogonaliter secaverint in *e* puncto, et de *e* versus *d* minorem lineam signavero, quae sit *ef*, et de *e* versus *a* maiorem, quae sit *eg*, descripseroque duos semicirculos, unum super centro in linea *ec*, puta *k*, alium super centro in *ea*, puta *h*, existente hac quadam advertentia, quod arcus semicirculi, cuius centrum reperitur in *ea* linea, concurrat cum arcu alterius semicirculi in linea *eb* et linea *ec*, puta punctis *i* et *l*. Nemo haesitare potest *ei* et *el* mediare, ex praemissa notissima regula unici medii proportionalis, inter *ef* et *eg*.

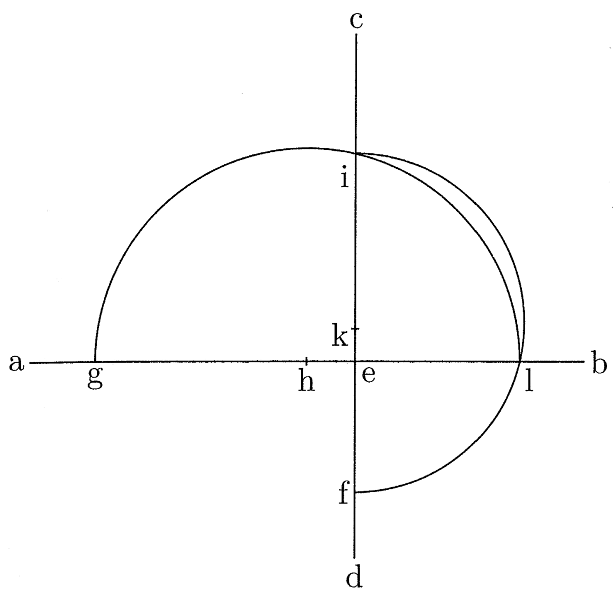


fig. 3

23. Unde, ut in praxi haec media facile attingas, habeto gnomonem atque lineam unam, quae ad latus gnomonis applicata rectangulum efficiat (cfr. figura 4). Et iuxta praemissa duas indefinitae quantitatis lineas sic fac orthogonaliter secare, ponas deinde rectum angulum gnomonis super lineam *eb* et latus unum super *f*, et nota, ubi reliquum latus *ec* secaverit, applica ibi regulam ad latus, de qua dixi, ut rectangulum efficiat. Si haec regula per *g* transiverit, habes quaesitum. Si non, gnomonem in *eb* attrahe vel elonga, quousque ita evenerit, et habes media illa duo, quae inquiris. Possunt quidem et alii plerique modi de facili inveniri per eum, qui studium adhibere voluerit. Sed hic modus cum clarus sit, ad praesens sufficit.

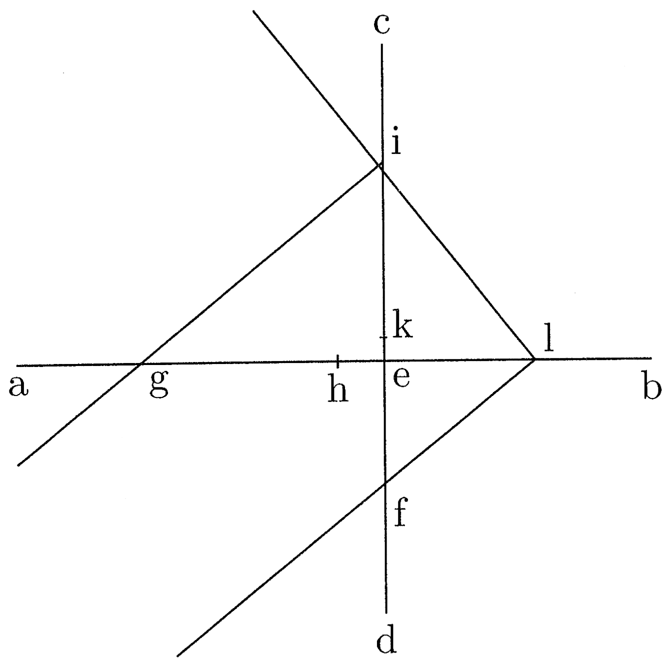


fig. 4

24. Quomodo autem ad tres datas proportionales lineas quarta continuae proportionis linea subiungi valeat, iam ante atque ex praemissis relinquo manifestum.

Quartum praemittendum

25. Quartum autem, quomodo in habitudine datarum ad tertiam datam detur quarta, omnibus paene manifestum in praxi, per duos triangulos unum angulum communem et ceteros aequales habentes inquiras (cfr. figura 5). Nam si *ab* est linea una, alla *cd*, tertia *ef*, iunge ad angulum quemvis *ab* et *cd*, qui sit *ghi*, et claude trigonum. Deinde continua *gh* latus aequale *ab*, quousque fuerit aequale *ef*, et sit *gk*. Trahe aequedistantem ad *hi*, quae sit *kl*, et continua *gi* usque in ipsam, et sit *gm*. Nulli nisi parum sciolo dubium est *km* lineam ad *gk*, quae aequatur *ef*, se habere ut *hi*, quae aequatur *cd*, ad *gh*, quae aequatur *ab*. Haec de praemittendis sic dicta sint.

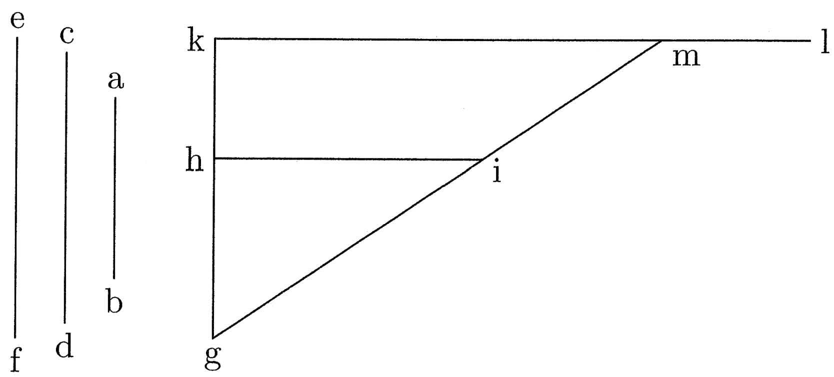


fig. 5

De linearum in invicem transmutatione – capitulum primum

26. Omnis autem transmutatio in geometricis figuris est vel lineae in lineam, vel superficiei in superficiem, aut corporis in corpus. Tria igitur sunt capitula, quae seriatim per exemplari manuductione tangi convenit.

27. Si lineam rectam in circumferentialem curvam vertere cupis, ipsam rectam in triangulum aut polygoniam isopleuram resolvito et ex primo praemissorum circulum isoperimetrum elicito, cuius circumferentia datae rectae adaequabitur.

28. Si rectam in aliquotam circumferentiae portionem resolvere quaeris, ipsam in circularem integram resolvito, et ex proportione illius ad partem aliquotam pervenies ad quaesitum. Nam eadem est habitudo circumferentiarum quae semidiametrorum.

29. Si datam rectam in quadrantem resolvi optas, quarta circumferentiae circuli, cuius semidiameter est quadrupla, est quaesitum.

30. Si datam rectam in portionem circumferentiae dati circuli transferre quaeris, eam primo in circonferentiam circuli commuta, et ex nota habitudine semidiametrorum inventi et prius dati circulorum propositum notificabitur.

31. Si curvam lineam in rectam vertere studes, non alio umquam hoc facies ingenio quam ex ope quarti praemissi. In qua re paene omnes errasse comperio. Nam curva linea non potest inrectam mutari nisi ex proportione alicuius rectae in curvam versae. Dum igitur hoc agere proponis, primo rectam in circumferentialem vertito et huius circuli semidiametrum notato pro prima linea. Deinde tertiam rectae versae aut aliam portionem eius facito secundam lineam, et tertiam semidiametrum circuli, cuius circumferentiam rectilineare proponis, signato. Et triangulos claudito, quorum angulus unus communis et alii aequales, lateraque communi angulo opposita aequedistantia existant. Erit enim secundum latus portio lineae quaesitae, scilicet pars tertia, si latus aequedistans primum pars tertia circumferentiae fuerit; si alia, tunc alia. Per hoc scitur versio circumferentiae in rectam. Scitur etiam versio arcus, qui est pars aliquota et nota circumferentiae.

32. Quod si ignoraveris proportionem dati arcus ad circumferentiam, cuius rectilineationem perquiris, utere secundo praemisso et fac lineam de *o* puncto concursus per arcum quaesitum aut eius aliquotam usque ad arcum alium transire, et lineam inter arcus cadentem notato. Deinde fac semidiametrum esse lineam primam, et lineam aequalem quadranti aut eius aliquotam fac secundam, et lineam tertiam facito eam, quam inter arcus cadentem annotasti. Et iuxta quartum praemissum per triangulos quaesitam lineam reperies.

33. Neque alia via hoc quaesitum attingetur, qua etiam si advertis duci poteris, ut datam rectam in arcum vertas datae circumferentiae, etiam si eius arcus ad circumferentiam proportio ignota existat (cfr. figura 6). Hoc autem eo ingenio: Semidiametrum circuli fac latus primum trianguli, et lineam rectam quartae circumferentiae aliud claudendo trigonum, ut si semidiameter sit ut *ab*, et *bc* ut quarta circumferentiae, claudendo linea *ca* trigonum. Deinde fac lineam datam aut eius aliquotam cadere in eo trigono aequedistantem ad *bc*, et sit *de*. Post hoc de *b* versus *c* signa aequalem semidiametro *ab* lineam, quae sit *bf*, trahe *af* lineam et nota sectionem *de*, quam nota per *g* litteram. Deinde recurre ad secundum praemissum et lineam ducito de communi puncto concursus, quousque inter arcus cadat aequalis portio ad *dg*, et hic est arcus aequalis datae lineae aut portio aliquota arcus quaesiti, si cum portione lineae fueris operatus.

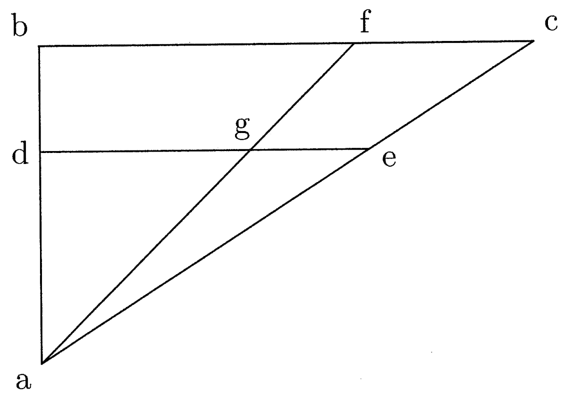


fig. 6

34. Poteris etiam ex his datam curvam et cuiuscumque circumferentiae arcum quemcumque in alium arcum alterius circuli vertere, transmutando primo ipsam datam curvam in lineam rectam et deinde illam rectam in arcum datae circumferentiae modis praetactis. Et in hoc capitulum transmutationis linearum sufficienter explicatum existit.

De superficierum in invicem transmutatione – capitulum secundum

35. Superficierum transmutati ut sufficienter explicetur et superflua resecentur, rectilinealium superficierum versionem uti notam praetergredior. Nam triangulum posse in plures scindi triangulos, et quemlibet in quadrangulum verti et illorum quemlibet in quadratum, et plura quadrata in unum, atque trigonum unum in plures aequiangulos trigonos, et triangulum similiter atque quadratum sic et omnia polygonia isopleura et non isopleura in alias figuras, haec omnia ex elementis geometricis et proportione circulorum et quadratorum tibi nota relinquo, cum intendam adicere scitis et non replicare trita. Per ea autem, quae iam ante tetigi, facilitas huius capituli aperitur.

36. Superficiem circularem si in rectilinearem transmutare proponis, primo eius peripheriam curvam in rectam resolvito, deinde semidiametrum peripheriae ad rectum angulum iungito trigonum claudendo, et versa est circularis superficies in trigonam. Si in tetragonam, quadrangulam et quadratam, hoc ex trigono facile est. Circulus enim quadratur, si inter semidiametrum et medium peripheriae lineam medio loco proportionalem costam feceris et quadraveris. Ostensum enim est a subtilioribus per multiplicationem semidiametri in medietatem peripheriae aream quadrangulam exsurgere, quae nec maior nec minor erit areae circuli. Multiplicatio enim semidiametri circuli inscripti polygoniae in medietatem peripheriae areae polygoniae inscriptae aequatur, et multiplicatio semidiametri circuli circumscripti in medietatem peripheriae polygoniae est maior area polygoniae et minor area circuli, et multipIicatio ipsius semidiametri circuli inscripti in medietatem peripheriae omnis polygoniae circumscriptae pariformiter areae eius similis est, hinc maior area circuli. Quare multiplicatio semidiametri in medietatem peripheriae circuli nec maior nec minor esse poterit.

37. Si vero quaeris aream superficiei rectilinealis in circularem transmutare, primo circularem resolvito per iam dicta in polygoniam, puta quadratam, et semidiametrum circuli facito lineam unam, costam quadrati aliam. Deinde superficiem rectangulam datam quadra, et costam eius facito lineam tertiam. Et secundum quartum praemissum quartam lineam reperies, quae erit semidiameter circuli quaesiti. Et attende, quomodo non devenitur ad versionem circumferentialis lineae in rectam nisi per versionem rectae alicuius in circumferentialem. Et e contrario non devenitur ad transmutationem superficiei rectilinealis in circularem nisi mediante versione alicuius circularis in rectilinealem. Quae hic lateant arcana, praesentis propositi non existunt.

38. Si vero quamcumque portionem superficiei circularis inter sectores cadentem, sive illa proportionalis sit ad superficiem totam sive non, vertere cupis, artem habes arcum inter sectores interceptum resolvendo in rectam et semidiametrum in medietatem eius multiplicando.

39. Sic si abscisionem ex chorda et arcu in rectam superficiem redigere conaris, primo a centro sectoribus tractis totam portionem per iam dicta resolvis in circulum, deinde triangulum ex sectoribus et chorda similiter in circulum, et subtracto illo a priori portio remanet resoluta in superficiem cadentem inter circumferentias amborum, quae resolvi potest in rectangulam superficiem per resolutionem utriusque circuli in quadratam et per subtractionem unius quadratae ab alia, quoniam differentia est uti portio illa. Poterit igitur illa in quadratam superficiem et per quadratam in circularem resolvi modis sufficienter praeexpressis. Et in hoc satis exemplificatum est ad artis sufficientiam de superficierum in invicem transmutatione.

40. Possent adiungi praeter necessitatem transmutatoriae artis alia plura occulta hactenus, quomodo scilicet angulus describi posset circa centrum circuli se habens inter duos duplos angulos secundum proportionem medietatis duplae, et hoc ex secundo praemisso. Potest enim dari linea recta ad datam se habentem ut costa ad diametrum. Possunt et ambae in arcus eiusdem circumferentiae resolvi. Unde sectores ad terminos arcuum tracti angulos circa centrum causare secundum habitudinem arcuum necesse erit.

41. Si etiam superficiem unam resolvere quaeris in plures, quot volueris, quae sunt ad se et totam superficiem improportionales, ita tamen quod si addideris unam ad aliam, composita totius aliquota sit, superficiem illam, si semicircularis non fuerit, in talem resolvito trahendo chordam aequedistantem diametro arcus quadrantis, quae medium divisionis vocetur (cfr. figura 7). Ab ea ex utraque parte per aequales arcus maiores et minores chordas ducito, quot volueris. Erunt omnes portiones improportionales ad se et ad totam. Sed si duas aequedistantes a medio divisionis iunxeris, erunt talis pars superficiei, qualis circumferentiae fuerit arcus. Qua via de media superficie semicirculari abscindere poteris partem aliquotam eius, quam volueris. Huius ostensio est, cum trianguli ex sectoribus et chordis a medio divisionis hinc inde per aequales arcus distantibus sint necessario aequales et maximus sit ille triangulus, qui ex sectoribus et chorda, quae divisionis medium vocatur, constituitur. Poteris etiam superficiem dividere in partes, quarum una, si cuicumque alteri iuncta fuerit, [quod] adhuc composita ex ipsis superficies improportionalis remaneat, quando scilicet a medio divisionis per improportionales arcus ad circumferentiam chordas duxeris. Ex his alia ut libet elicias.

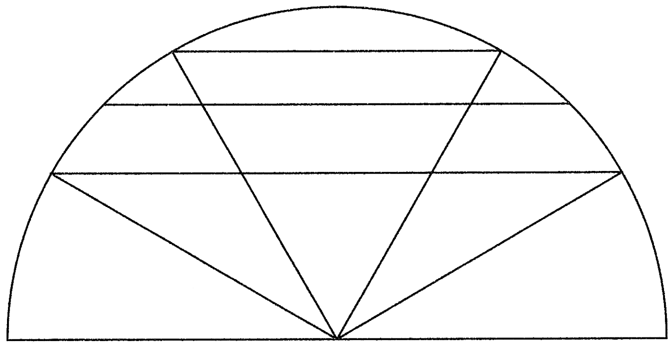


fig. 7

De corporalium figurarum in invicem transmutatione – capitulum tertium

42. Ultimo loco restat corporum transmutationem exemplari manuductione aperire. Transmutantur autem corporales figurae in corporales ex apertis fundamentis.

43. Nam columna quadrangula in cubum sic reducitur. Basis eius si quadrata non fuerit, quadretur per medium proportionale inter duo dissimilia eius latera. Inter hoc latus et longitudinem corporis constituantur duae continue proportionales lineae secundum tertium praemissum, et si longitudo 'H 'maior fuerit latere quadrati, minus medium est latus cubi quaesiti. Sed si latus quadrati fuerit maius longitudine, maius medium est quaesitum. Si aequale, iam cubus habetur. Si columna fuerit rotunda, quadretur basis et procedatur, ut iam dictum est.

44. Sed si cubum in sphaeram transmutare velis, reduc superficiem quadratam cubi in circulum et illum facito maiorem circulum sphaerae.

45. Cubos plures si in unum colligere optas, hoc efficias, si aequales fuerint, lineam unam signando pro minori, quae aequetur uni lateri unius, et aliam pro maiori, quae omnibus lateribus, duplex medium inter illos capiendo secundum tertium praemissum, quoniam minus inter illa duo latus est quadrati, uti de columna praemisimus.

46. Sed si duos inaequales ad unum conducere proponis, reduc primo minorem cubum ad corpus altera parte longius, cuius longitudo sit aequalis lateri maioris cubi, hoc modo: Accipe latus maioris, cui adiunge directe latus minoris, unum proportionale medium quaerendo inter illa, et linea alia reperiatur continue proportionalis post latus minoris, ut sint quattuor lineae continue proportionales. Et illa ultimo inventa est latus quadrati basis huius corporis altera parte longioris, et latus maioris quadrati est eius longitudo, ut ex opposito conversionis columnae patere potest. Quo reducto quaere quadratum aequale duobus, maioris cubi et basis iam dicti altera parte longioris, reducendo cubum maiorem et iam dictum corpus ad unum corpus, cuius latus basis quadratae est maius longitudine eius. Et hoc corpus ultimo ad cubum reducito per datam doctrinam. Ita patet via, quot volueris sive aequales sive inaequales cubos ad unum cubum sive denique ad sphaeram transmutandi. Ita quidem et sphaerae plures in unam et in cubum aut corpus altera parte longius reduci poterunt.

47. Sed si columnam longam in brevem vel brevem in longam reducere proponis, primo ipsam in cubum verte, deinde longitudinem signa, in quam eam transmutare proponis. Cui adiunge latus cubi quaerendo medium unum proportionale et quartam quantitatem continue proportionalem ad istas tres. Et erit datae longitudinis columnae basis quadrata linea quarta.

48. Sic si plurium columnarum aequalium vel inaequalium unam datae quaeris longitudinis, si aequales fuerint, basim unam omnibus aequalem recipito, quam in cubum reducito et cubum in columnam datae longitudinis per vias praeapertas. Si inaequales, reducito ingenio tuo omnes in columnam et columnam in cubum et illum in columnam longam vel brevem, prout placuerit. Sed in hoc opus est, ut caveas, quoniam quando cubus in corpus reduci debet, cuius latus basis quadratae est maius longitudine, tunc basis latus iungas cum longitudine dati minori quaerendo medium unum proportionale. Quo habito lineam quartam invenies se ad illam habentem sicut latus basis cubi ‹ad longitudinem›, et illa erit latus basis quadratae talis corporis, in quod alia reducere proponebas. Sed si optas, quod longitudo illius quaerendi corporis sit maior latere basis quadratae eius, iunge illam longitudinem cum latere cubi directe medium proportionale quaerendo, post latus cubi quarta linea continue proportionalis est latus quaesitum.

49. Si autem sphaeram in pyramidem transmutare quaeris, fac quod basis pyramidis aequetur curvae superficiei sphaerae et altitudo eius ‹semi›diametro sphaerae.

50. Si quis dixerit: sunt sphaerae duae, quarum maior est dupla ad minorem, transfer illas in rotundam columnam, fac quod columnae altitudo sit ut diameter sphaerae ‹maioris› et basis ut maior circulus eiusdem. Illa etenim columna ambabus aequatur sphaeris. Nam columna, cuius altitudo diametro et basis maximo circulo sphaerae aequantur, sesquialtera est ad sphaeram.

51. Talia quidem et quae in regularibus corporibus via transmutationis figurarum geometrice fieri possunt, ex his elicito doctrinis.

‹Additamentum›

In editionibus σ hic textus capitulorum 20 et 21 traditus est

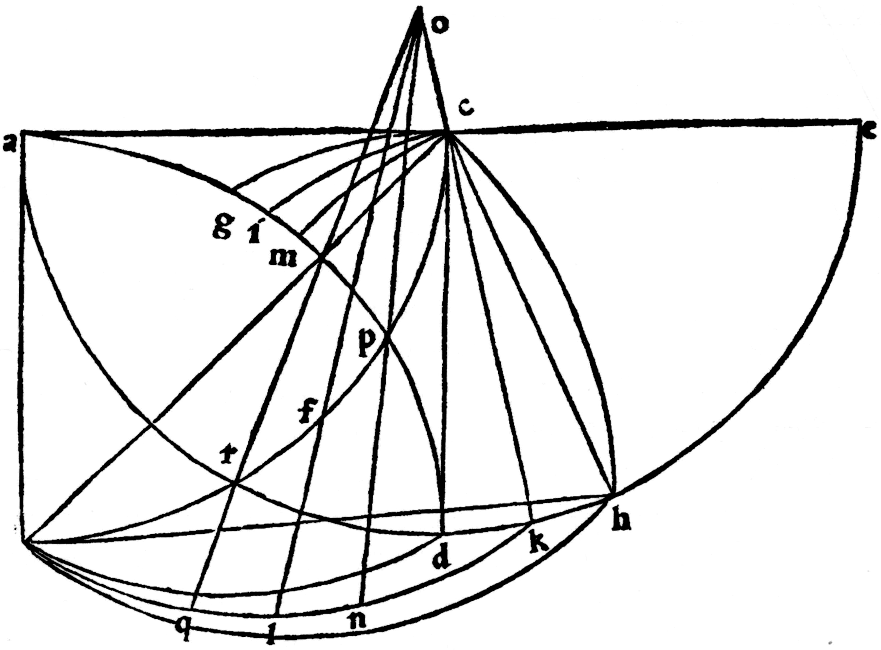


fig. 8

α. Descripsi igitur quadrantem *bc* super *a* centro, et posito pede circini in *c* descripsi semicirculum *ade* (cfr. figura 8). Quaesivi in dicto genere triangulorum minimum et vidi, si recta ducatur a puncto *c* ad punctum *d*, describet angulum contingentiae cum quadrante, quare tertium latus claudens istum triangulum erit minimum, cum angulus, cui subtenditur, scilicet contingentiae, minimus dicatur. Facto igitur *b* centro circumduco *ab* et quadrantem occultum describo *ad* aequalem quadranti *bc*. Rursus facto *d* centrum circumduco *cd*, et ubi secat quadrantem occultum *ad*, pono *g*. Et posito pede circini in *g* et alio in *b* moveo *b* usque ad punctum *d*; eritque arcus descriptus, scilicet *bd*, eiusdem circularis cum arcu quadrantis *bc*. Omnes quippe rectas ductas a quadrante occulto ad punctum *b* ‹cum sint aequales› arcus eiusdem circularis sive aequalium circulorum describere est necesse.

β. Erit *bd* latus arcuale minimum et convexum; quare triangulus *bcd* erit minimus in dicto genere triangulorum, cum contineat minimum angulum, scilicet contingentiae, ratione cuius *bd* arcuale latus ei subtensum minimum est. Et quia minimum, erit *bc* latus arcuale maximum. Non enim potest dari latus minus *bd*; si enim minus esset, tunc *dc* latus rectilineum quadrantem *bc* secaret, et sic triangulus iste non esset in genere quaesitorum. Est igitur *bcd* triangulus, cuius duo latera arcualia sunt *bc* et *bd*, et maius concavum est et quadrans, alterum convexum et minus; quae latera arcualia sunt eiusdem circularis, cuius semidiameter est tertium latus rectilineum, scilicet *dc*. Et quia in isto genere non potest dari triangulus, cuius latus convexum minus sit *bd*, erit igitur in isto genere triangulorum *bcd* triangulus minimus. Rursus cum in isto genere triangulorum dabiles sint maiores, quorum scilicet arcuale latus convexum maius sit arcu *bd*, recte maximus dabitur, ubi arcuale latus et convexum aequale erit concavo, quod est maximum. Ad quod describendum traho *bc* rectam, et facto *b* centro circumduco *bc,* et ubi secat semicirculum, pono *h*. Traho *hc* et facto *h* centro circumduco *hc*, et ubi secat quadrantem occultum, pono *m*. Rursus posito pede circini in *m* puncto et alio in *b* moveo *b* usque *h*; erit arcus descriptus, scilicet *bh*, aequalis quadranti *bc*. Nam aequali semidiametro descripti sunt, et chordae arcuum sunt aequales; quare eiusdem circularis erunt. Quo fit, ut triangulus *bhc*, cuius duo latera arcualia eiusdem circularis aequalia sunt, scilicet arcus *bc* et arcus *bh*, tertium vero rectilineum, scilicet *hc*, aequale semidiametro circulorum arcuum, sit maximus in dicto genere triangulorum; nam minimum latus cum maximo coincidit. Rursus cum in triangulo minimo, scilicet *bcd*, recta a medietate lateris arcualis ducta ad medietatem alterius lateris arcualis minor sit medietate lateris rectilinei, erit maxime minor, quia minimus triangulus. Et cum recta ducta a medietate lateris arcualis ad medietatem alterius arcualis lateris in maximo triangulo, scilicet *cbh*, sit maior medietate lateris rectilinei (eo quod latera arcualia aequalia sint), erit ipsa recta ducta maxime maior, quia in maximo triangulo. Quo fit, ut in mediali triangulo et aequidistanti a maximo et minimo, in quo scilicet maximus et minimus coincidunt, recta a medietate lateris arcualis ad medietatem alterius lateris arcualis non sit nec maior nec minor medietate lateris rectilinei; quare talis medialis triangulus erit quaesitus.

γ. Ad quem habendum divido arcum *dh* in duo aequa per punctum *k* et traho *kc*, factoque *k* centro circumduco *kc*, et ubi secat quadrantem occultum, pono *i*. Et posito uno pede circini in *i* puncto et alio in *b* moveo *b* usque *k*, et descriptus erit arcus *bk*, qui cum arcu quadrantis *bc* et recta *kc* describet triangulum quaesitum. Nam latus maius et arcuale est quadrans et concavum, quod cum alio arcuali et convexo, scilicet *bk*, eiusdem est circularis; latus vero tertium rectilineum est et aequale semidiametro circuli arcuum.

δ. Cum enim *cbh* maximus triangulus movetur ad medium continue decrescendo, et *bdc* minimus ad medium continue crescendo movetur, ipsi in aliquo coincident triangulo, et non nisi in triangulo *bkc*, qui est quaesitus. Rursus dividatur *cb* latus arcuale in duo aequa in puncto *f*, similiter et *bk* aliud arcuale in puncto *l*, et fiat *kc* indefinitae quantitatis, et ducatur alia recta a puncto *l* per punctum *f*. Quia *kc* et *fl* non sunt aequidistantes, necessario in aliquo concurrent puncto, qui sit *o*; erit *o* punctus concursus linearum *kc* et *fl*. Unde erit *lf* ad *kc* sicut *bl* ad *bk* vel *bf* ad *bc*.

ε. Et quotquot rectae a puncto concursus ductae dividentes duo latera arcualia, rectae cadentes inter ipsa ullam proportionem ad rectilineum latus servabunt, quam portiones laterum arcualium versus angulum *b* ad latera arcualia. Ut *on*, quae per *p* transit, et *bp* duae sunt tertiae de *bc*, erit pariter et *nb* ut duae tertiae de *bk*, et *np* ut duae tertiae de *kc*. Rursus *oq*, quae transit per *r*; et *rb* est ut una tertia de *bc*, erit pariter *bq* ut una tertia de *bk*, similiter *qr* ut una tertia de *kc*. Et hoc ideo, quia *bkc* triangulus aequidistans est a maximo, scilicet *bhc*, et minimo, scilicet *bdc*, in quibus est maxime plus et minus (ut dictum est); quare in isto mediali nec plus nec minus erit, cum in ipso maximus et minimus triangulus coincidant.

De arithmeticis complementis

Traduzione italiana a p. 185.

1. Nicolai de Cusa cardinalis ad Paulum physicum, optimum atque doctissimum virum, de arithmeticis complementis.

Paule optime, pauca quaedam complementa de arithmeticis habitudinibus, quamvis tibi atque omnibus nota esse possint ex iis, quae in tractatu geometricarum transmutationum enodavi, a te corrigenda, impigre tamen ea subieci. Dico autem, quod coincidentia anguli et lineae in diversis polygoniis isoperimetris nos ducit ad circulum isoperimetrum, ut ostendimus in primo geometricarum transmutationum supposito. Hinc via nobis patet ea, quae ad complementum arithmeticae spectant, omni attingibili modo numerandi. Id autem, quod dico, principaliter hactenus ignoratum fuit, habitudo scilicet chordae ad arcum. In cuius notitia complementum illud consistit, qua scita nihil difficile manebit arithmetice numerandi.

2. Fuerunt viri diligentissimi, quorum princeps videtur Archimedes, qui ostenderunt circumferentiam circuli triplam in habitudine ad diametrum additis plus decem septuagesimis primis ipsius diametri et minus decem septuagesimis, et hanc propinquitatem praecisiorem continue fieri posse ostenderunt. Non tamen tradiderunt, ubi numero inattingibilis praecisio latitaret. Nam etsi non possit numerari costa numerato diametro quadrati, pertingitur tamen ad numerum, cuius radicem si numerari posset, scimus innumerabilem costam. Tale quid non repperi veteres aut scivisse saltem nobis tradidisse.

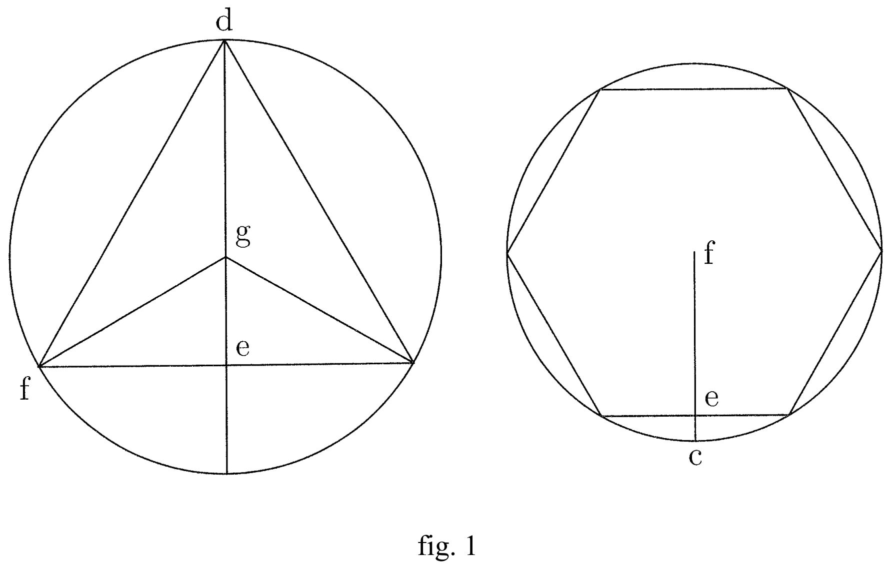


fig. 1

3. Verum si hoc sciri poterit, artem ex iam traditis sic venari posse conicio et figuram ultimam, quam ibi posui, brevitatis causa hic praetermitto (cfr. figura 1). Constat autem, quoniam habitudo lateris hexagoni ad semidiametrum circuli circumscripti trigono isoperimetro in quadratis nota est, cum quadratum *dg* si est 4, quadratum lateris hexagoni isoperimetri, quoniam est medietas chordae subtensae tertiae parti circumferentiae eiusdem circuli, est ut tria. Notum est consequenter *ed* quadratum, quoniam si quadratum *dg* est 4, quadratum *ed* est 9, cum *dg* sit duplum ad *ge*. Sic erit *fe* nota, quia est latus hexagonicum, cuius quadratum est ut tria in habitudine, qua quadratum *dg* est ut 4; erit similiter *ec* sic nota. Sic erunt lineae *ed* et *ef* notae. Et quoniam trianguli *egl* et *ecn* sunt aequianguli, latera eandem tenent proportionem. Eadem ergo est proportio *ge* ad *el,* quae est *ce* ad *en* (cfr. figura 2).

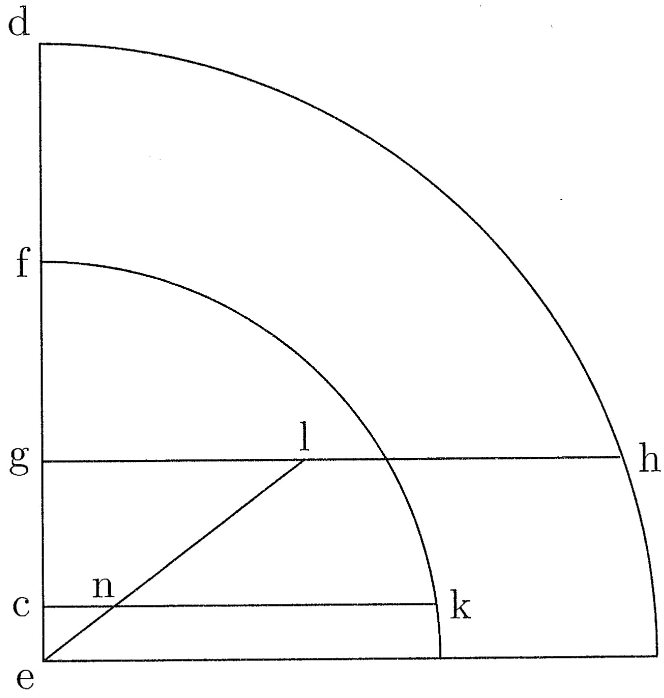


fig. 2

4. Inveniantur igitur duae quantitates, quarum maior se habeat ad *eg* sicut minor ad *ec*, sic quod subtracta maiori de *ed* et minori de *ef* remanentia sint aequalia. Remanens illud est semidiameter circuli isoperimetri polygoniae hexagonae vel trigonae, quae sunt isoperimetrae. Et quia habitudo peripheriae polygoniae ad *de* est nota habitudo semidiametri circuli isoperimetri ad *de* est nota, erit habitudo diametri ad circumferentiam omni scibili modo nota, ut scias, quid sit id quod quaeris, quod numerus non attingit, ut ignorantiam ac defectus rationis numerantis videat intellectus.

5. Palam ex his est posse omnem habitudinem quarumcumque chordarum ad arcum atque diametrum inquiri. Nam si loco hexagoni qualemcumque polygoniam receperis, omnia uti in hexagano posse attingi manifestum est. Et ut id ipsum intueamur, describamus semicirculum, cuius semidiameter sit ut semidiameter circuli circumscripti trigono, et tracta semidiametro ad medium arcus de *g* centro, quae sit *dg*, notato in arcu de *d* hinc inde arcum habitudinis ad circumferentiam secundum latera polygoniae, quae sunt chordae quaerendae (cfr. figura 3). Puta quod velis chordam 45 graduum, signabis arcum 22 graduum cum I semis hinc inde a puncto *d*, et signa loca per *s* et *t*, trahendo semichordam de *s* versus *t*, quae in semidiametro *dg* terminata puncto *v* signetur. Et quoniam 45 gradus sunt octava circumferentiae, erit polygonia tot angulorum et laterum. Trahe igitur de *g* centro ad punctum *s* lineam. Deinde divide lineam rectam peripheriae polygoniae trigonae in 8 partes, et medietatem unius partis fac aequedistanter cadere ab *sv* inter *gs* et *gd*, et sit *xy*. Deinde describe arcum super *g* secundum semidiametrum *xg*, quousque pertingat in *dg*, notando per *z* punctum contactus arcus et semidiametri *dg*.

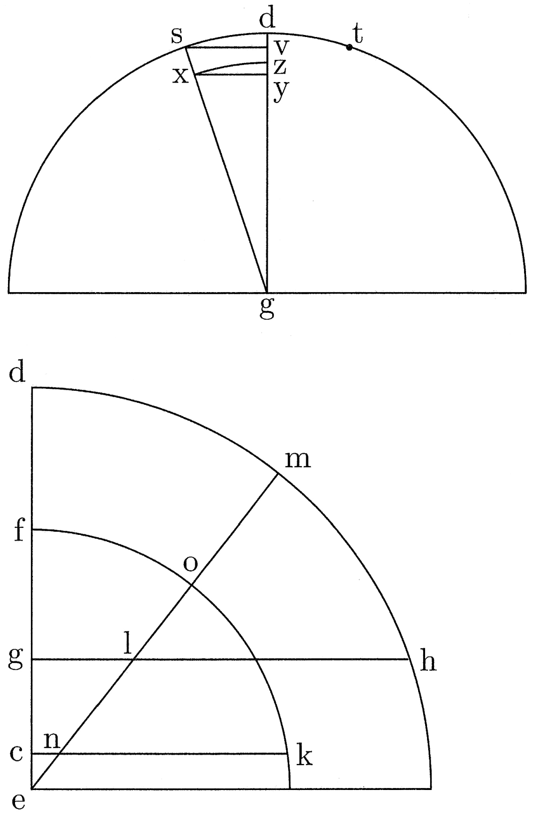


fig. 3

6. Post haec describe quadrantes duos ut statim praemisi praecise faciendo *ed* semidiametrum aequalem semidiametro circuli trigono circumscripti et excessui eius super semidiametrum circuli inscripti eidem trigono, et *ef* semidiametrum secundi quadrantis, faciendo aequalem lineae *gx* sive *gz* cum *zy*, quae est linea excessus semidiametri circuli octogono isoperirmetro circumscripti super semidiametrum circuli eidem octogono inscripti. Et trahe chordam *gh* sic, quod *gd* sagitta sit circuli circumscripti trigono semidiameter, et aliam chordam *ck* ita, quod *fc* sit ut *xg*, scilicet semidiameter circuli circumscripti octogono.

7. Trahe deinde lineam de *e* ad circumferentias, cuius portiones inter arcus et suas chordas aequentur, ut praemisi, quae in locis sectionum notentur ut prius per *lm* et *no*. Deinde inquire, ut *ef* tibi nota fiat. Nota est *ed*, ut praemittitur. Et nota est *lm*, cui aequatur *no*. Nota est *el* et *eg*, hinc etiam habitudo *el* ad *eg* et *en* ad *ec*. Cum ergo *no* sit nota, inquiramus lineam *en*, et supponatur esse quaecumque quantitas. Per cuius suppositionem necessario etiam secundum notam habitudinem quantitas *ec* nota erit. Et si vera est quantitas *en*, quam supposui, sic examino *ef*. Secundum suppositionem *eo* nota erit, sic et *cf*. Subtrahatur de quadrato *cf* sive *gx* quadratum *xy*, quae est nota, et radix residui erit *gy*. Sic erit nota *zy*. Quae si fuerit ut *ec*, recte supponebatur. Si non, corrigatur error, et surget quaesitum.

8. Tali via omnes chordae notae erunt, quod veteres summo studio quaerentes attingere non potuerunt. Omnes hactenus praecisionem chordae gradus unius, duorum, quattuor, octo et sic deinceps, ut nosti, se ignorasse fatentur. Poterit etiam ignoti trianguli laterum et angulorum habitudo ex scientia habitudinis arcuum et chordarum et omne tale scibile sufficienter venari ex his dictis complementis.

9. Praeposita figura, quae de trigono in primo praesupposito praemittitur, alium describo super *a* centro circulum, cuius semidiameter sit ut semidiameter circuli circumscripti hexagono isoperimetro cum excessu, quo excedit semidiametrum circuli eidem hexagono inscripti (cfr. figura 4). Et trahe diametros se in centro orthogonaliter secantes, qui per *b, c, d, e* signentur, tracta chorda, cuius sagitta sit semidiameter circuli hexagono circumscripti, quam signa per *fgh*. Trahe deinde lineam per *a* punctum et per lineam *gh*, ut habeas semidiametrum circuli circumscripti hexagono isoperimetro, quae sit *aik*. Deinde nota excessum *cb* prioris figurae super *ab* istius, et eo in lineam per *a* tractam notato anterioretur, qui sit *la*, et rectam de *l* super *ad* orthogonaliter ducito posito *m* signo in contactu. Et quia *cb* secundum positionem lateris trigoni circulo inscripti est nota, similiter *ab* est nota, erit *la* et *ag* nota. Habet autem se *la* ad *am* sicut *ai* ad *ag*, et sicut *la* ad *ai*, ita *ma* ad *ag*. Inveniatur igitur numerus, qui se habeat in aliqua habitudine ad *la* notum, ita quod in eadem habitudine sit alius se habens ad *ag* notum taliter, quod *la* cum hoc numero invento de *bc* subtracto idem remagneat cum eo, quod remanet subtracto *ag* cum alio numero de *ab*, et numerasti semidiametrum circuli, lateris igitur trigoni tripla et semidiametri dupla habitudine considerata, ut sic propinquitate subtili habitudinem diametri ad circumferentiam attingas.

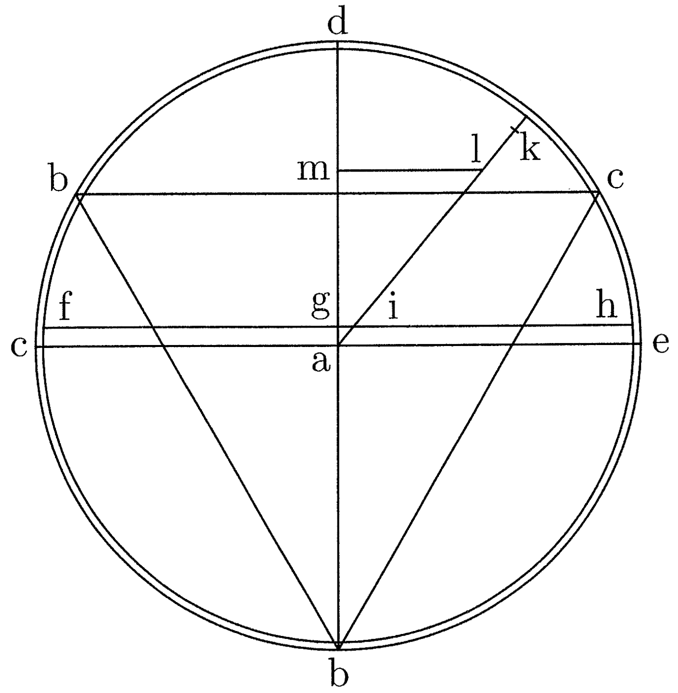


fig. 4

De circuli quadratura
Nicolai de Cusa Cardinalis

Traduzione italiana a p. 191.

1. Asseris te in varietate scribentium de circuli quadratura involutum et a me nunc otio dato exigis, ut scibilis illius sufficientiam tradam. Accipe per propositionem, quid sentiam. Hoc tamen me fecisse sic tui causa recipito, ut per huius assimilationem mathematicis relictis facilius ad theologiam te transferre queas.

Propositio

2. Si datae peripheriae trigoni est dabilis aequalis peripheria circuli, tunc illius circuli semidiameter in quinta sui parte excedit lineam ductam de centro trigoni ad punctum unum alicuius lateris ab angulo per quartam partem lateris distantis.

3. Sunt qui circuli quadraturam admittunt. Et hi habent necessario admittere circulorum peripherias aequari posse peripheriis polygoniarum figurarum, cum circulus aequetur quadrangulo, cuius minus latus est semidiameter et maius semicircumferentia. Quando igitur quadratum aequale circulo in tale quadrangulum resolveretur, haberetur recta linea curvae aequalis. Hinc deveniretur ad aequalitatem peripheriarum circuli et polygoniae, ut est de se notum.

4. Illi etiam hoc argumentum admittunt, sine quo nihil attingerent, scilicet: Ubi est dare magis et minus, est et dare aequale; quia, cum detur quadratum maius circulo, ut est circumscriptum, et minus, ut est inscriptum, igitur et aequale, quod erit nec circumscriptum nec inscriptum, sed pariter inscriptum et circumscriptum. Hoc idem argumentum admittunt in peripheriis: Quia est dabilis peripheria circuli maior peripheria trigoni, ut est peripheria circuli trigono circumscripti, et dabilis est peripheria circuli minor peripheria trigoni, ut est peripheria circuli inscripti, igitur est et dabilis peripheria circuli aequalis peripheriae trigoni, et hic circulus nec est circumscriptus nec inscriptus, sed pariter circumscriptus et inscriptus.

5. Sunt et qui circuli quadraturam negant, et hi omnia iam dicta negant. Aiunt enim argumentum in mathematicis non procedere: Ubi est dare magis et minus, quod ibi sit dare aequale. Nam dabilis est angulus incidentiae maior recto et alius minor recto, et tamen numquam aequalis. Unde in quantitatibus incommensurabilibus hoc non procedit. Si enim daretur angulus incidentiae maior recto parte aliquota recti et minor recto parte aliquota recti, daretur et aequalis. Sed cum angulus incidentiae non sit proportionalis recto, non potest esse aut maior aut minor parte aliquota recti, igitur neque umquam aequalis. Et cum inter superficiem circularem et rectilinealem non possit cadere proportio, sicut nec inter angulum incidentiae et angulum rectum, igitur argumentum etiam ibi non procedit.

6. Hoc sic patet: Omnis quantitas in aliam resolubilis necessario sic se habet, quod quaelibet eius pars possit esse pars alterius, cum totum non sit nisi suae partes. Sed lunula per rectam de circulo abscisa non est secundum angulos suos incidentiae, qui sunt partes quantitatis eius, in rectilineam resolubilis; igitur nec secundum eius totalitatem. Manifestum est autem, si circulus est resolubilis in quadratum, necessario sequi lunulas resolubiles in rectilineales; et cum hoc sit impossibile, igitur et illud, ex quo sequitur. Sic patet semicirculum non esse rectilineabilem, et per consequens nec circulum aut aliquam eius partem.

7. Omnis angulus incidentiae excedit alium aut exceditur ab alio per quantitatem anguli rectilinei, ad quem non potest habere proportionem. Hinc evenit, quod omnes abscisiones circuli per lineas rectas sunt ad illum penitus improportionales, et cum maior abscisio sit per [semi] diametrum, tunc omnes aliae abscisiones ad illam sunt improportionales. Non potest igitur aliqua pars circuli per tales lineas abscindi, quando nullam habet proportionem ad maiorem abscisionem, scilicet semicirculum. Sic non valet argumentum: Abscinditur lunula maior tertia circuli et lunula minor tertia parte circuli, ergo et aequalis. Ex quo evenit, quod abscisiones, quae fiunt per rectam lineam minorem diametro, non sunt ex eo nequaquam rectilineabiles, quia sunt partes aliquotae circuli, sed quia sequeretur circuli quadratura, si forent rectilineabiles.

8. Ex quo elice omne id impossibile, ex quo sequitur circuli quadratura. Habet igitur circulus hoc ex singularitate sua, quod sicut angulus incidentiae non est rectilineabilis, sic nec circulus est in figuram rectilinealem reducibilis. Sed sicut datur angulo incidentiae angulus rectilineus maior per angulum contingentiae, qui angulus contingentiae est quantitas in suo genere tantum divisibilis, quoniam omni angulo contingentiae est dabilis alius contingentiae maior ac minor, tamen, cum angulus contingentiae sit minor omni angulo rectilineo, sic dato incidentiae datur rectilineus maior, qui tamen non est maior aliqua parte aliquota rectilinei anguli; sic dato rectilineo datur incidentiae angulus minor, scilicet quantum est angulus contingentiae, qui tamen non est pars aliquota incidentiae, sed minor omni parte aliquota eius.

9. Tali quidem modo dici potest dato circulo posse dari quadratum, quod etsi fuerit maius circulo, non tamen aliqua parte aliquota eius, scilicet quadrati; et dato quadrato potest dari circulus minor eo, non tamen minor parte aliquota circuli. Et consequenter ex hoc habetur, quod licet dato circulo posset dari quadratum maius, non tamen parte aliquota eius maius; et quod quocumque quadrato tali dato adhuc possit dari aliud praecisius circulo, licet nullum praecisissimum, et nullum minus circulo parte aliquota eius, ita et e converso.

10. Et hanc partem puto veriorem. Nam cum figurae polygoniae non sint eiusdem generis quantitatis cum figura circulari, tunc, etsi reperiatur una polygonia dato circulo quoad quantitatem aequalior quam alia, habebit tamen regula locum: In recipientibus maius et minus non deveniri ad maximum simpliciter in esse et posse. Capacitas enim circularis est quod maximum simpliciter in comparatione ad capacitates polygoniarum, quae recipiunt maius et minus et ideo eam non attingunt, sicut numeri non attingunt capacitatem unitatis et multiplicitates non attingunt virtutem simplicis.

11. Sufficere autem videbatur primam opinionem tenentibus, quod dato circulo posset dari quadratum, quod non esset nec maius nec minus circulo. Omne enim maius aut est parte aliquota aut sui aut alterius, cui comparatur, maius; sic, si minus. Sed cum quadratum, quod datur, neque minima dabili parte aut quadrati aut circuli est circulo aut maius aut minus, hoc vocarunt aequale. Eo enim modo ceperunt aequale, ut scilicet id sit alteri aequale, quod nulla parte aliquota, quantumcumque minima, aliud excedit aut exceditur. Sic aequale capiendo puto verum esse, quod datae peripheriae polygoniae dabilis sit peripheria circuli aequalis et e converso. Capiendo vero aequalitatem absolute, prout respicit quantitatem, absque respectu ad partes aliquotas, tunc, quia circulari quantitati non potest non circularis praecise aequalis assignari, secundi verum dixerunt, et hoc per declarationem principii propositionis, scilicet: Si datae peripheriae trigoni etc. Sic dixisse sufficiat. Per quae intelligas ea, quae de hac re in certis aliis libellulis meis varie scripta reperies.

Declaratio propositionis

12. Ad declarandum autem propositionem fiat trigonus *abc*, cui inscribatur circulus super *d* centro, qui sit *efg*, et circumscribatur circulus *hi*; ducaturque linea *de* sic, quod *e* sit punctus medius inter *a* et *b*, et ducatur linea *db*. Ducaturque linea de *d* ad punctum medium inter *e* et *b*, quae sit *dk*. Dico *dk* esse minorem semidiametro circuli isoperimetri trigono, quantum est quarta ipsius *dk* (cfr. figura 1).

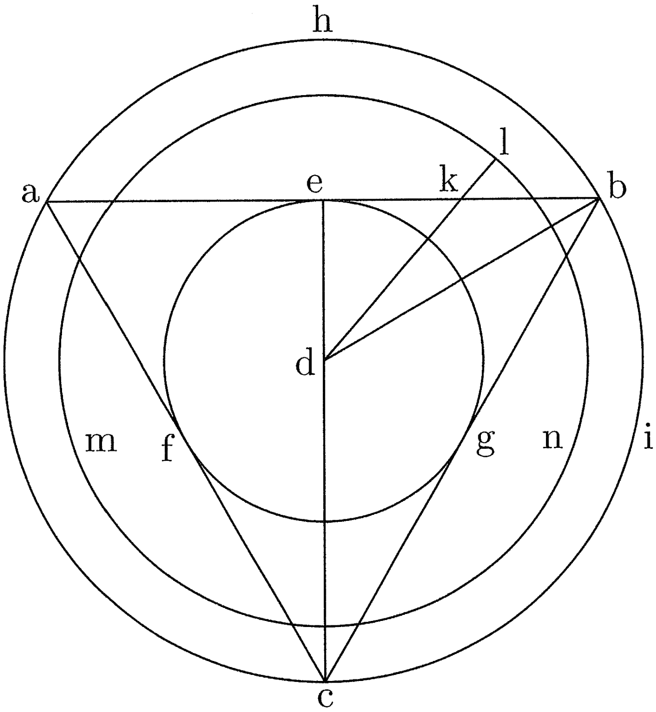


fig. 1

13. Addatur igitur quarta ad *dk*, et sit *dl* maior *dk* per quartam *dk*. Dico, quod *dl* est semidiameter circuli isoperimetri trigono. Describatur igitur circulus, qui sit *lmn*. Dico peripheriam *lmn* aequalem peripheriae *abc*, sic scilicet, quod *lmn* non est nec maior nec minor quacumque minima parte aliquota ipsius peripheriae *abc*.

14. Ad hoc ostendendum sic procedo et dico quod, si de *d* ad *eb* linea duci debet, quae sit semidiameter circuli isoperimetri trigono, oportet, quod illa se habeat ad omnia latera trigoni simul sumpta sicut semidiameter circuli ad circumferentiam. Sed cum semidiameter ad circumferentiam nullam penitus habeat proportionem, nec in quantitate nec in potentia, scilicet cum area quadrati semidiametri, quae est potentia semidiametri, nullam habeat proportionem ad aream circuli, neque etiam ad aream quadrati potentiae lineae aequalis circumferentiae, si dabilis foret, proportionem haberet. Patet, quod nec quaesitae lineae quantitas aut potentia esse potest proportionalis lineae *de* aut *db*, quarum potentiae sunt proportionales ad potentiam *eb*. Unde linea illa non potest duci de *d* ad partem aliquotam *eb* aut aliquotam *db*, sic quod punctus terminalis eius, qui distabit ab *e* versus *b*, non poterit distare per lineam ab *e*, quae sit proportionalis ad *eb* vel *db*; quia, si sic, semper esset potentia proportionalis *eb*, ut de se patet. Unde non est assignabilis punctus in *eb*, ad quem si duceretur, haberetur praecise quaesita. Sed bene est punctus in *eb*, ad quem si duceretur, linea illa non foret nec maior nec minor parte aliquota quacumque minima quaesita. Dico consequenter, quod, sicut nulla linea, quae de *d* ad *eb* duci potest ad partem aliquotam *eb*, potest esse quaesita, sic etiam nulla talis potest esse proportionalis ad quaesitam, ut de se patet, cum omnium illarum potentiae sint potentiae lineae *eb* proportionales.

15. Dico deinde, quod licet nulla talium sit praecise proportionalis quaesitae, una tamen erit magis proportionalis quam alia. Et hoc patet. Nam etsi omnes sint improportionales ad *de* et *eb*, tamen adhuc una est magis proportionalis ad *eb* et *db* quam alia, et ideo minus proportionalis ad quaesitam. Unde illa ex omnibus, quae est maxime improportionatis ad *eb, de* et *db*, illa est minime improportionalis ad quaesitam. Una igitur erit inter omnes ducibiles de *d* ad partes *eb* minus improportionalis quaesitae.

De adinvestigando proportionalem

16. Ad investigandum vero proportionalem est advertendum, quod inter lineas improportionales habent se aliquae ut costa et diameter, et numquam potest proportio adeo praecisa reperiri, quin sit excessus maior parte aliquota: ut una decima diametri minor est una septima costae, et excessus est maior parte aliquota diametri et costae, et ita in quibuscumque minimis partibus.

17. Alia est improportio ut angulorum incidentiae et rectilinei. Nam linea se habens ut angulus incidentiae est improportionalis ad lineam se habentem ut angulus rectilineus, et medietas rectilinei est maior medietate incidentiae per quantitatem medietatis contingentiae; quae tamen medietas minor est omni parte aliquota, tam rectilinei anguli quam incidentiae.

18. Quod autem talis habitudo sit reperibilis in lineis, ex hoc videtur: Nam cum angulus sit superficies et linea sit terminus superficiei, patet, quod eo modo, quo angulus contingentiae est superficies divisibilis, sic suo modo et eius terminus, scilicet linea angulum illum superficialem terminans. Similiter linea terminans anguli rectilinei superficiem linea est divisibilis secundum divisibilitatem superficiei. De linea igitur, quae terminat superficiem anguli rectilinei, potest abscindi linea terminans angulum contingentiae, et ideo linea terminans angulum incidentiae est improportionalis ad lineam terminantem angulum rectilineum per lineam terminantem angulum contingentiae. Unde cum haec linea terminans angulum contingentiae sit minor omni parte aliquota lineae rectilineum aut incidentiae angulum terminantis, patet propositum.

19. Et in hoc notare poteris, quomodo ante omnem divisibilitatem lineae rectae est linea inattingibilis per omnem divisibilitatem, qua linea recta rectam secare potest. Quae tamen etsi non sit divisibilis divisione, qua linea recta per rectam dividitur, in cuius respectu est ut punctus terminalis inattingibilis, est tamen suo modo per curvam divisibilis. Unde linea illa, quoniam est terminus superficiei, et divisibilis linea dicitur, licet in comparatione ad lineam, quam terminat punctus, indivisibilis appareat. Sicut enim divisibilitas superficiei terminatur in linea, quae in respectu ad superficiem est indivisibilis, quoniam non est superficialiter divisibilis, tamen linea ipsa terminalis superficiei in se considerata quantitas divisibilis est, ita divisibilitas rectae lineae per rectam terminatur in punctum, qui est terminus divisionis et lineae, et est rectilinealiter indivisibilis in quantum terminus lineae, in se tamen est quantitas divisibilis. Est igitur possibile unam lineam esse alia minorem aut maiorem, non tamen aliqua parte aliquota aut maiori aliquota, sed minori. Ex quo elicere potes, quid de lineis et punctis indivisibilibus sentiendum.

20. Dico igitur, quod etsi possit de *d* ad *eb* linea proportionalis ad quaesitam trahi, ita quod excessus non sit maior parte aliquota, non tamen potest trahi talis, quin excessus sit licet minor parte aliquota. Deinde dico, quod etsi innumerabiles tales trahi possent, tamen una praecisior alia, nulla vero praecisissima.

21. Videamus igitur, quam talium potest humanum ingenium de omnibus attingere. Manifestum est autem, quod si linea, quae debet esse proportionalis quaesitae, extenditur secundum quamcumque partem eius aliquotam, puta tertiam eius aut quartam aut aliam, semper manet proportionalis. Si igitur linea ipsa extenditur secundum habitudinem lineae, quae cadit inter terminum eius in *eb* et *e*, ad lineam *ab* aut secundum habitudinem lineae inter terminum eius in *eb* et *b* ad lineam *ab*, semper manet proportionalis. Aut igitur habitudines illae sunt tales, quod secundum aliquam ipsarum devenitur ad quaesitam, aut non. Si non, tunc per ipsam lineam, quam praesupponimus proportionalem ad quaesitam ignotam, nihil de quaesita scire poterimus. Nam cum quaesita sit ignota et extensio non ducat nos ad eam, sed ad maiorem vel minorem ea, quam ignoramus, non poterimus excessum scire quaesitae penitus ignotae.

22. Si dixeris per alteram extensionem ad quaesitam perveniri et non per ambas, idem erit, quia ignoramus, per quam et ubi linea illa cadat, cum de illis possint cadere infinitae inter *e* et *b*. Si dixeris aequales fore extensiones et tamen aut minores aut maiores quaesitae ignotae, iterum ad quaesitam numquam deveniretur.

23. Necesse est igitur proportionalem, per quam humanum ingenium hoc modo procedendi se iuvare potest, ut veniat ad quaesitam, eam esse, quae per ambas aequales extensiones sive unam sive aliam quaesitam ostendit; et haec est linea, quae ducitur de *d* ad medium inter *e* et *b*, puta *f*. Et haec est sola illa, quae per habitudinem unam, qua se habet altera linearum distantiae ab *e* vel *b* ad *ab* extensa, scilicet quartam sui, nos ducit ad quaesitam, modo quo sic procedendo est nobis possibile attingere, etiam si in aliis procedendi modis alia praecisior posset reperiri.

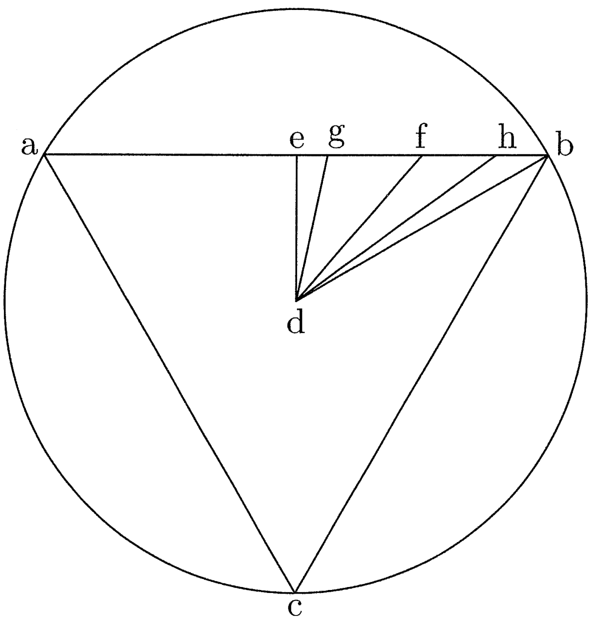


fig. 2

24. Verum ne penitus hanc putes puram esse coniecturam, ita quod humanum ingenium nulla ratione alia ad hanc assertionem ducatur, facere poteris syllogismum, qui hoc casu extra ultimam praecisionem et citra differentiam minimae partis aliquotae admittitur (cfr. figura 2). Nam cum de *d* prope *e* linea, puta ad *g*, tracta et extensa secundum habitudinem *eg* ad *ab* sit minor quaesita, et similiter extensa secundum habitudinem *gb* ad *ab* etiam sit minor quaesita; et alia linea de *d* prope *b*, puta *h*, tracta et secundum habitudinem *eh* ad *ab* extensa sit maior quaesita, et similiter secundum habitudinem *hb* ad *ab* extensa sit maior quaesita, ut est hinc inde notorium: igitur est alia de *d* ad *eb* trahibilis, quae secundum lineae inter terminum eius et *e* cadentis habitudinem ad *ab* extensa non est maior nec minor quaesita. Et est similiter linea de *d* trahibilis ad *eb*, quae extensa secundum habitudinem lineae inter terminum eius et *b* cadentis ad *ab* non est maior nec minor quaesita. Sed quia illae duae lineae, ex quarum extensionibus quaesita evenire debet, non possunt esse diversae, cum diversae lineae de *d* ad *eb* trahibiles non possint habere aeque praecisam proportionem ad quaesitam, sed una semper erit praecisior alia: ideo nec extensae secundum varias habitudines suarum partium ad eas ad eandem quaesitam aequaliter attingere possunt. Necesse igitur erit, quod sit una tantum linea et extensio eadem, quod extra *f* punctum non est possibile. Quare omnis sufficientia, quae in hoc procedendi modo sciri potest, est illa, quae ponitur in propositione sic declarata.

25. Quoniam autem nunc tibi id, quod est scibile de aequalitate peripheriarum curvilinealium et rectilinealium figurarum, patefeci – scilicet, quomodo verius quod in hoc scitur est, aequalitatem sciri non posse, atque etiam quod id, quod propinquissime sciri potest in hoc, est per propositionem brevem revelatum –, tunc desiderio tuo, quantum potui, satisfeci. Nam scito hoc: Habes modum omne mathematice scibile investigandi. Omnis enim propositio in mathematicis, per quam sequitur praecisa aequalitas circuli et quadrati, est impossibilis, et omnis propositio, per cuius contrarium inferretur praecisio, est necessaria. Immo assero, quod qui in mathematicis scit omnem inquisitionem ad hoc reducere, perfectionem adeptus est artis illius. Nam nihil penitus in ea verum est, ex cuius opposito non sequitur circuli et quadrati aequalitas, et haec est omnis mathematicae inquisitionis sufficientissima resolutio.

26. Id autem, quod sine praecisione citra tamen omnem sensibilem aut assignabilem errorem etiam minimae partis aliquotae sciri potest in transmutationibus figurarum et habitudinibus innumerabilibus, ex iam dictis etiam patefeci. Per quae habes, quomodo habitudo diametri circuli ad circumferentiam eius est ut duarum radicum numeri 1575 cum medietate unius radicis ad sex radices numeri 2700. Et licet non sit praecisissima, non tamen est nec maior nec minor per minutum aut minuti quamcumque dabilem partem. Unde sciri non potest, quantum a praecisione ultima deficiat, cum non sit communi numero attingibilis. Et hinc iste defectus non est reparabilis, cum non nisi alto intellectu et nequaquam sensibili experimento sit attingibilis. Scire ex solo isto nunc potes, quod in non scibili praecisius attingitur, quam scientiam hactenus traditam non repperi.

27. Attendere autem praeter hoc utile videtur, quod, uti hoc casu vides, per unum, puta quadratum, non attingi aliud, scilicet circulare, aut e converso adeo praecise, quin praecisius attingi possit, etiam si defectus nequaquam appareat. Ita in omni inquisitione veri, ubi per unum ad aliud sciendum pergimus, per notum scilicet ad ignotum, idem fore sentiendum, scilicet verum varie et differenter attingi citra praecisionem ultimam, quoniam per unum praecisius quam per alium, per nullum vero praecisissime, licet defectus non appareat; quoniam mensura, qua homo pergit ad veri inquisitionem, est vero improportionalis, et hinc ille, qui citra praecisionem quietatur, errorem non apprehendit. Et haec est differentia hominum, quoniam quidam se praecisionem attigisse iactant, quam sapientiores inattingibilem sciunt, ut hi sint doctiores, qui suae ignorantiae scientiam habent.

28. Admonebam in exordio, ut via assimilationis de his mathematicis ad theologiam te transferres, nam hic est convenientior modus ascendendi. Versantur enim mathematicae doctrinae in veris intelligentiis, quoniam figuras in sua veritate absque variabili materia considerant. Unde ad formam primam, quae est formarum forma penitus absoluta, illis figurarum multiplicitatibus inferius relictis quadam assimilatione facilius scanditur. Nam omnes theologi quandam quaerunt praecisionem, quomodo circularem aeternitatem, unissimam et simplicissimam, possint attingere. Sed vis infinita est incommensurabilis per omne non infinitum, sicut capacitas circularis per omnem non circulum incommensurabilis manet.

29. Sicut igitur circulus est perfectio figuralis omnem figurarum perfectionem in se complicans, sicut eius capacitas omnium figurarum capacitatem, et nihil commune habet cum omni figura alia, in se penitus simplex et una: sic aeternitas absoluta est forma omnium formarum in se complicans perfectionem, et eius vis omnipotens omnem vim formarum, omnem speciem ambiens, nihil tamen commune habens cum omni alia forma. Et quemadmodum circularis figura in eo, quia sine principio et fine, quandam habet assimilationem aeternitatis, et in sua capacitate, qua omnes omnium figurarum capacitates includit, quandam habet figuram omnipotentiae, et in sua connexione, qua circumferentia unitur capacitate, habet quandam figuram amorosissimi et infiniti nexus: ita quidem in essentia divina intuemur aeternitatem in se habentem omnipotentiam atque in his infinitum nexum. In aeternitate quidem intuemur principium sine principio, et hoc quidem principium paternum dicimus. In omnipotentia, quae est a principio sine principio, intuemur principium illimitatum a principio. In infinito nexu intuemur principii sine principio et principii a principio amorosissimum nexum. In hoc enim, quod in divina essentia intuemur aeternitatem, intuemur patrem. In hoc, quod in eadem essentia intuemur aeternitatis potentiam, quae non potest esse nisi infinita, cum sit potentia aeternitatis, principii scilicet sine principio, in hoc intuemur aequalitatem unitatis aeternae, scilicet filium patris. In hoc, quod intuemur aeternae unitatis et suae aequalitatis nexum amorosissimum utriusque, spiritum intuemur. In unitate igitur simplicissima aeternitatis vigorosissimam et omnipotentissimam aequalitatem intuemur, ac e converso in aequalitate unitatem, similiter et in nexu unitatem et aequalitatem. Sine aeternae entitatis unitate nihil esse potest. Sine illius unitatis aequalitate nihil sic esse uti est esse potest. Sine infinito nexu esse et simul sic esse uti est nihil esse potest. Sine unitrino igitur principio nihil esse potest.

30. Haec assimilantur in circulo, et eius capacitate atque strictissimo nexu, quo circulus est maxime sibi ipsi constrictus, cohaerens atque naturaliter unitus esse videmus. Post haec advertimus, quod cum omnes polygoniae figurae sint ex peripheria, capacitate et nexu ad imaginem circularis figurae, et omnis peripheria polygoniae sit cadens a peripheria circuli, et omnis capacitas polygoniae improportionabiliter deficiens a capacitate circuli, et similiter omnis nexus utriusque – quod sic etiam se habent species rerum sensibilium ad formam formarum, ut species harum sensibilium rerum sint in comparatione ad deum quasi ut trigoni, tetragoni, pentagoni et ita consequenter ad circulum comparati.

31. Quaelibet autem polygoniarum quandam habet diffinitam perfectionem, extra quam nec est nec esse potest. Trigoni enim esse extra triangularitatem nequaquam esse potest; ita de tetragono et ceteris. Quiescit igitur sic omnis species inter ambitum suum, qui sub sua clauditur peripheria, et extra ipsum nec esse potest nec appetit. Desineret enim omne esse trigonum, si in tetragonum pergeret, uti de se notissimum est. Unde ad interitum suum nulla species ex sua natura, qua habet esse et sic esse, moveri potest, quare in terminis suae specificae naturae quiescit. Et haec quies est sua, quia infra peripheriam suae perfectionis vim divinam suo habet modo, in qua amoroso nexu deliciatur.

32. Mensurat igitur omnis sensibilis species suo quodam modo aeternitatem, virtutem et nexum amoris infinitum, licet in mensurando nihil habeat proportionale, cum omnis polygonia multiangula sit diminutae virtutis et capacitatis, parvi nexus et unionis, quae ad circularem aeternitatis unitatem, capacitatem inexhauribilem ac infinitam connexionem nihil proportionis habere potest, etiam si omne id, quod habet, eo habeat modo, ut in triangulari aut tetragona natura virtus circularis potest participari. Haec est igitur habitudo specierum sensibilium ad formam formarum, quae est polygoniarum ad circulum. Deinde, cum multi sint modi essendi trigoni, quoniam alter est trigonus rectiangulus, alter acutiangulus, alter obtusiangulus, cadentque in singulis talibus varii essendi modi in variabili materia, et hi omnes modi sunt contractiones individuales. Species enim in se vere consideratae sic cadunt in variabili materia variabiliter. Nam trigonus verius figuratur et perfectius in auro quam aqua aut labili alia materia, et adhuc verius intelligitur quam figuretur in quacumque materia.

33. Unde ex hoc advertimus, quomodo omnes polygoniae possunt inscribi circulo ac quomodo in circulo sunt omnes meliori modo quam ut sunt in materia, quoniam ibi sunt circulus. Et in hoc videmus, si omnes polygoniae possunt inscribi circulo sensibili et circulus aeternitatis sit actus omnis possibilitatis, quod tunc, sicut omnes polygoniae possunt circulo sensibiliter inscribi, ita sunt actu omnes species in specie seu forma aeternitatis ipsa forma aeterna. Et sicut in nostra mente verius esse habet trigonalis forma quam in variabili materia, ita in aeterna mente seu verbo verius esse habent omnes rerum species, ubi sunt ipsa aeterna veritas, quam in individuali varietate.

34. Adhuc progredientes advertimus circulorum varietatem, quodque non potest esse nisi unus maximus, verissimus, in se subsistens, aeternus et infinitus circulus, ad quem per circulos quantos non ascenditur, quoniam in recipientibus magis et minus non devenitur ad maximum simpliciter. Et circa hunc infinitum circulum mira et indicibilia consideramus, quae alibi diffusius tacta sunt.

35. Unde dicimus esse naturas circulares, quae non possunt esse sui ipsius principium, quia non sunt ut circulus maximus simpliciter, qui solus est ipsa aeternitas. Alii autem circuli, licet non videantur habere principium et finem, prout considerantur via abstractionis a sensibili circulo, tamen, quia non sunt ipsa infinita aeternitas, tunc sunt circuli, quorum esse est ab ipso infinito primo aeterno circulo, et sunt circuli illi in comparatione ad polygonias eis inscriptibiles quasi aeternitas quaedam atque simplicitas perfecta. Habent enim capacitatem improportionabiliter excedentem capacitatem omnium polygoniarum, et sunt infiniti circuli primi prima imago, licet ob infinitatem primi sint ad ipsum incomparabiles. Et sunt naturae, quae habent motum quendam circularem et infinibilem circa essentiam infiniti circuli, in se vim omnium aliarum specierum complicantes et ex sua vi complicativa via assimilationis alias omnes species explicantes, et in se omnia intuentes atque se imaginem infiniti circuli contemplantes per ipsamque imaginem, hoc est se ipsas, ad veritatem aeternitatis seu exemplar ipsum elevantes. Hae sunt naturae intellectuales vi sua intellectuali cuncta ambientes.

36. Conantur autem omnes figurae, quantum possunt, capacitatem aeternae veritatis mensurare. Sed sicut finiti ad infinitum nulla est proportio, sic manet deus super omnem inquisitionem praecisio incognita, ut ipse sit non solum incognitus, sed ipsa praecisio incognita, quae in nullo cognoscibili cognoscitur. Nititur enim quaelibet creatura deum suum intra limites suae naturae definire; sicut si trigonus vellet circulum trigonare et tetragonus tetragonare, et ita de polygoniis, sic et natura intellectualis intelligere. Sed quamvis deus ipse, qui non habet partes, cum sit simplicitas infinita, non sit parte aliquota excedens omnem mensurandi modum specifice varium, tamen sic excedit omnem magnitudinis mensuram, quod est omni inquisibili modo maior. Et sic excedit omnem subtilium mensurarum, minutissimas fractiones, eo quod est omnium talium fractionum subtilior, ut neque in ascensu neque descensu praecisio eius attingi possit.

37. Sufficit autem omni naturae, quod in sua specie deum modo, quo potest, attingat. Tunc enim quiescit, quando extra speciem suam eum nec quaerit nec esse apprehendit. Sufficientia igitur, qua ipsum in sua specie modo, quo potest, attingit, est quies eius, quoniam est satietas motus suae naturae.

38. Quod nobis assimilatorie declarat investigatio, quam fecimus in trigono, quem ad aequalitatem peripheriae circuli elevare studuimus. Et quievimus in modo uno, quem solum praecisiorem, licet deficientem, repperimus in trigonali elevatione ad aequalitatem circularem. Qui modus speciei tetragonali non conveniret; tamen, si suo modo ad aequalitatem circuli ascenderet, etiam si non foret praecisio, dummodo in sua specie alius perfectior non foret tetragonus, se quietem attigisse gauderet. Ita de ceteris.

39. Sic quietatur omnis intellectus, si modo, quo suae speciei conceditur, se senserit ad aequalitatem infinitatis elevari divina praecisione semper inaccessa remanente. Talia quidem et alia infinita per te elicere poteris. Haec sic tetigisse sufficiat. Amen.

Quadratura circuli
Nicolai de Cusa cardinalis, legati, episcopi brixinensis

Traduzione italiana a p. 207.

1. Quamvis iam dudum a studio geometrico nos altior speculatio ac publica retraxerit utilitas, tamen inter innumeras seriosas curas, quas habet apostolica legatio, se inter colloquia studiosorum delectabiliter immiscuit de quadratura circuli scibili et non scita assertio, quam dum nuper equitando revolveremus, quod attigimus, conscripsimus.

2. Non legimus quemquam propinquius accessisse ad huius notitiam quam Archimedem, qui primo quadrangulum circulo aequari ostendit, in quo semidiameter circuli ducta est in mediam peripheriam. Hoc quidem sic esse necesse est, si hoc censendum est: esse aequale, quod nec maius nec minus esse convincitur. In omnibus enim polygoniis isopleuris et isoperimetris, de quibus solum in hoc scripto loquimur, semidiameter circuli inscripti si ducitur in medietatem peripheriae, oritur quadrangulum aequale. Posse autem inter semidiametrum et medietatem peripheriae medium proportionale facile constitui Euclides ostendit. Quare tale cum sit latus quadrati aequivalentis, conscito quae linea recta aequetur peripheriae circuli, scitur et eius quadratura, et haec est certior ostensio. Sed dum per helicam hanc ultimam partem se reperisse crederet Archimedes, a vero defecit. Helica enim describi nequit nisi signum a centro per semidiametrum in tanto tempore moveatur, in quanto semidiameter pro circuli descriptione circumvolvitur. Descriptio igitur helicae hos motus supponit, quorum habitudo est ut semidiametri ad circumferentiam. Praesupponit igitur id, quod quaerit. Citius enim recta dari potest circulari lineae aequalis quam helica vera figurari.

3. Nos autem considerantes trigonum et circulum in capacitate extrema loca tenere: in trigono semidiametros circulorum, et inscripti et circumscripti, contrario modo se habere cum semidiametro circuli, in quo circuli inscriptus et circumscriptus coincidunt, qui differunt in trigono maxime, esseque ibi semidiametrum circumscripti maximam et inscripti minimam et simul iunctas brevissimas; contrario modo in circulo, ubi simul iunctae sunt diameter circuli maximae. Ob hoc scimus omnes medias polygonias isoperimetras et isopleuras secundum capacitatem in illis ad aequalitatem semidiametri circuli accedere. Si igitur signata fuerit quantitas excessus semidiametri circuli super semidiametrum inscripti trigono et quantitas, qua ipsa semidiameter circuli fuerit minor semidiametro circumscripti trigono, tunc omnis polygonia media secundum suam capacitatem in excessu semidiametri sibi inscripti super semidiametrum inscripti trigono et diminutione semidiametri sibi circumscripti a semidiametro circumscripti trigono proportionaliter se habebit. Nam cum illa ex diversa capacitate varientur, non potest diversa esse habitudo illorum ab habitudine capacitatum. Sic semper necesse est, quod sicut se habet excessus ad excessum, etiam sic se habeat diminutio ad diminutionem, cum capacitas ita sequatur unam diversitatem sicut aliam, et non plus nec minus unam quam aliam. Erunt igitur in omnibus polygoniis excessus et diminutio tales se ad invicem habentes in proportione una. Quare data una habitudine per illorum scientiam in nota aliqua polygonia tunc scitur et in circulo. Et quia excessus et diminutio in circulo simul iuncti aequantur semidiametro inscripti trigono, ut de se patet, igitur si reperta habitudine divideretur secundum eam semidiameter inscripti trigono et maior portio adderetur ad ipsam semidiametrum circuli inscripti trigono, haberetur semidiameter circuli isoperimetri et ita omne quaesitum.

4. Faciemus autem hanc partem tibi hoc modo clariorem (cfr. figura 1). Ex *ab* linea in tres partes divisa *cde* triangulus designetur, et in eius latere *cd* signetur pars quarta *ab*, quae sit *ik*, quae quadretur, et sit *iklm*. Describantur inscripti et circumscripti circuli, et sit inscripti trigono semidiameter *fg* et circumscripti *fh* et inscripti tetragono *ng*, circumscripti *no*. Signetur deinde linea *fh* et in eius medio *g*. Lineis de *f*, *g*, *h* tractis quantumlibet trahatur ad *fh* aequedistans *tn*, cuius medium sit *aa*, et signetur semidiameter inscripti alicuius polygoniae isoperimetrae, puta tetragonae, quae sit *np*, et semidiameter circumscripti, quae sit *no*. Et trahe de *g* per *p* ‹lineam› in infinitum et similiter de *h* per *o* lineam in infinitum, et ubi illae concurrunt, signa *q*. Trahe per *q* aequedistantem ad *fh*, quae sit *sr*, in cuius medio signa *bb*. Dicimus *rq* esse semidiametrum circuli quaesiti et eius circumferentiam aequalem *ab* lineae rectae.

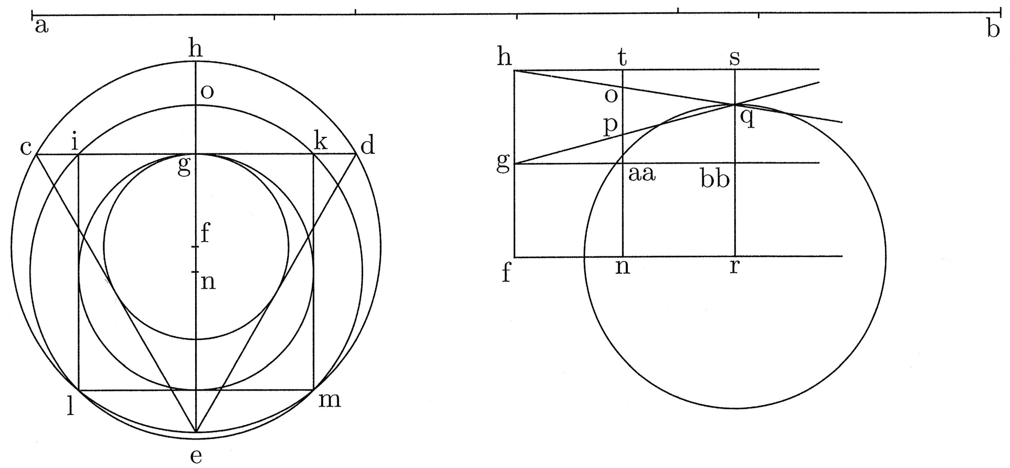


fig. 1

5. Multipliciter probatur et faciliter. Servata igitur priori figura ponatur *g bb* lineam esse differentiam capacitatum trigoni et circuli isoperimetri et quod linea de rs moveatur versus *fh* aequedistanter. Manifestum est lineas *hq* et *gq* de illa abscindere omnes differentias semidiametrorum circulorum inscriptorum et circumscriptorum omnium figurarum polygoniarum de trigono usque ad circulum, ubi coincidunt. Est etiam manifestum, quod simul linea illa mota abscindet de linea *bb g* omnes differentias capacitatum inter trigonum et circulum. Nam quanto differentia semidiametrorum dictarum est minor, tanto figura capacior, ideo circulus capacissima figurarum, quia ibi coincidunt, et trigonus minimae capacitatis, quia ibi maxime differunt. Sit igitur linea mota *tn*, quae abscindat lineam *g bb* in *aa* puncto, et sit *po* differentia semidiametrorum in tetragono. Quare si *g bb* est ut differentia capacitatum trigoni et circuli isoperimetri, erit *g aa* ut differentia capacitatum trigoni et tetragoni. Et quia *np* est ex praesupposito semidiameter inscripti tetragono et *aa p* excessus eius super *fg* semidiametrum inscripti trigono, ideo *bb q* erit excessus semidiametri circuli isoperimetri super semidiametrum inscripti trigono. Nam quae proportio *bb g* ad *aa g*, illa *bb q* ad *aa p*, ut notum est. Correspondent autem differentiae semidiametrorum inscriptorum in polygoniis isoperimetris cum differentiis capacitatum. Non enim evenit aliunde capacitatum differentia in isopleuris et isoperimetris nisi ex semidiametrorum circulorum inscriptorum differentia, quoniam capacitas ex multiplicatione illius semidiametri, quae variatur in diversis talibus figuris, in semiperipheriam, quae semper est eadem, exoritur, ut est notum. Sic si posueris *bb s*, lineam duorum excessuum semidiametrorum, ut excessum capacitatis circuli super trigonum, erit in tetragono excessus talis capacitatis ut linea aequalis duabus *to* et *p aa* lineis, et quia una est habitudo illius ad *s bb* quae *p aa* ad *bb q*, igitur ut supra. Vel si dixeris capacitatem trigoni minorem esse quam circuli, ut linea *hg*, erit tetragoni minor ut *po*.

6. Si adhuc negaveris et dixeris semidiametrum circuli minorem esse, puta quod terminetur in puncto medio inter *s* et terminum lineae *g*, quae sit *v*, ita quod *rv* sit semidiameter circuli isoperimetri, tunc si sic extendatur *vs*, quousque aequetur *rv*, et sit *rx*, et similiter extendatur *fh* ad aequalitatem *rx*, et sit *fz* ut *rx*; trahe *zx* lineam, deinde trahe de *v* lineas ad *g* et *h*, et ubi secaverint *tn* lineam, signa *2* et *9*, et *tn* extendatur usque ad *zx*, et sit *cc n* ut *rx* (cfr. figura 2). Dico, quod si semidiameter inscripti circulo isoperimetro addit super semidiametrum inscripti trigono, quantum est *bb v*, tunc semidiameter inscripti tetragono addit, quantum est *aa 2*. Igitur si semidiameter inscripti tetragono addit, quantum est *aa p*, tunc semidiameter circuli isoperimetri addit, quantum est *bb q*. Hoc de se patet, si habitudo additionum est ut *bb v* ad *aa 2*, et nota est additio in tetragono, quae est ut *aa p*; igitur erit in circulo ut *bb q*, cum una sit habitudo *aa p* ad *bb q* quae *aa 2* ad *bb v*.

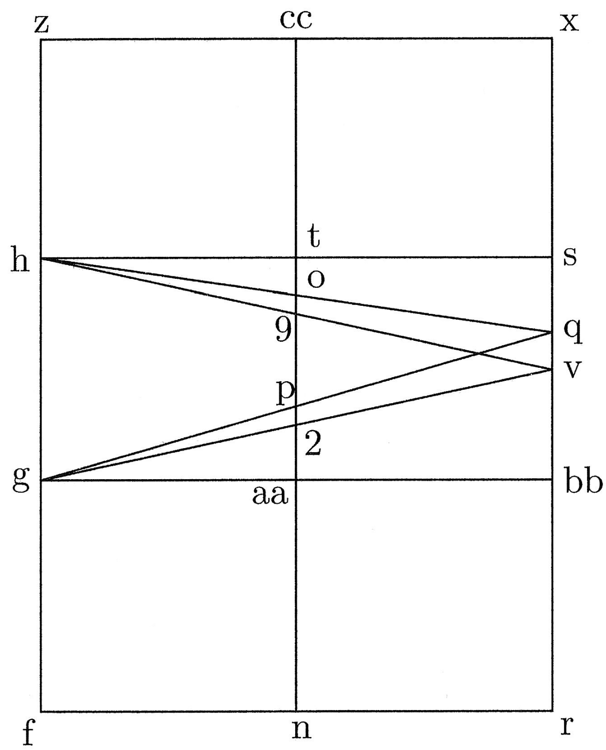
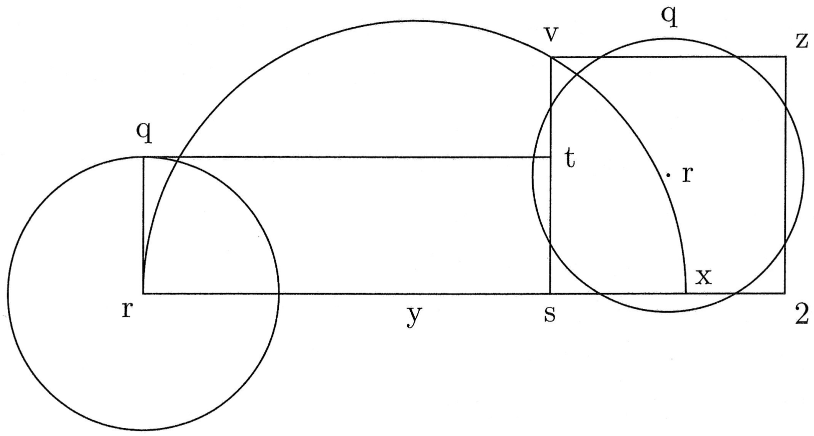


fig. 2

7. Quod autem illa sit habitudo, probatur. Nam si *rv* ponatur semidiameter inscripti circulo, erit *vx* semidiameter circumscripti, quae coincidunt in circulo isoperimetro. Et manifestum est, quod *rx* est linea ex duabus illis semidiametris, et similiter *fz* est linea illi aequalis et est ex semidiametro inscripti trigono et semidiametro circumscripti eidem. Omnium igitur polygoniarum inter trigonum et circulum duae semidiametri tales non erunt minores *fz* nec maiores *rx* et ita semper aequales. Erit igitur *n cc* aequalis duabus illis semidiametris in tetragono. Et quia *2 9* aequatur necessario *po*, cum *ghq* triangulus aequetur *ghv* ob aequedistantiam *qv* et *gh* et similiter *o 2* sit aequedistans ad *gh*, hinc *9 2* erit ut *po*, ut ex Euclide scilicet 37a primi et 4ta sexti notum tibi existit. Sed *po* est excessus semidiametri circumscripti tetragono super semidiametrum inscripti eidem, igitur et *2 9*. Et cum *n 2* aequetur *cc 9*, igitur *n 2* erit ut semidiameter inscripti tetragono et *2 cc* ut semidiameter circumscripti eidem. Si igitur ponitur semidiametrum circuli super semidiametrum inscripti trigono addere, quantum est *bb v*, addet necessario semidiameter inscripti tetragono, quantum est *aa 2*. Et hae additiones possent capacitates super capacitatem trigoni nominari, cum in isopleuris et isoperimetris capacitatum excessus ex his solum proveniat. Habitudo igitur additionum erit ut *aa 2* ad *bb v*, quod erat probandum. Et ita in omnibus polygoniis pariformiter procedi poterit sicut in tetragono. Ex hoc constat propositum (cfr. figura 3).



rq semidiameter circuli
rs medietas *ab*, seu circumferentiae circuli
rqts quadrangulum aequale circulo
sx aequale *rq*
y medium inter *r* et *x* et centrum circuli *rvx*
sv medium proportionale inter *rs* et *sx*, ex nona sexti
svz2 quadratum aequale circuli, cuiuc semidiameter *rq*

fig. 3

8. Adhuc aliter. Capacitas circuli super capacitatem trigoni est maxima et differentia semidiametrorum circulorum inscripti et circumscripti est nulla seu minima simpliciter, quia minor esse nequit. Sed differentia semidiametrorum circulorum inscripti et circumscripti trigono est maxima, capacitas vero eius super sui ipsius capacitatem est nulla vel minima simpliciter. Esto igitur, quod aliqua linea sit ut differentia semidiametrorum in trigono et etiam sit ut capacitas circuli super trigonum, quae sit *ab* linea (cfr. figura 4). Quadretur igitur illa et sit quadratum *abcd*, et sit *ab* ut differentia semidiametrorum cum illa minima capacitate trigoni super sui ipsius capacitatem, et *cd* capacitas circuli super trigonum cum illa minima differentia semidiametrorum talium, et trahatur linea diametralis *bc*. Dico in omnibus polygoniis mediis inter trigonum et circulum lineas capacitatis super capacitatem trigoni cum differentia semidiametrorum non posse esse maiores nec minores *ab* aut *cd*, ut de se patet. Esto igitur, quod trahatur *ef* linea aequalis et aequidistans ad *ab* et *cd*, et illa secetur per *bc* in puncto *g*, et sit *ge* ut differentia semidiametrorum talium in tetragono. Manifestum est, quod *gf* erit ut capacitas tetragoni super trigonum. Erit igitur habitudo capacitatis tetragoni super capacitatem trigoni ad capacitatem circuli super capacitatem trigoni ut *gf* ad *cd*. Signatur igitur in *fg* additio semidiametri inscripti tetragono super semidiametrum inscripti trigono, et sit *fh* et trahatur de *b* per *h* ad *cd* linea, et contactus sit *i*. Dico quod *di* est additio semidiametri circuli isoperimetri super semidiametrum inscripti trigono. Quae enim est habitudo *fg* ad *dc*, illa *fh* ad *di*. Sed diversitas capacitatis in isopleuris et isoperimetris super capacitatem trigoni non evenit nisi ex diversa additione semidiametrorum circulorum inscriptorum super semidiametrum inscripti trigono. Quae igitur est habitudo capacitatum super trigonum, illa est additionum semidiametrorum inscriptorum super semidiametrum circuli inscripti trigono. Per hoc patet quaesitum.

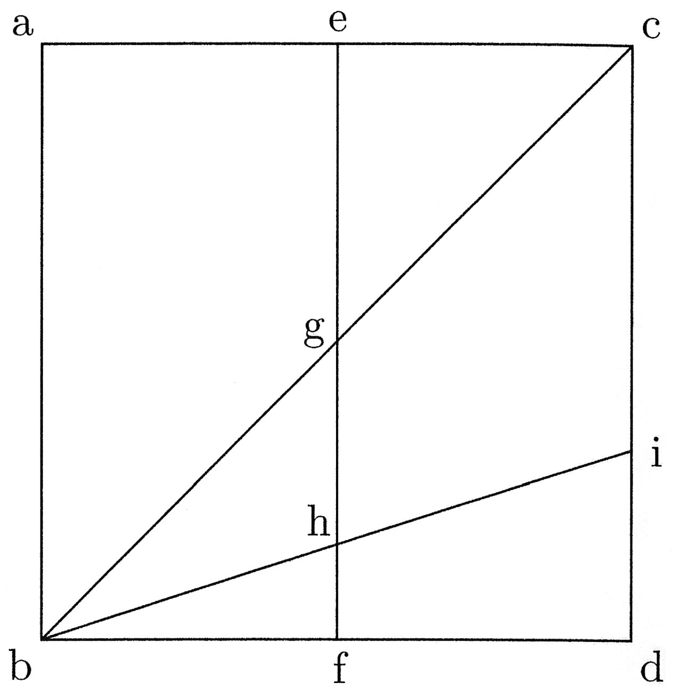


fig. 4

Eiusdem de sinibus et chordis

9. Ex his nunc circa chordas et arcus scientia perfecta elici poterit. Nam si una est habitudo eius, quod addit semidiameter inscripti polygoniae isopleurae et isoperimetrae post trigonum super semidiametrum inscripti trigono ad id, quod addit semidiameter circumscripti trigono super semidiametrum circumscripti illi polygoniae, et si illae additiones una cum differentia seu sagitta simul iunctae aequivalent sagittae lateris trigoni, ut ex praemissis clare constat: tunc scita habitudine talium additionum, quae tamen numero non attingitur sicut nec medietas duplae, ars est reperta ad omne scibile in chordis et arcubus.

10. Quae autem sit habitudo additionum sic in propinquis numeris investigatur. Esto quod semidiameter circuli trigono circumscripti sit 14. Erit semidiameter inscripti 7, cuius quadratum 49, et quadratum semilateris trigoni ter tantum, scilicet 147, et quadratum semidiametri circumscripti quater tantum, scilicet 196. Erit igitur semilatus tetragoni radix 9/16 [et] quadrati semilateris trigoni, scilicet radix de 82 cum 11/16, et talis erit semidiameter inscripti. Erit autem semidiameter circumscripti radix dupli numeri, scilicet 165 cum 6/16. Subtracta igitur radice de 49 a radice de 82 et 11/16 differentia est additio semidiametri inscripti tetragono super semidiametrum inscripti trigono, quae erit aliquid plus quam duo, et subtracta radice de 165 cum 6/16 a radice de 196, quae erit parum plus quam unum, habes additiones, et earum habitudo est illa, per quam omnia investigantur. Nam si has additiones subtraxeris a sagitta lateris trigoni, scilicet 7, remanet sagitta tetragoni. Si igitur diviseris 7 secundum praefatam additionum habitudinem et maiorem addideris super semidiametrum inscripti trigono, habes semidiametrum circuli isoperimetri.

11. Poteris etiam ex quadrato lateris trigoni aut quadrati scire sic quadratum lateris cuiuslibet polygoniae dabilis, et ex eius scientia et habitudine additionum devenitur ad sagittam et semidiametrum inscripti, et sic scitur chorda. Et haec est perfectio ultima geometricae artis, ad quam hactenus veteres non legimus devenisse. Est etiam nunc ars completa geometricarum transmutationum, quam ante minus, tamen sufficienter quoad quadraturam circuli descripsimus.

12. Et putamus nihil scibilis in geometricis nunc volenti diligenter in hoc medio inquirere remanere occultum. Haec sic maxime scripserim, ut videatur potentia artis coincidentiarum, per quam in omni facultate occulta penetrantur. Ex sola enim coincidentia semidiametrorum inscripti et circumscripti circulorum in omnibus polygoniis differentium et in circulo tantum coincidentium inquisitio nos ad praemissa perduxit.

Laus Deo.

De mathematicis complementis
Beatissimo Papae Nicolao Quinto. Nicolaus cardinalis Sancti Petri ad Vincula

Traduzione italiana a p. 217.

1. Tanta est potestas summi tui pontificatus, Nicolae quinte, pater beatissime, ut per eos, qui vim eius attente consideraverunt, assimiletur potentiae quadrandi rotundum et quadrum circulandi, quasi maior illi dari non possit. Verum, cum in te non tantum primatus sit clavis et potestas scientiae supremaeque hierarchiae ecclesiae, sed velut perfectus magister omnium scibilium ex tuo felicissimo ingenio incomparabilis notitiae esse iudiceris ab omnibus. Id magnificentissime effecisti, ut omnium tam Graecorum quam Latinorum scripta, quae reperiri queunt, tua mirifica diligentia in omnium nostrum notitiam accuratissime pervenerint, ita, ut etiam geometrica non neglexeris, quae sane omni honore digna a maioribus nostris habita fuerunt.

2. Tradidisti etenim mihi proximis diebus magni Archimedis geometrica Graece tibi praesentata et tuo studio in Latinum conversa, quae mihi tam admiranda visa sunt, ut circa ipsa non nisi magna cum diligentia versari potuissem. Ex quo id effectum est, ut meo studio et labore complementum aliquod illis addiderim, quod tuae sanctitati offerre decrevi. Solum enim te dignum scio, ut quae a saeculo incognita remanserunt, per te cunctis patescant. Et non tantum scibilia, quae semper circa quaesitam circuli quadraturam versari consueverunt, sed et quae in omni mathematica perfectione praestant complementum, ex his ipsis meo iudicio perfecte consequi possint.

[LIBER PRIMUS]

3. Testimonio omnium, qui se ad geometrica contulerunt, nemo propinquius Archimede ad circuli pervenit quadraturam. Qui videns illam attingi non posse, nisi curva circularis linea in rectam resolvatur, nisus est hanc artem mediante helica ostendere. Sed quia proportio motus signi a centro per semidiametrum ad motum, in quo in eodem tempore aliud signum per circumferentiam movetur, sine qua helica describi nequit, se habet ut semidiameter ad circumferentiam, quae non est scita, sed quaeritur. Hinc videtur ipsum defecisse. Facilius enim erit circulum quadrare quam helicam describere et contingentem eidem in fine circulationis applicare. Remanet igitur ex his, quae Archimedes reliquit, haec ars adhuc penitus abscondita. Ego autem quamvis multos in vanum laborasse in hac legerim indagatione, temptare coepi, si forte haec difficultas possit medio coincidentiarum finem capere, uti in aliis scientiis vim illam maximam esse comperi. Et visum est mihi quod data possibilitate, quam passim omnes admittunt, faciliter possit huius scientia pariter et praxis modo, quo sequitur, adipisci.

4. Primo advertendum quod in figura multiangula seu polygonia, quae habet aequalia latera, punctus unus aequedistans a medio et fine laterum centrum dicitur et linea ab illo centro ducta ad medium lateris est semidiameter circuli inscripti eidem et vocetur prima linea. Et alia linea ducta ab eodem centro ad finem lateris seu angulum aliquem est semidiameter circuli circumscripti eidem et vocetur secunda linea. Hae duae lineae in omni multiangula diversae sunt quantitatis et tanto plus, quanto latus eius maius. Nam potentia secundae lineae continet potentiam primae et cum hoc potentiam medietatis lateris, quia latus trianguli orthogonii, quod opponitur angulo recto, ut ostendit Euclides.

5. Et quia prima figurarum rectilinearum est triangulus, hinc in eo differunt in quantitate prima et secunda lineae maxime. In circulo vero coincidunt, quia ibi centrum aequaliter distat a circumferentia; medium enim et finis lateris coincidunt et est undique angulus. Est autem prima linea in trigono brevissima et secunda longissima. In eiusdem peripheriae tetragono prima post primam trigoni brevissima et sic secunda post secundam trigoni longissima et ita consequenter. Et quoniam prima in tetragono tali longior est prima in trigono, si ducitur prima in tetragono in medietatem peripheriae et similiter prima in trigono in eandem medietatem, diversas superficies, quae aequantur polygoniis, oriri constat (cfr. figura 1).

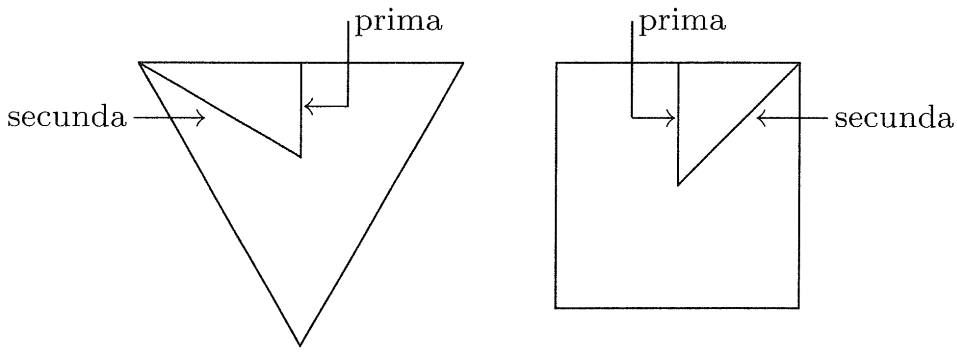


fig. 1

6. Unde excessus superficiei illius, quae ex prima tetragoni ducta in medietatem peripheriae, super superficiem, quae oritur ex ductu primae trigoni in eandem medietatem peripheriae, est excessus capacitatis tetragoni super capacitatem trigoni, et sic quidem in cunctis polygoniis ex excessu primae lineae cuiuslibet super primam trigoni isoperimetri deprehenditur excessus capacitatis ipsius polygoniae super capacitatem trigoni. Quanto autem differentia primae et secundae linearum est minor, tanto excessus primae lineae polygoniae super primam trigoni maior. Et quia in circulo coincidunt prima et secunda, excessus semidiametri circuli isoperimetri super primam trigoni est maximus et hinc circuli capacitas super capacitatem trigoni maxima. Unde linea una recta, quae in trigono ad tria latera est extensa, ut sit illius superficiei perimeter, in tetragono ad quattuor latera extenditur, ut sit tetragoni perimeter, et adhuc plus in pentagono. Si autem maxime extenditur, ita quod plus extendi non possit, erit perimeter circuli.

7. Ex his patet, quod si trigonus est minimae capacitatis, ubi prima et secunda lineae maxime differunt, et circulus maximae capacitatis, ubi prima et secunda lineae coincidunt, erit sic proportionabiliter in mediis polygoniis. Quare, si ponitur excessus capacitatis circuli super trigonum, ut est differentia primae et secundae lineae in trigono, erit excessus capacitatis circuli super tetragonum ut differentia primae et secundae lineae in tetragono et ita consequenter, cum ad maiorem excessum primae lineae unius super primam lineam alterius sequatur minor differentia primae et secundae in excedente quam sit primae et secundae in excessa. Ex quo faciliter dato excessu primae in una aliqua super primam trigoni et differentia differentiarum primae et secundae illius capacioris et primae et secundae trigoni potest haberi semidiameter circuli isoperimetri, cuius scilicet circumferentia aequatur tribus lateribus trigoni aut quattuor tetragoni.

8. Quo scito patet circuli quadratura. Nam si ducitur semidiameter illius circuli isoperimetri in medietatem peripheriae, oritur superficies quadrangularis, quae nec maior nec minor esse potest superficie circulari, ut Archimedes faciliter ostendit. Haec superficies quadrangularis in quadratam ducitur, quoniam costa eius erit medium proportionale inter semidiametrum circuli et semiperipheriam eius, quae ex nona sexti Euclidis invenitur. Omnia haec quamvis manifesta sint, volo tamen illa etiam illis, qui mathematicis operam non impenderunt, clarissima facere. Figurae autem multiangulae similium laterum et aequalium peripheriarum, de quibus loquar, polygoniae isopleures et isoperimetrae ex conformitate Graecae linguae apud aliquos reperiuntur nominari.

9. Si ducitur linea recta in lineam rectam, oritur figura quattuor rectorum angulorum, et si eadem ducitur in duplam, oritur dupla, et ita deinceps. Et si recta ducitur de angulo in angulum, diameter est, quia in duo dividit (cfr. figura 2).

Ut si *ab* linea ducitur in *bc*, oritur figura quadrangularis *abcd* habens quattuor angulos rectos. Et si *ab* ducitur in *be*, quae sit dupla ad *bc,* oritur quadrangulus *abef*, qui est duplus ad *abcd*. Linea vero *ac* diameter est, similiter et *ae*.

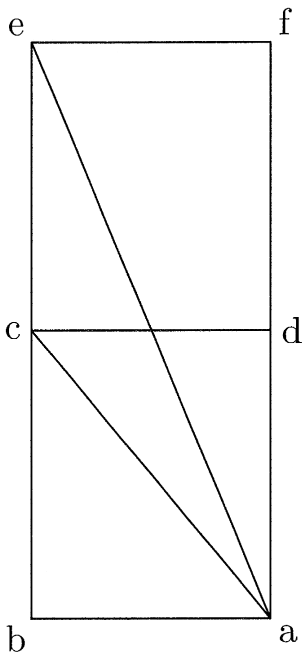


fig. 2

Prima propositio

10. Multiplicatio primae lineae in medietatem peripheriae aequatur embado polygoniae.

Sit *abcd* figura quadrata quattuor rectorum angulorum et aequalium laterum. Cui inscribatur circulus super *e* centro, ita quod tangat quattuor latera quadrati in medio, et trahatur de *e* ad contactum, ubi circulus tangit *ab*, linea *ef*, quae est prima, quia semidiameter inscripti, et trahatur *eb* linea et similiter de *e* ad contactum, ubi circulus *bd* latus tangit, et sit *eg*, et dupletur linea *fb*, et sit *fh*, et similiter dupletur *eg*, et sit *ei* dupla, et claudatur quadrangulus per lineam *ih*, et ducatur *eh* diameter. Manifestum est ex praemissa *efb* et *ebh* triangulos esse aequales. Primus enim est medietas primi quadranguli, quia *eb* diameter, et *efh* triangulus est medietas secundi quadranguli, qui est duplus ad primum, quia *eh* diameter (cfr. figura 3).

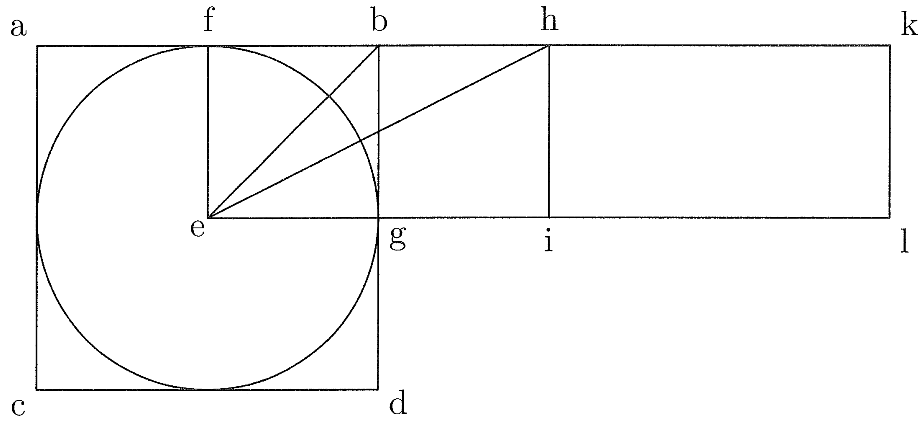


fig. 3

11. Erit igitur *ebh* triangulus ut *efb*. Duplicentur lineae *fh* et *ei*, et sit *fk* dupla ad *fh* et *el* dupla ad *ei*, et claudatur quadrangulus per lineam *lk*. Et quia *efb* triangulus est octava pars quadrati *abcd*, aequabitur *efkl* quadrangulus *abcd* quadrato. Sed *fk* est medietas peripheriae *abcd*. Aequatur enim duobus lateribus quadrati, et *ef* prima linea ducta est in medietatem peripheriae, quare patet propositum. Et sicut in quadrato, ita in omnibus polygoniis eodem modo constat, omnes enim in duplo plures triangulos orthogonios resolvuntur quam latera habeant, et proceditur pari modo, ut praemittitur.

Propositio secunda

12. Peripheria polygoniae, quae est circumscripta circulo, est maior peripheria circuli et tanto plus, quanto habuerit pauciora latera. Contrarium, si circulo fuerit inscripta.

Circumscribatur circulo *abc* triangulus et hexagonus *defhik*, et de *g* centro trahatur *ga* semidiameter circuli, quae erit prima trianguli et hexagoni. Si igitur *ag* ducitur in medietatem peripheriae trigoni, oritur quadrangulum aequale trigono. Embadum seu area trigoni in se continet aream circuli inscripti (cfr. figura 4).

13. Erit igitur area circuli minor, quare peripheria circuli minor peripheria trigoni, et sic peripheria hexagoni minor peripheria trigoni et peripheria circuli minor peripheria hexagoni, quare patet propositum. In polygoniis inscriptis contrarium, nam area circuli maior. Quare quadrangulum ei aequale constituitur ex multiplicatione semidiametri in lineam, quae erit maior quam medietas peripheriae cuiuscumque polygoniae inscriptibilis. Continet igitur area circuli aream hexagoni inscripti et illa hexagoni continet aream trigoni. Erit igitur peripheria circuli maior, deinde hexagoni post trigoni et sic pariformiter in omnibus.

Tertia propositio

14. Inter rectas et circulares lineas minor illa, quae alteri subtenditur, et inter diversas illa subtensa, quae minor, minus exceditur ab illa, cui subtenditur.

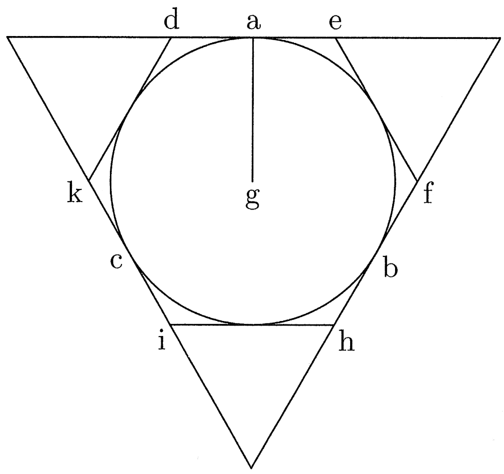


fig. 4

Tertia circumferentiae circuli, quae subtenditur lateri trigoni, est minor lateri, et sexta pars eiusdem circumferentiae, quae subtenditur lateri hexagoni, similiter est minor. Et quia talis peripheria hexagoni minor est illi peripheriae trigoni, hinc minus exceditur proportionaliter sexta circumferentiae circuli a latere hexagoni quam tertia a latere trigoni. Sic tertia circumferentiae circuli proportionaliter plus excedit latus trigoni inscripti quam sexta latus hexagoni inscripti.

Propositio quarta

15. Circulus aequalis peripheriae polygoniae est maior circulo inscripto eidem et minor circumscripto, et quanto polygonia fuerit plurium laterum, tanto illis similior.

Patet. Nam latus polygoniae est minus quam arcus cui subtenditur, qui est arcus circuli circumscripti, et maius quam arcus ei subtensus, qui est circuli inscripti. Et quia inscriptus et circumscriptus sunt similiores, quando polygonia est plurium laterum, erunt igitur tunc etiam similiores circulo isoperimetro.

Quinta propositio

16. Inter quamcumque inscriptam polygoniam et circulum possunt cadere polygoniae maiores illi et minores circulo infinitae. Sic inter circumscriptam et circulum minores polygoniae et maiores circulo.

Patet ex divisione continui per partes proportionales in infinitum. Data enim chorda cuiuscumque arcus erit chorda medii arcus minor. Ita in infinitum. Et chordae sunt latera polygoniarum. Sic de lateribus polygoniarum circumscriptarum, quia si datur latus circumscriptae polygoniae, cui subtenditur arcus, dabitur latus minus, cui subtenditur medietas arcus, ita in infinitum.

Propositio sexta

17. Quadrangulus surgens ex multiplicatione semidiametri in semiperipheriam circuli nec maior nec minor est area circuli.

Patet ex praemissis. Nam peripheria polygoniae circumscriptibilis est maior peripheria circuli, sicut et area eius maior areae circuli. Et peripheria polygoniae inscriptibilis est minor peripheria circuli, sicut et area. Igitur multiplicatio semidiametri circuli in medietatem peripheriae suae est maior omni area polygoniae inscriptibilis et minor omni area polygoniae circumscriptibilis. Et cum data area maiori polygoniae inscriptae et minori circulo semper dari possit polygonia inscriptibilis maior, sic data area maiori circulo semper potest dari circumscriptibilis polygonia minor. Igitur patet propositum.

Septima propositio

18. Capacitas circuli excedit capacitatem omnium polygoniarum isoperimetrarum.

Patet. Nam prima linea in omnibus polygoniis est minor prima linea circuli, et peripheria est una in omnibus. Plus igitur resultabit de multiplicatione primae circuli in medietatem peripheriae quam in aliqua.

Propositio octava

19. Capacitas trigoni isoperimetri est minima.

Patet, quia habet latus maximum. Plus igitur excedit peripheriam inscripti quam aliqua polygonia. Quare circulus inscriptus ei est minor omnibus inscriptis aliis. Igitur prima eius minima, hinc et capacitas minima.

Nona propositio

20. Quanto polygonia talis plurium fuerit laterum, tanto capacior.

Patet, quia cum habeat latera breviora, et potentia secundae lineae sit potentia primae et medietatis lateris. Igitur tunc prima et secunda lineae minus inter se differunt et plus assimilantur primae circuli isoperimetri. Latus enim breve minus exceditur ab arcu.

Propositio decima

21. In capaciori polygonia necesse est primam lineam esse longiorem et secundam breviorem.

Colligitur ex praemissis. Nam cum circulus eidem inscriptus sit similior circulo isoperimetro, quia capacior et circulus isoperimeter capacissimus, igitur prima linea illius polygoniae longior et latus eius minus. Minus enim latus minus exceditur ab arcu, quare propinquius accedit ad circulum isoperimetrum. Et quia latus est minus, igitur secunda linea minus differt a prima et ideo etiam similior primae circuli isoperimetri, erit igitur brevior in capaciori. Et haec est principalis propositio ad inveniendum id quod inquirimus.

Undecima propositio

22. Si ponitur excessus capacitatis circuli super capacitatem trigoni ut differentia primae et secundae lineae trigoni, erit excessus capacitatis circuli super capacitatem polygoniae mediae inter trigonum et circulum ut differentia primae et secundae lineae eiusdem, et si ponitur excessus ut medietas aut alia pars differentiae primae et secundae in trigono, ita erit in mediis.

Puta ponatur, quod excessus capacitatis circuli super capacitatem trigoni sit ut differentia primae et secundae, et sit in numeris prima trigoni 7 et secunda 14. Erit differentia

7. Et prima circuli isoperimetri erit 14, quia maior prima trigoni per differentiam, quae est 7. Dico, quod prima circuli erit maior prima cuiuslibet mediae polygoniae per quantitatem differentiae primae et secundae eiusdem. Ut in tetragono, ubi differentia sit 4, excedit prima circuli primam tetragoni in 4. Erit igitur tunc prima tetragoni 10. Si dixeris tetragonum capaciorem in habitudine ad circulum, erit igitur prima eius longior. Sit igitur ut 11, cui adde differentiam, et habebis 15. Et quia 15 excedit 14, erit incapacior per praemissam, sic capacior et incapacior. Similiter, si dixeris tetragonum minus capacem. Puta ut 9, erit secunda 13, sic minor 14, quare capacior per praemissam. Ita capacior et incapacior, quod est inconveniens. Et haec ostensio procedit in omnibus.

23. Considera igitur, quod quamcumque portionem sagittae addit una polygonia, ut oriatur prima circuli, similem omnes addunt. Et ut hoc clare videas, sic procede. Patet ex praemissis, si prima capacioris polygoniae est maior quam incapacioris, quod illa semper erit minor aliqua prima alicuius polygoniae, cum inter quamcumque dabilem, quae minor est circulo, possint dari maiores in infinitum. Et ita talis semper est minor prima circuli. Sic si fuerit minor illa, erit maior secunda linea alicuius polygoniae et sic maior prima circuli. Ideo, si posueris ex additione alicuius portionis sagittae ad primam polygoniae resultare primam circuli isoperimetri, sic necesse erit ex portione similis habitudinis ad sagittam additae primae in quibuscumque intermediis polygoniis accidere.

24. Puta si duae tertiae sagittae trigoni ad primam eius additae efficiunt primam circuli, sic erit in pentagono, hexagono et omnibus. Nam si dixeris in aliqua resultans plus aut minus esse, hoc erit necessario propter maiorem capacitatem. Si igitur dixeris eam maiorem, hoc non est possibile; nam oporteret eam esse minorem prima circuli, et quia prima circuli est idem cum prima trigoni addita portione dicta sagittae, ita foret maior et minor. Similiter, si dixeris propter capacitatem minorem, oporteret simul dicere eandem et maiorem.

25. Palam ex hoc etiam, quod si duae polygoniae sic se habuerint, quod similis portio sagittae addita ad primas efficit hinc inde aequale, ita erit necessario in omnibus. Nam aut illae duae polygoniae habent alias in medio inter eas, ut trigonus et pentagonus habent tetragonum. Tunc necesse est sic esse in tetragono sicut in trigono et pentagono. Nam si dixeris lineam resultantem maiorem ob maiorem capacitatem tetragoni quam trigoni, ita erit etiam minor, quia minor capacitas tetragoni quam pentagoni. Ita si dixeris ob capacitatem lineam resultantem minorem, quia etiam erit simul et maior, quod est impossibile. Sic si dixeris duas illas sine medio sequi, ut trigonus et tetragonus, et negaveris idem in pentagono. Tunc, quia aut dixeris maiorem ob maiorem capacitatem pentagoni et hoc non potest dici, nam tetragonus est capacior, ubi non est maior: a fortiori non erit maior in pentagono, sed potius minor. Sic si dixeris minorem, non valet, quando in tetragono non est minor. Sic patet sequi inconveniens, si in aliis non eveniret idem.

26. Ad hoc sequitur, quod si ex simili portione in duabus polygoniis modo dicto eadem linea exoritur, quod illa erit semidiameter circuli isoperimetri. Nam cum in circulo isoperimetro prima et secunda linea sint una, hinc, si additur ad primas polygoniarum quaecumque portio sagittarum, sive lineae ascendant sive descendant sive maneant eaedem, semper ultima erit prima circuli isoperimetri. Puta si addo ad primas unam quartam sagittae, tunc erunt continue maiores, et maxima erit ultima et prima circuli. Et si addo tres quartas, erunt continue minores, et ultima erit minima et prima circuli. Et si addo talem portionem, quod in duabus resultat eadem linea, tunc sic erit in omnibus. Unde cum ultima tunc sit ut prima, erit quaelibet prima circuli. Ex quo etiam manifestum est capacitatem circuli excedere capacitatem cuiuslibet polygoniae secundum lineam eandem in qualibet habitudinem tenentem ad sagittam suam. Et ita etiam quaelibet capacior polygonia omnes minus capaces exsuperat secundum lineam eandem in qualibet habitudinem ad suam sagittam retinentem.

27. Poterit et hoc aliter ostendi (cfr. figura 5). Et sit *ab* linea secunda trigoni, quam dividat *c*, trahas orthogonales de *a b c* aequales *bc* et claude figuram per lineam *def*. Et quia prima linea trigoni est *ac*, erit prima circuli isoperimetri plus quam *fe*: sit igitur ut *fh*, et sit *eh* duae tertiae *ed*. De *h* trahe aequedistantem ad *bd* et sit *hi*, trahe similiter lineam *ch*. Manifestum est quod, si *fh* est prima circuli isoperimetri, quod tunc primae lineae polygoniarum mediarum erunt maiores *ac* et minores *fh* et quae capacior huius prima similior *fh*. Est etiam manifestum, quod sicut *ai* et *ih* simul sunt prima trigoni et differentia primae et secundae eiusdem, quae est sagitta lateris eius, et cum hoc duae tertiae sagittae, quod sic in polygoniis mediis lineae trahi possunt aequedistantes ad *ai*, quae terminantur in *ih* et *af*. Quae iunctae residuae lineae *ih* aequantur primae lineae polygoniae mediae, sagittae et duabus tertiis sagittae eiusdem, ut in trigono dictum est. Et notum est, quod quanto polygonia illa fuerit incapacior, tanto hae duae lineae simul erunt longiores, quia incapacior habet maius latus et hinc maiorem sagittam. Sic erunt illae duae lineae longissimae in trigono, in circulo isoperimetro brevissimae, quia circulus caret latere et per consequens sagitta, et duae lineae in polygoniis erunt una in circulo.

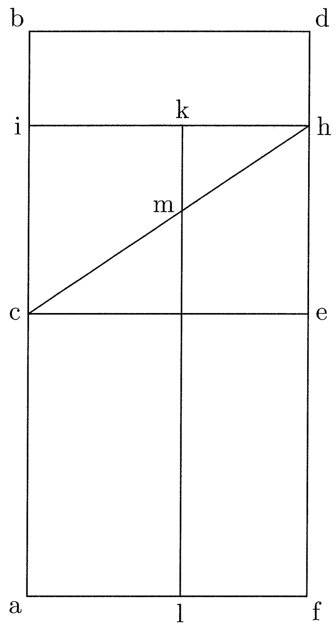


fig. 5

28. Dico igitur quod, si de *h* versus *i* signaveris sagittam alicuius polygoniae mediae et lineam de termino sagittae aequedistantem ad *ai* traxeris, tunc *ch* linea secabit illam in duas lineas, quarum minor erit pars sagittae et maior prima polygoniae illius. Puta sit *hk* sagitta tetragoni et trahatur de *k* aequedistans ad *hf*, quae sit *kl*, et ubi illam secat *ch*, pone *m*. Dico *km* fore duas tertias *hk*, quod de se notum est. Habet enim se *mk* ad *kh* sicut *ci* ad *ih*. Et dico *ml* fore primam lineam tetragoni. Si negaveris aut igitur dixeris tetragonum capaciorem aut incapaciorem: si capaciorem, tunc prima eius debet esse maior *lm* et tunc *lk* et *kh* simul sunt minores prima linea tetragoni, eius sagitta et duabus tertiis sagittae, quod implicat contradictionem. Nam si debet tetragonus esse capacior, ut dicis, oportet quod *lk* et *kh* excedant primam tetragoni, sagittam et eius duas tertias. Eodem modo implicat contradictionem, si dixeris tetragonum incapaciorem. Nam tunc oportebit *lm* esse minorem et *lk* et *kh* simul esse maiores prima linea tetragoni, sagitta et duabus tertiis eiusdem. Ita de aliis polygoniis. Quare patet, si prima circuli isoperimetri excedit primam trigoni per partem aliquotam sagittae trigoni, etiam excedit primam lineam cuiuslibet polygoniae mediae per similem partem aliquotam sagittae polygoniae illius, et dicere aliud implicat contradictionem.

Propositio duodecima

29. Habitudo excessus capacitatis circuli super capacitatem trigoni isoperimetri ad excessum capacitatis polygoniae mediae super capacitatem eiusdem trigoni est sicut sagitta trigoni ad lineam, quantum est sagitta polygoniae mediae eidem minorem.

Ut si ponitur excessum capacitatis circuli super capacitatem trigoni esse ut 7, erit capacitas tetragoni super trigoni secundum lineam, a qua sagitta tetragoni est subtracta. Puta si sagitta fuerit 4, erit capacitas tetragoni ut tria. Hoc corollarium patet ex praemissis.

Tredecima propositio

30. Per scientiam excessus capacitatis alicuius polygoniae mediae super capacitatem trigoni isoperimetri scitur capacitas circuli isoperimetri.

Manifestum est, cum habitudo sit nota, quod tunc uno excessu noto notus erit et alius. Sed quia excessus in tetragono, pentagono, hexagono vel alia media polygonia sciri potest per scientiam primae lineae trigoni et polygoniae mediae, tunc et circuli isoperimetri.

31. Datae rectae curvam circularem aequalem assignare (cfr. figura 6).

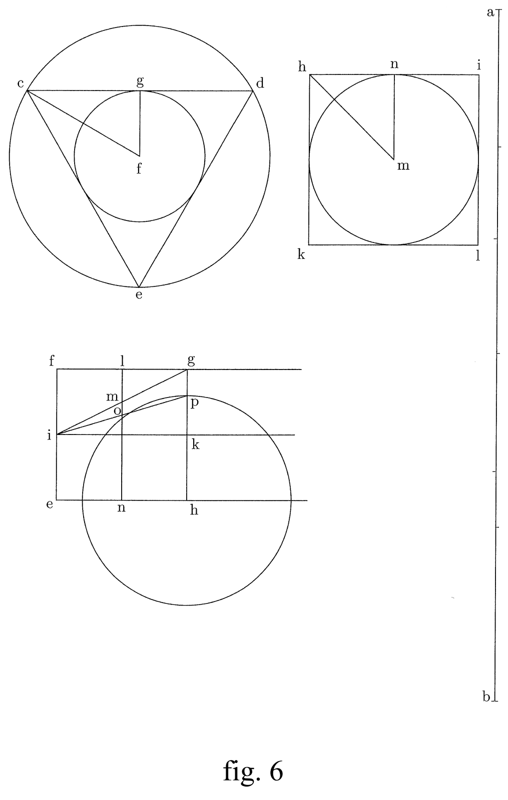


fig. 6

Sit recta *ab* et factis ex ea trigono et tetragono ut praemittitur, sit *ef* linea secunda trigoni, quam quadra, et sit *efgh*. Divide per medium per lineam *ik*, trahe lineam *ig*, quaere, ubi *ig* et *fg* distant per differentiam primae et secundae tetragoni, et trahe lineam aequedistantem *ef* et sit *ln* et differentia *lm*. Signa in *nl* primam tetragoni, quae sit *no*, trahe de *i* per *o* lineam ad *gh*, et ubi eam scindit, pone *p*. Manifestum est ex praemissis *hp* semidiametrum circuli, cuius peripheria aequatur peripheriis trigoni et tetragoni seu lineae rectae *ab*, quod est intentum.

32. Datae curvae circulari aequalem rectam assignare (cfr. figura 7).

Istud si breviter facere volueris, facito angulum, per quem reperias hoc modo: Ad *hp* semidiametrum circuli praemissi iunge in centro lineam *ab* orthogonaliter et ad eius medietatem, quae sit *q*, trahe *pq*, et habes angulum *hpq*. Quem facito in aere aut ligno, et quando circularem lineam in rectam resolvere cupis, facito lineam indefinitae quantitatis, quae ad angulum rectum concurrat cum semidiametro in centro, et pone angulum in contactu semidiametri et circumferentiae minus latus super semidiametrum. Et maius latus anguli abscindet in linea indefinitae quantitatis portionem aequalem semiperipheriae.

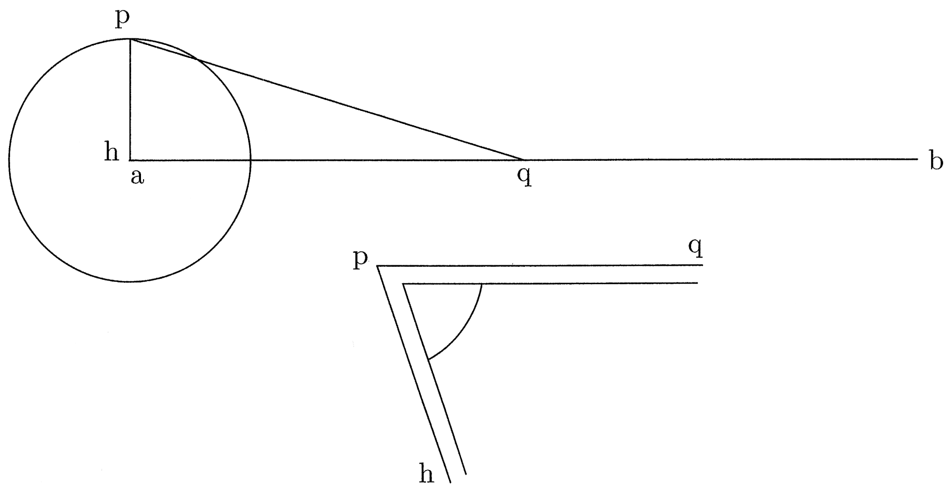


fig. 7

33. Dato circulo quadratum aequale assignare (cfr. figura 8).

Hoc sic facito: Inter *hp* et medietatem *ab* recipias medium proportionale per nonam sexti Euclidis, quoniam est costa quadrati aequalis, et medietatem huius costae signa in linea, quae ad angulum rectum coniungitur *hp* in centro, et sit *hr:* trahendo *pr* et habes angulum *hpr*. Quem facito ex aere vel ligno, et modo, quo supra, cum illo omnes circulos quantocius quadrare poteris.

34. Dato quadrato circulum ei aequalem assignare.

Erige de medietate lateris rectam orthogonaliter et pone super illam angulum statim praemissum elevando, quousque longius latus anguli cadat super finem lateris quadrati, et linea erecta usque ad punctum anguli erit semidiameter circuli aequalis quadrato. Omnia ista patent de se propter identitatem proportionis semidiametrorum ad circumferentiam et costas quadratorum in omnibus circulis.

35. Sine istis duobus angulis facere poteris ex praemissis per identitatem proportionis eius, quod addit semidiameter circuli super semidiametrum trigoni (cfr. figura 9). Puta si vis dati circuli circumferentiam, quae sit *s*, transferre in rectam, sume qualemcumque lineam, ut *ab*, et reperias circumferentiam sibi aequalem per praemissa. Deinde erige lineam unam, quae sit *hp*, orthogonaliter super aliam, quae sit *tv*, et sit *hp* semidiameter

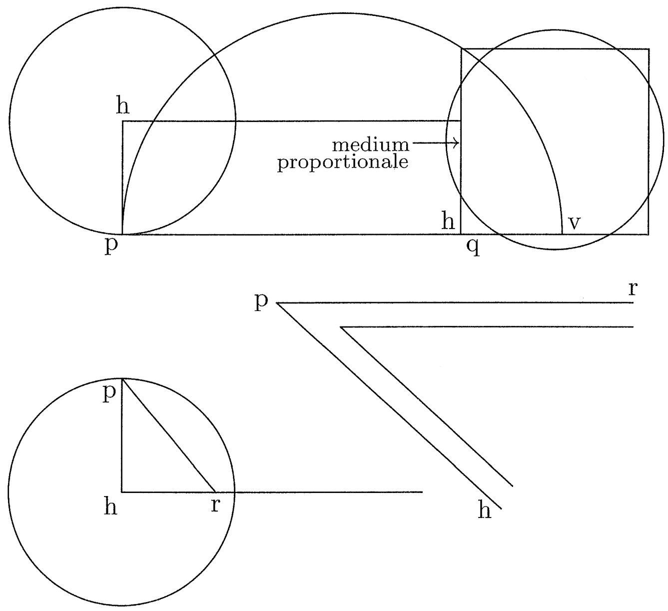


fig. 8

circuli, et signa in illa *hk* semidiametrum trigoni isoperimetri circulo trahendo de *t* per *h k* lineas. Deinde semidiametrum dati circuli *s* aequedistanter trahe ad *hp* inter lineam *tv* et eam, quae de *t* transit per *p*, et sit *xy*, et ubi *xy* scinditur per lineam de *t* per *k*, signa *z*. Clarum est *yz* esse semidiametrum circuli inscripti trigono isoperimetro circulo *s*. Ita reperies rectam quaesitam.

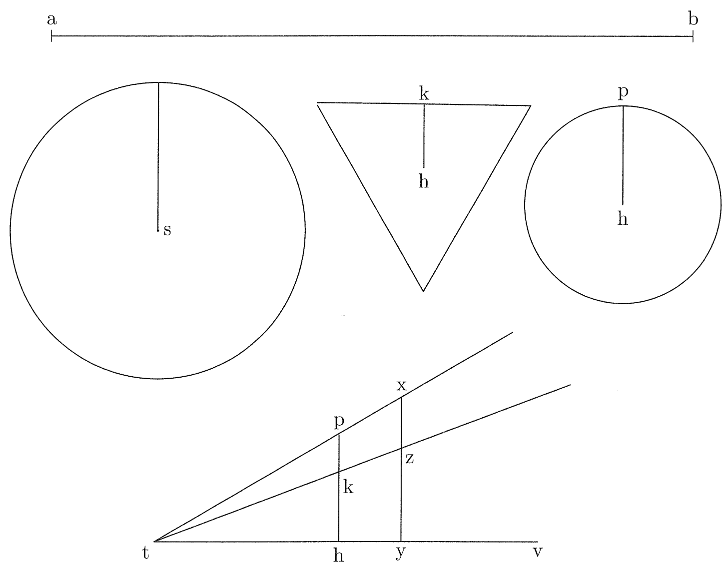


fig. 9

36. Ex antehabitis quicquid hactenus in geometricis ignotum fuit, inquiri poterit. Fuit autem incognita perfectio artis de sinibus et chordis. Nemo umquam scire potuit chordam arcus gradus unius et duorum et quattuor et ita consequenter, quae nunc sic habetur. Manifestum est omnem multiangulam similium laterum ex differentia primae et secundae linearum ad habendum semidiametrum circuli isoperimetri aequalis proportionis partem addere super primam, et similiter omnem excessum, quo prima linea cuiuscumque primam trigoni excedit, et excessum, quo secunda trigoni secundam alterius excedit, eandem semper in omnibus tenere proportionem. Ex quibus ars generalis de sinibus et chordis elicitur, sine qua geometria hactenus mansit incompleta. Quomodo autem ad praxim huius accedere queas in propinquis numeris, sic investigabis. In veris enim est impossibile, quia medietas duplae est innumerabilis, cum nec par nec impar, quae cadet in hac ratione.

37. Esto igitur quod semidiameter circuli trigono circumscripti sit 14. Erit semidiameter inscripti 7, cuius quadratum 49, et quadratum semilateris trigoni ter tantum, scilicet 147, et quadratum semidiametri circumscripti quater tantum, scilicet 196. Erit igitur semilatus tetragoni radix 9/16, id est novem sextae decimae, quadrati semilateris trigoni, scilicet radix 82 cum 11/16, et talis erit semidiameter inscripti. Erit autem semidiameter circumscripti radix dupli numeri, scilicet 165 cum 6/16. Subtracta igitur radice de 49 a radice de 82 cum 11/16 differentia est additio semidiametri inscripti tetragono super semidiametrum inscripti trigono, quae erit aliquid plus quam duo. Et subtracta radice de 165 cum 6/16 a radice de 196, quae erit parum plus quam unum, habes additiones, et earum habitudo est illa, per quam omnia investigantur. Nam si has additiones subtraxeris a sagitta lateris trigoni, scilicet 7, remanet sagitta tetragoni. Si igitur diviseris 7 secundum praefatam habitudinem additionum et maiorem addideris super semidiametrum inscripti trigono, habes semidiametrum circuli isoperimetri.

38. Poteris etiam ex quadrato lateris trigoni aut quadrati scire sic quadratum lateris cuiuslibet polygoniae dabilis, et ex eius scientia et habitudine additionum devenitur ad sagittam et semidiametrum inscripti, et sic scitur arcus chordae. Et haec est perfectio ultima geometricae artis, ad quam hactenus veteres non legi pervenisse. Est etiam nunc ars completa geometricarum transmutationum, quam ante minus, tamen sufficienter quoad quadraturam circuli descripsi.

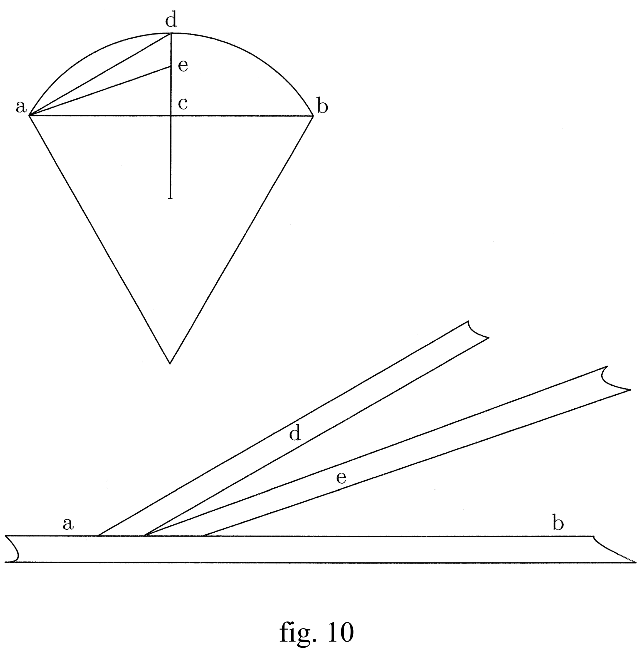


fig. 10

39. Adhuc ut latus cuiuscumque multiangulae quantocius vertas in curvam, facere poteris instrumentum duplicis anguli. Ut si latus sit *ab* trigoni, cuius sagitta seu primae et secundae linearum differentia, quod idem est, sit *cd*, et additio semidiametri circuli super primam trigoni sit *ce*. Tunc si de *a* per *e* lineam traxeris et similiter de *a* per *d* aliam, duo anguli circa *a* constituentur. Redige igitur *bae* et *bad* in unum aereum instrumentum, quod applica in omnibus ita, ut iam in trigono, sic quod latus *ab* eiusdem iaceat super latus multiangulae et latus *ad* contingat finem sagittae. Tunc latus *ae* ostendit additionem super primam illius multiangulae, ut sit semidiameter circuli isoperimetri. Descripto igitur arcu secundum hoc et tractis sectoribus de centro ad fines lateris arcus, qui cadet inter sectores, aequabitur lateri dato. Procedit veritas huius ex aequali habitudine portionis addendae super primam multiangulae, ut fiat semidiameter circuli isoperimetri, ad totam differentiae primae et secundae linearum multiangulae, quae differentia sagitta nominatur (cfr. figura 10).

40. Adhuc ex praemissis constat, quod sicut quaecumque recta potest esse latus trigoni, tetragoni, pentagoni et ita consequenter, sic data recta dari poterunt innumerae curvae ei aequales, et quod propterea poterunt reperiri anguli, qui se habent ut datae lineae, scilicet ut costa et diameter quadrati vel diameter circuli et circumferentia eius et ita de omnibus, et superficies, quae se habeant ut lineae datae. Ex quo illa, quae non solum in geometricis fuerunt hucusque occulta, sed et in musicis et in musicalibus instrumentis ignorata, venari poterunt, ita quod si quod scibile umquam fuit in geometricis et non scitum, amplius volenti ingenium applicare clare patefiat. Et ob hoc haec adinventio merito nomine complementi sortitur et digna est, ut per admirandam potentiam tuam, beatissime pater, quam omnes catholici adeo stupent, ut te ab admiranti dictione papae papam appellent, in omnium notitiam deducatur.

[LIBER SECUNDUS]

42. Adicio nunc alias quasdam meas adinventiones circa superficierum ad invicem transmutationes, quas ut priores sanctitati tuae dedico, qui in omnibus principatum tenes et solus dignus es, ut cuncta tibi patescant.

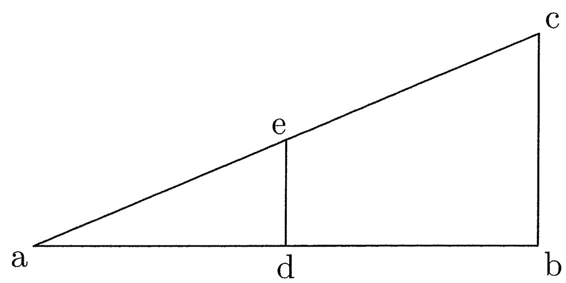


fig. 11

43. Lineam figuram motus puncti concipio. Quae si recta fuerit, tunc si uno eius termino fixo manente movetur, hic motus recte per triangulum orthogonium figuratur (cfr. figura 11). Ut si *ab* linea movetur *a* stante, motus figuratur per triangulum *abc*. Si enim motus *b* est ut latus *bc*, tunc sic proportionabiliter omnia puncta dabilia. Puta si *d* est punctus medius, tunc *de* est ut motus *d*, et *de* latus est medium ad *bc* (cfr. figura 12). Si vero *ab* recta movetur aequaliter in *a* sicut in *b*, motus configuratur per duplicem orthogonium sive quadrangulum *abcd*; omnia enim puncta dabilia aequaliter moventur. Si vero *a* movetur similiter et *b*, sed inaequaliter, hoc fieri potest infinitis modis et unica figura non poterit configurari.

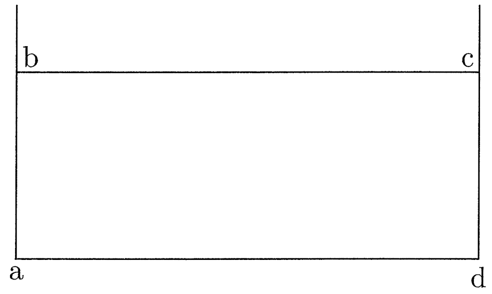


fig. 12

44. Ex prima configuratione motus lineae rectae, cuius unus terminus manet fixus, sequuntur ista: Scilicet quod superficies, quae est mensura motus lineae, quae ex revolutione lineae exoritur, habet lineam curvam peripherialem, quae ex puncto *b* exoritur, et superficiem circularem, quae ex linea *ab* provenit. Quod si in *ab* aliqualem punctum signaveris, puta in medio, qui sit *d*, peripheria ex *d* erit se habens ad peripheriam ex *b* sicut in configuratione *de* latus ad *bc* latus; sunt enim peripheriae mensurae motus punctorum. Unde necesse erit omnem semidiametrum ad circumferentiam eandem tenere mensuram (cfr. figura 13).

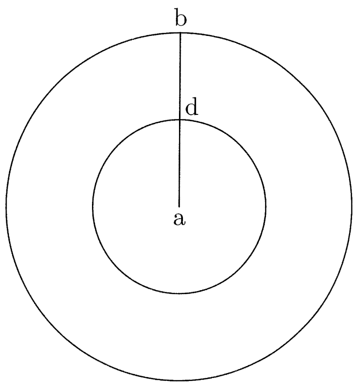


fig. 13

45. Deinde quia superficies ex motu semidiametri super peripheriam constituitur et una est omnium semidiametrorum ad peripherias habitudo, illa erit habitudo superficierum quae potentiarum semidiametrorum. Quare superficies circuli habens semidiametrum ut quattuor ad superficiem illius, quae habet semidiametrum ut duo, quadrupla est. Quae conicarum superficierum ad invicem et ad suas bases habitudo ex hoc habetur. Nam cum semidiameter basis et latus trianguli, quod conicam describit, moveantur uno terminali earum puncto fixo et super eadem basis circumferentia, illa erit superficierum habitudo, quae linearum, ex quarum motu ipsae superficies constituuntur. Uti est semidiameter basis et latus illud trianguli, ex quo conica, ut *ab* et *bc* (cfr. figura 14).

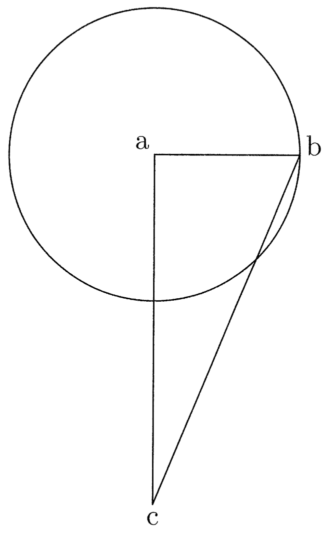


fig. 14

46. Ex secunda configuratione motus lineae aequaliter in omnibus punctis motae sequitur quod superficies, quae ex tali motu constituitur, dupla est ad illam, quae ex primo motu. Quare si semidiameter movetur secundo motu super eadem peripheria, super qua primo motu mota est, oritur superficies dupla ad primam. Unde necesse erit quod multiplicatio semidiametri in semiperipheriam aequetur superficiei circulari. Dico autem, quando ambo terminalia puncta aequaliter moventur (cfr. figura 15).

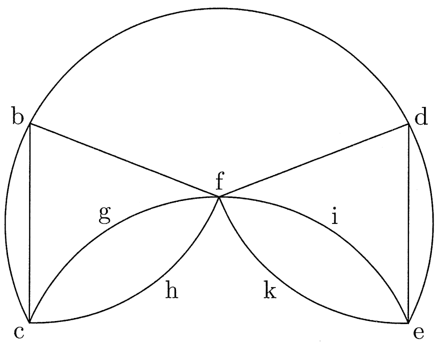


fig. 15

Nam si unus moveretur super concavitate alicuius arcus et alius super convexitate eiusdem, superficies non foret dupla ad illam, quae fuit exorta ex motu eiusdem lineae uno termino eius fixo stante et alio in concavitate arcus moto, licet arcus sint aequales. Ut si arcus *bd* est ut arcus *ce*, si *bc* linea movetur superficiem describendo, quae clauditur inter rectas *bc* et *de* et curvas *bd* et *ce*, licet super aequalibus arcubus moveatur, non tamen describit duplam superficiem ad motum *ab* aequalis *bc* fixo *a* stante et *b* moto usque in *d* per aequalem arcum, quia *b* movetur in concavitate *bd* arcus, sed *c* de linea *bc* in convexitate. Minuit autem convexitas, quantum sunt illae portiones *fgch* et *fiek*.

47. Ex hoc quae circa habitudines cylindrorum seu rotundarum columnalium superficierum et suarum basium et cylindralium, conicarum curvarum atque planarum circularium omnis scientia elicitur. Nam constat columnam rotundam, cuius altitudo est ut semidiameter basis, habere duplam superficiem basis. Nam linea, quae basim efficit, movetur uno puncto eius terminali stante, alio circumferentiam describente et illamet columnarem superficiem constituit per motum aequalem utriusque terminalis puncti super eadem circumferentia basis, ut ex *abc* angulo recto super *a* circumvoluto describitur basis per *ab* et per *bc* duplex superficies cylindrica, quia *bc* aequalis *ab* aequaliter in *b* et *c* punctis terminalibus movetur (cfr. figura 16).

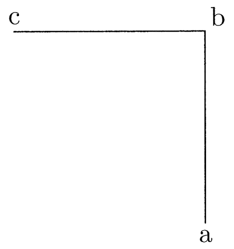


fig. 16

48. Sic pariformiter in conicis. Si *abc* triangulus, cuius angulus *bac* rectus super *ac* revolvitur, et *bc* latus fuerit duplum ad *ab*, aequabitur illa conica superficies priori columnari, et si feceris circulum, cuius semidiameter dupla foret ad *ab*, eius superficies plana aequabitur ambabus, columnari et conicae simul (cfr. figura 17).

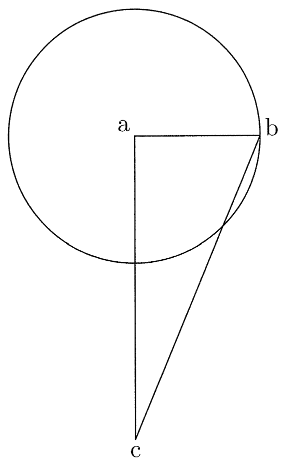


fig. 17

49. Palam ex his, si circumferentialis linea circuli in rectam redigeretur et duceretur in ipsam semidiameter, superficies quadrangula, quae surgeret, dupla foret ad circularem, cuius erat circumferentia. Nam haec ductio motus esset, ubi ambo terminales puncti aequaliter moverentur, sed constitutio circuli ex motu eiusdem lineae altero puncto stante oritur. Recte igitur dictum est a multis, quod ductio seu multiplicatio semidiametri in semicircumferentialem lineam efficit superficiem aequalem circulo.

50. Adhuc est alius motus compositus, scilicet progressionis et descensionis, ut in figura. Nam, ut concipis, *ab* movetur duplici motu, super *ac* scilicet continue progrediendo et simul descendendo aequaliter (cfr. figura 18). Erit mensura progressionis *ac*, descensionis *ab* et descensionis et progressionis simul *bc*. In quanto enim tempore progreditur de *a* in *c*, in tanto descendit *b* per *bc*, ut veniat in *c*, et exoritur figura *abcd*. *bc* in se complicat duplicem motum descensionis *ab* et progressionis *ac*, quare potentia *bc* est ut *ab* et *ac*. Ex hoc nota, quomodo ex motu lineae simul oriuntur duo trianguli et quadrangulus.

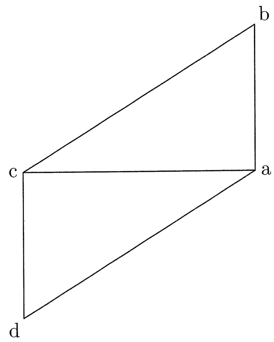


fig. 18

51. Si autem *ab* movetur progrediendo in *ac* et descendendo inaequaliter, ita tamen, quod illa inaequalitas est aequalis arcui, tunc oritur figura *abcd*, et quoniam *bc* arcus in se complicat motum progressionis et descensionis inaequalis, igitur *cb* arcus est maior linea *cb* (cfr. figura 19). Et dico motum descensionis inaequalem, quia postquam *b* pervenit ad medium arcus, non descendit per medium sui infra *ca*, sicut quando descendit per medium lineae *bc*. Et considera quomodo *a* describit arcum *ad*. Movetur igitur *a* in convexitate et *b* in concavitate, et quantum addit concavitas super lineam *cb*, tantum convexitas minuit. Quare curva superficies inter arcum *bc* concavum et arcum aequalem *ad* convexum aequatur quadrangulo rectilineo *abcd*, et ita habes quomodo eadem quantitas inter maiores curvas cadit et minores rectas. Possunt ex his varii alii compositi motus concipi modi, quos nunc transeo, quia quisquam per se illos concipere poterit.

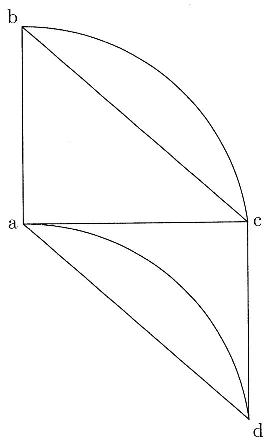


fig. 19

52. Si ad tertium motum, quando ambo termini lineae moventur, sed inaequali motu, advertis, clare comperies secundum proportionem motuum superficies attingi (cfr. figura 20). Et ut facilius inducaris, concipito *ab* lineam duplicem et divisibilem usque ad *b* punctum, qui indivisibilis utriusque divisae terminus maneat. Esto igitur quod *a* stante *b* moveatur. Si tunc *a* divisum elevaveris, ut circa *b* fiat angulus, tunc secundum circumferentiam, quam *a* mobile describit, ad circumferentiam, quam *b* describit, scire poteris proportionem superficierum. Puta esto quod *a* mobile elevetur, ut constituat talem angulum, quod linea, quae de *a* cadit usque ad punctum, qui ita distet ab horizonte, sicut *a* fixum, et sic *ad* sit medietas *ab*, tunc *ba* mobile describet superficiem conicam, quae erit maior plana circulari, quam *ab* describit, pro medietate, et ita proportionaliter in omnibus. Quare patet, quod quando *a* mobile elevatur, ut eius motus sit duplex ad motum *ab*, scilicet quando erit ex ipsis linea una, tunc *ba* mobile describet superficiem triplam et planam ad superficiem, quam *ab* describit. Et illa est ultima et maxima; quae in medio cadunt, proportionabiliter apprehendes. Ex quo habes, quomodo portiones conicas, quae habeant proportionem quam volueris ad basim, constituere poteris, et similiter, quomodo superficies rhombicas, quae ex duabus conicis unam basem habentibus reducere poteris in alias. Et quaeque circa hoc scire optas, ex hoc faciliter elicies.

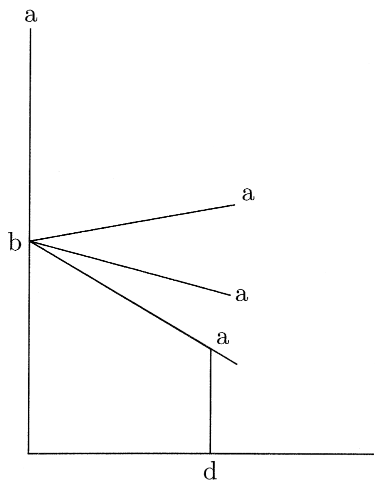


fig. 20

53. Est autem advertendum ex praemissis, quomodo in conicis possis procedere. Ut si *abc* triangulus sit et *ab* latus describens conicam et *cb* semidiameter basis, trahe lineam *ac* in continuum et de *b* duc lineam, ut facias aequalem triangu lum, qui sit *bdc* (cfr. figura 21). Manifestum est, si *ad* fixa manente circumvolvitur triangulus *abd*, rhombum oriri ex duobus aequalibus conis. Trahe igitur *ab* in continuum, et sit *be* ut *ab*. Clarum est, si circumvolvitur ut prius, lineam *be* efficere superficiem triplam ad superficiem *ab* et conicam superficiem *ae* quadruplam ad eam, quae ex *ab*. Unde si *bd* elevaveris in medium inter *bd* et *be*, efficiet superficiem duplam sicut *bd* aequalem et *bc* triplam, et semper pervenietur ad medium, quando faciet angulum rectum cum semidiametro basis, et si minus vel plus elevatur, minus et plus efficiet, ut haec ex praemissis nota sunt. Habes igitur, quod quando conus et columna rotunda habent eandem basem et latus coni est ut altitudo columnae, superficies columnae semper est dupla ad superficiem coni, et si plus, plus, si minus, minus proportionabiliter.

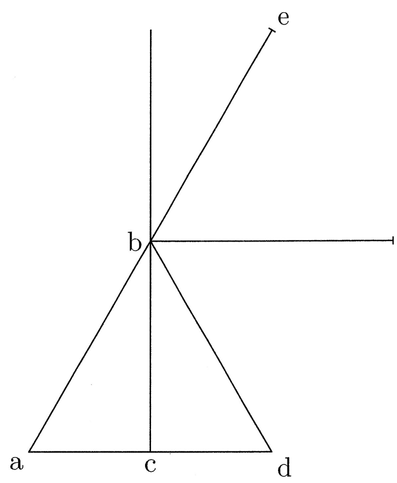


fig. 21

54. Si feceris latus coni chordam arcus describendo arcum super ipsum, ut super *ab* latus *afb* arcum et super *be* eundem arcum, erit superficies ex curva *afb* tertia superficiei, quae ex curva *be*. Et ita, si volueris duplam, facito, ut in conicis dictum est. Unde si *afb* est quadrans, palam ex circumvolutione semisphaericam oriri superficiem et ex *bg* curva duplam eius, scilicet superficiem curvam aequalem superficiei ‹sphaerae›, cuius *cb* maioris circuli semidiameter, et ex *bc* curva triplam (cfr. figura 22).

Ex quo elicias, quomodo in talibus curvis superficiebus poteris qualem volueris multiplicationem efficere.

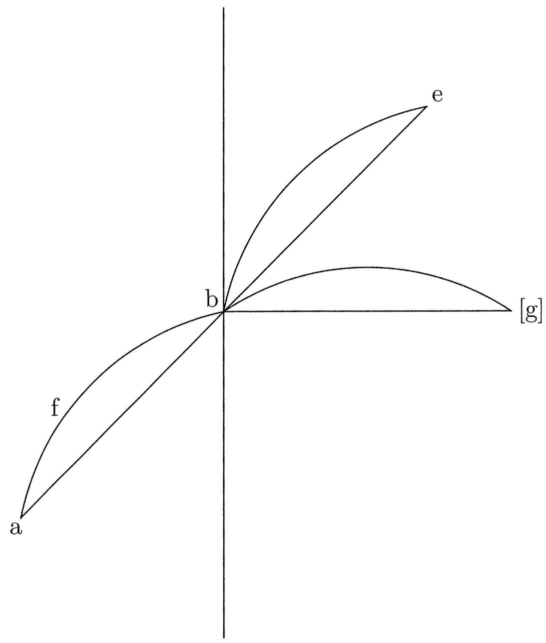


fig. 22

55. Si feceris arcum lineam curvam curvitate alicuius sectionis parabolae aut transversae cylindri, quae sectiones non sunt circulares, sed alia curvitate curvae, eodem modo procedendo aequalis erit proportio superficierum.

56. Si *ab* stante *a* circumducto circularem planam superficiem descripseris et quadrantem descripti circuli uno eius terminali puncto ad *b* iuncto, alio, qui sit *c*, ut *a* fixo stante super *ac* circumduxeris, superficies ex quadrante dupla erit ei, qui ex linea *ab* exoritur (cfr. figura 23). Patet, nam ex *bc* oritur superficies semisphaerica et *ab* circulus maximus, cuius quattuor superficies aequantur superficiei sphaerae, ut probat Archimedes.

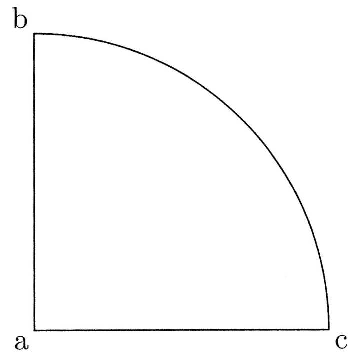


fig. 23

57. Si volueris cylindricam, sphaericam ac conicam superficies et infinitas portiones conicas describere eiusdem superficiei, sic facito (cfr. figura 24):

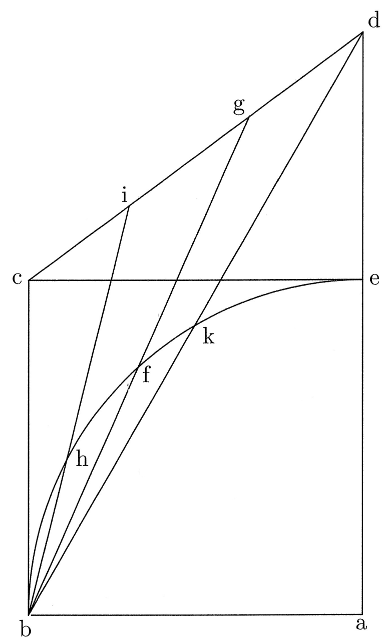


fig. 24

Sit *ab* semidiameter alicuius circuli, cui iunge ad angulum rectum *bc* aequalem *ab*, trahe de *a* aequedistantem ad *bc* in infinitum et sit *ad*, trahe de *b* ad *ad* lineam duplam ad *ab*, et sit *bd* dupla ad *ab*. Deinde trahe lineam de *d* ad *c*. Dico quod omnes lineae, quae duci possunt de *b* ad *cd* in circumvolutione describunt portiones conicas aequales vel pyramidali *bc* vel conicae *bd*, quod ex *bc* et ex *bd* oriantur aequales, quae sunt duplae ad planam circuli, cuius *ab* semidiameter. Superius est manifestatum, quod vero mediae sic se habeant, puta *bi* et *bg* et quaeque tales. Patet, nam non possunt superficies esse maiores illi, quae ex *bc*, nec minores illi, quae ex *bd*. Quae cum sint aequales, erunt et similiter omnes mediae aequales. Describe quadrantem circuli, cuius *ab* semidiameter, et sit *be*. Manifestum ex praemissis superficiem, quae ex curva *be* oritur, illis aequalem.

58. Curvas lineas, non tamen circulares, ex inaequali motu lineae in ambobus suis terminalibus punctis causatas concipito, ac si *ab* recta moveretur et *b* plus quam *a* (cfr. figura 25).

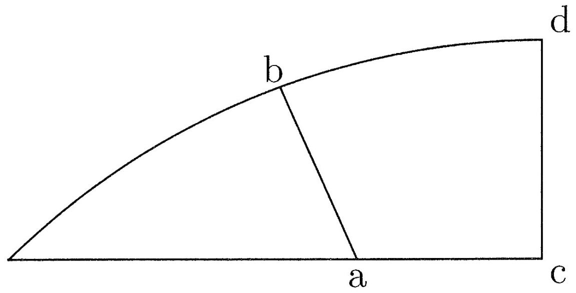


fig. 25

Puta *a* movetur per lineam *ac* et *b* per curvam *bd* et si regulariter, tunc quando *a* pervenit ad medium *ac*, etiam *b* pervenit ad medium *bd*. Potest etiam unus punctus moveri regulariter continuo aequali motu et alius inaequali motu. Puta in principio velociori et continue tardiori successive et regulariter per aequalem scilicet inaequalitatem. Ex his diversitatibus varias contingit oriri curvitates; aliquae erunt ut sectiones conicae, aliae ut transversales cylindricae aut obliquae sphaericae sectiones.

59. Ex quo curvae superficies sectionum, quae parabolae dicuntur, et transversalium cylindrorum non causantur directe ex motu lineae. Si volueris inquirere portionum illarum habitudines, ita facito: Considerabis excessum chordae super sagittam, et ille excessus erit ut motus lineae aequalis sagittae in uno eius puncto, alius motus alterius puncti erit ut curva. Unde superficies erit medium eius, quod fit ex ductu sagittae in curvam ac si non foret linea mota in uno eius termino, et erit ultra medium secundum habitudinem potentiae excessus arcus super sagittam ad potentiam curvae.

60. Puta esto quod abscisio sit in circulo et quod per semichordam et sagittam sextae circumferentiae, quae signetur per *abc*, et sit *ab* semichorda duplicis arcus et *ac* sagitta et centrum circuli *d* (cfr. figura 26). Trahe *db* et *dc* et lineam *bc*. Manifestum est *ac* et *ad* aequari et triangulos *dba* et *bac*. Portio igitur super lineam *bc*, in qua excedit abscisio triangulum, venit ex motu *ac* sagittae in ambobus terminis. Et si ambo termini fuissent aequaliter moti, portio super lineam *bc* esset aequalis toti abscisioni *bac*, sed quia inaequaliter moti sunt termini, ideo est minor. Et ut videas, quomodo inaequaliter moti, signa de *b* versus *a* aequalem *ac*, et sit *be* ut *ac*. Moveatur igitur *b* super arcu *bc*, et dum sic *b* movetur super *bc* arcu, necesse erit *e* moveri versus *a*. Movetur igitur in eodem tempore, quo *b* per arcum, *e* per lineam *ea*. Quae igitur est habitudo potentiae *ea* lineae ad potentiam rectae, quae aequatur *bc* curvae, tanto excedit superficies abscisionis medietatem portionis circuli *dbc*. Deberet enim esse medietas ductio *ac* in arcum *bc* illius, quod fit ex ductu *db* in eundem arcum, cum *ac* sit medietas *db*. Sed quia movetur terminus in *ac*, qui manet fixus in *db*, ideo excedit medietatem. Esto igitur quod *bc* curva sit tripla ad *ea*. Tunc excedit medietatem in una nona medietatis, et erit portio super lineam *bc* duae nonae medietatis. Ita in sectionibus curvis operare.

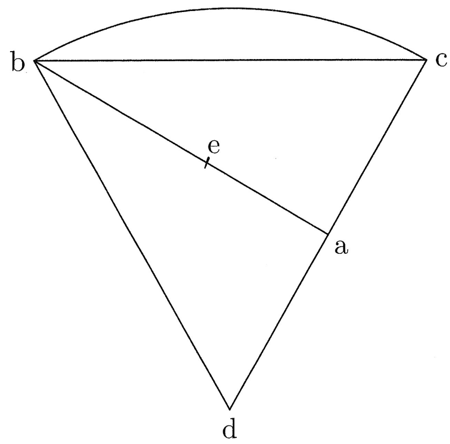


fig. 26

61. Propono nunc modum tradere, quomodo curva linea in rectam vertitur, non ut in primo libello per medium versionis rectae in curvam, sed immediate et hoc per subtilem coincidentiam, cuius haec est propositio.

62. Descripta quarta circuli et linea prima a centro ad principium arcus tracta, et secunda linea de contactu primae cum arcu orthogonaliter eiusdem quantitatis cum prima, et tertia a centro per finem, quae sit ut latus trigoni inscripti circulo, et quarta de fine secundae ad finem tertiae. Si tunc de principio quadrantis lineam quintam duxeris ad quartam taliter, quod chorda, quae a contactu illius quintae, ubi curvam secaverit, ad finem totius quadrantis ducta, quae sit sexta linea, quintae fuerit aequalis, erit quinta minor quadrante quanta est medietas portionis eius cadentis inter curvam et quartam (cfr. figura 27). Sit super *a* centro quadrans *be* descriptus et linea prima *ab*, et secunda *bc* angulum rectum cum *ab* faciens aequalis eidem, et tertia linea *aed* ut latus trianguli inscripti, et quarta linea *cd*. Trahe deinde de *b* lineam ad *cd*, quae sit *bg*, et ubi secaverit quadrantem *be*, pone *f*, et sit quinta linea. De *f* trahe sextam, quae sit chorda *fe*. Dico si *fe* est ut *bg*, tunc *bg* est minor quadrante *be* medietate *fg*. Adde igitur medietatem *fg* super *bg*, et sit *gh* medietas *fg*. Dico *bh* aequari curvae *be*.

63. Ostensio. Praesuppono primo quod quinta et sexta cum portione, quae cadit inter curvam et quartam, quam semper portionem voco, non differant nisi ut pars quintae, quae est chorda, et sexta, quae est chorda residui arcus quadrantis, differunt; et quod illa differentia, qua quinta minor quadrante et sexta cum portione maior differunt, est duplex quantitas, scilicet quantum quinta est minor curva, quae est quadrans, et sexta cum portione maior quadrante; et quod ideo quanto plus differunt, tanto linea maior, quae mediat inter quintam et sextam cum portione, quam lineam voco medium, et quanto minus differunt, tanto medium minus. Secundo praesuppono quod sexta cum portione potest excedere quadrantem in medietate portionis. Nam in minore parte et in maiori potest excedere; ideo etiam in nec minori nec maiori quam medietate.

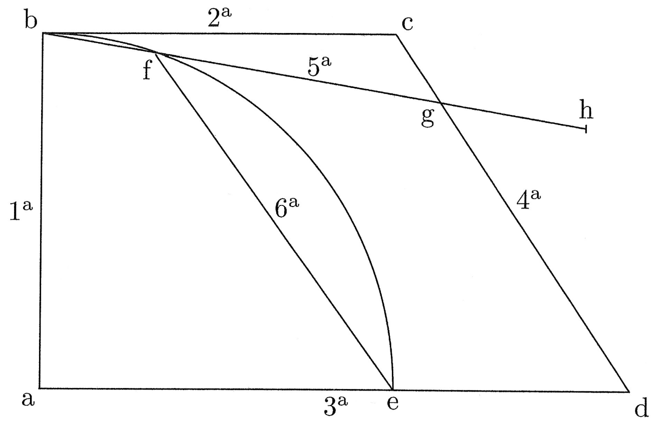


fig. 27

64. Ex his infero talem sextam cum portione ita excedere quadrantem, sicut quadrans quintam, et quod portio est ut differentia chordarum, et sexta est ut quinta. Illa enim se habent consequenter. Si negas, quia dicis differentiam chordarum minorem portione, tunc medium etiam minus, et quia minus subtrahitur a sexta cum portione quam prius, cum portio per se sit maior et medietas portionis maior medietate differentiae chordarum, hinc hoc est impossibile, scilicet quod linea fiat minor, si ab ea minus subtrahitur, quam si ab ea plus subtraheretur. Sic, si dixeris differentiam chordarum maiorem portione, tunc medium erit maius et tamen plus subtrahitur quam prius, quando medietas portionis, quam minorem dicis, subtrahebatur, quod iterum est impossibile. Quare patet, si sexta cum portione excedit quadrantem in medietate portionis, necesse erit portionem aequari differentiae chordarum et per consequens sextam aequari quintae, quod fuit intentum.

65. Ex his sequitur circuli facilis quadratura. Nam medium proportionale inter *bh* et diametrum circuli est latus tetragoni cum circulum quadrantis (cfr. figura 28). Sequitur etiam quod si *bx* aequatur *bh*, quod in circumvolutione describit portionem conicam, cuius superficies aequatur medietati sphaerae, et longitudo quartae circumferentiae maioris circuli eiusdem sphaerae, quod singulariter fuit quaesitum.

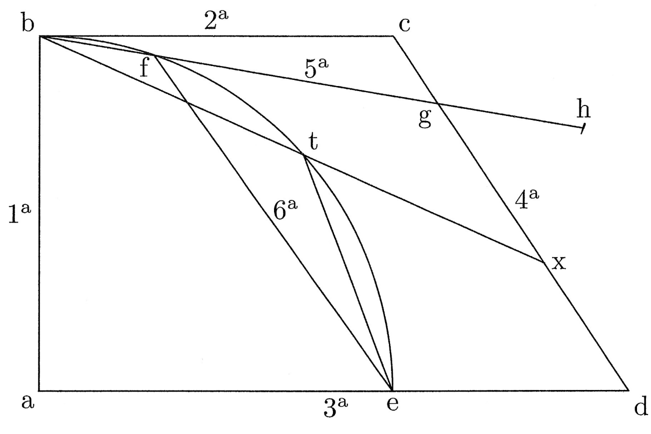


fig. 28

66. Adhuc aliter recta quadranti aequalis hoc modo reperitur. Si linea sexta cum portione quintae lineae aequantur quadranti, eas inter se aequari necesse est. Ut si servata figura praemissa quinta fuerit *bpq* et sexta *ep*, dico si *ep* et *pq* aequantur quadranti *be*, tunc *ep* erit aequalis *pq* (cfr. figura 29).

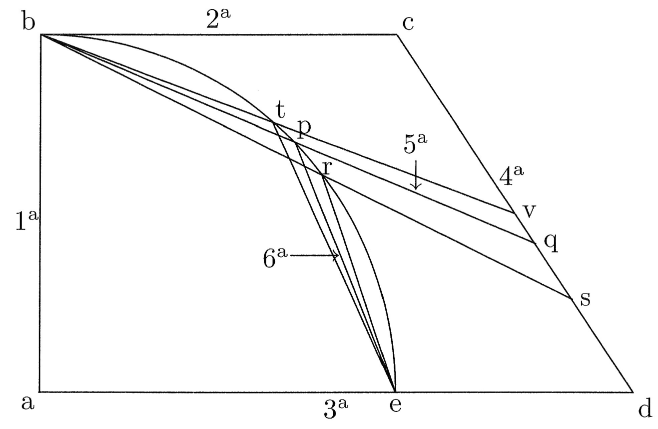


fig. 29

Pro cuius ostensione primo suppono quod si de *b* quintam duxeris ad medium *cd* quartae, ut est *v*, portio illius ut *tv* erit inter portiones brevissima et continue supra et infra augetur. Secundo suppono quod sexta cum portione illa minima est maior quadrante, et ita oportet sextam cum portione, quae debent aequari quadranti, esse minores. Tertio suppono quod possit sexta dari cum portione aequalis quadranti. Quarto suppono quod de *e* versus *b* sextae cum portionibus simul continue augentur, licet portiones etiam minuantur. Istae suppositiones cuilibet de facili patere possunt, ex quibus ostenditur propositio.

67. Nam si dixeris sextam *ep* maiorem portione *pq*, erit igitur maior medietate quadrantis. Esto igitur quod *er* sexta aequetur medietati quadrantis, et sit portio *rs*, quae erit maior *pq* per primam suppositionem. Erit igitur *er* et *rs* maior quadrante et tamen simul sunt minores *ep* et *pq* per quartam suppositionem, quae ponuntur aequari quadranti. Et ita minor erit maior maiore, quod est impossibile. Sic si dixeris *ep* minorem *pq*, sequitur idem; nam tunc erit minor medietate quadrantis. Esto igitur quod *et* aequetur medietati quadrantis, cuius portio *tv* erit minor quam portio *pq*, quare *et* et *tv* erunt minores *ep* et *pq*. Sic maior erit minor minore, quod similiter est impossibile, et quia sextam cum portione posse quadranti aequari est manifestum. Patet hoc esse, quando sexta aequatur portioni quintae, quod est intentum.

68. Ex hac iam dicta inventione, si vis, elicias, quomodo omnem portionem superficiei sphaerae poteris reducere in superficiem conicam aut cylindricam, etiam si tibi proportio ipsius superficiei sphaerae ad totius sphaerae superficiem ignota foret, hoc modo. Et sit exempli gratia quadrans ut prius *abc*, et huius arcum notum signa, qui sit *hc*, et sit *hc* duae tertiae quadrantis (cfr. figura 30).

Trahe lineam rectam de *h* super *ac* orthogonaliter, quae sit *ho*. Erit igitur *ho* semichorda duplicis arcus. Accipe rectam aequalem curvae *hc* et sit *tv*, huius medietas sit chorda *ck*. Duc de *h* per *k* aequalem *tv* et sit *hkr*. Fac igitur de puncto aliquo lineae *hp*, qui sit *s*, lineam transire per *r* ad *aq*, quae sit *sq*, ita quod linea de *h* ad punctum, ubi *aq* lineam tangit, scilicet *q*, perducta sit dupla ad *hs*. Et erit superficies cylindrica ex *hs* aequalis superficiei sphaerali ex arcu *hc* et superficies conica ex *hq* et mediae, quae de *h* ad *sq* ducentur, uti

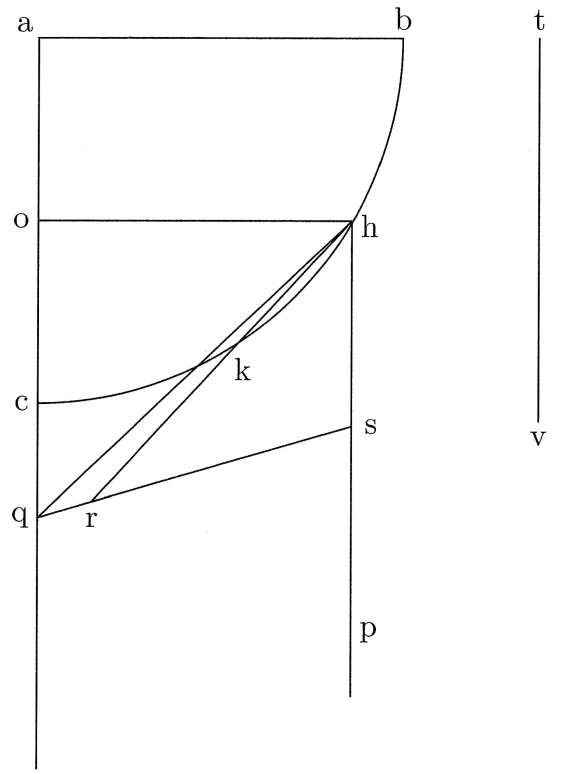


fig. 30

in praemissa, et hoc patet totum ex praemissis. Et ita habes artem, quomodo, si sciveris cylindricam superficiem aequalem sphaerali, poteris ex hoc reperire conicam aequalem, cuius longitudo sit ut longitudo lineae curvae circuli maioris.

69. Et quoniam ex Archimede artem habes omnem portionem superficiei sphaerae in circularem planam reducendi et ex praemissis patet, quomodo illa in cylindricam reducitur et consequenter in conicam, ex quibus et isto nunc praemisso patet, quomodo omnem curvam, etiam si ignoras eius habitudinem ad totum maiorem circulum, poteris in rectam reducere, et haec ars subtilis est excedens circuli quadraturam. Et e converso, si habueris lineam rectam aequalem curvae, poteris superficiem cylindricam et alias conicas consequenter reperire illi sphaerali aequales.

70. Ex quo iam patefecit Archimedes in quadratura parabolae, quomodo superficies illa potest in quadratam reduci ostendens superficiem illam ex recta et sectione coni rectanguli esse sesquitertiam ad triangulum habentem basim ipsam rectam parabolae et altitudinem ipsius parabolae. Et nunc constat, quomodo quadratum potest in circularem duci superficiem ac quod illi possit cylindrica et conica aequalis assignari. Ideo ex praemissis habes modum lineam curvam sectionis illius parabolae in rectam reducendi, et si ingenium applicaveris, omnem curvitatem regularem etiam sectionis transversalis cylindri poteris sic rectificare.

71. Volo nunc investigare, quomodo per lunulas quadratura circuli investigetur, quam viam veteres frustra attemptarunt. Et est intentio inter latus polygoniae circumscriptum circulo et latus polygoniae inscriptum reperire lineam, quae secet lunulam ita, quod triangulus rectilinealis aequetur portioni circuli, cuius ille fuerit arcus (cfr. figura 31).

Puta esto quod super *a* centro circuli *bc* arcus sit tertia circumferentiae, cui *ef* latus

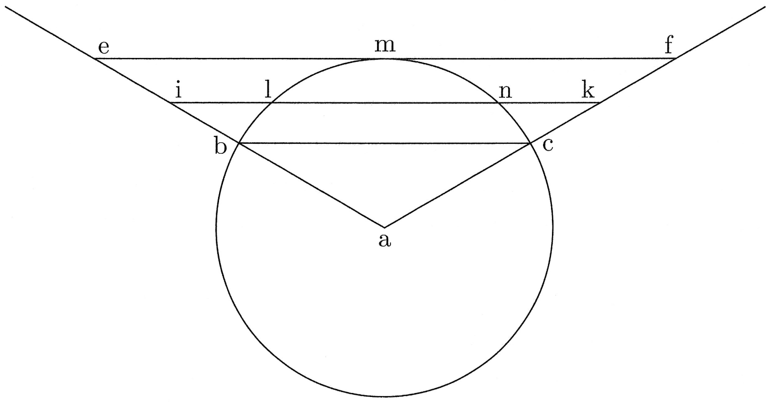


fig. 31

trigoni circumscribatur lineis *af* et *ae* tractis, et *cb* linea sit chorda sive latus trigoni inscripti. Volo signare lineam inter *ef* et *bc*, quae sit *ik*, quae secet lunulam *lmn* ita, quod sit aequalis portionibus *bil* et *ckn*, ut *aik* triangulus aequetur *abmc* portioni circuli.

72. Pro cuius investigatione suppono latus inscripti esse minus arcu et circumscripti maius et plus maius quam inscripti minus. Secundo, quod duae lineae cadere possunt inter latus inscriptum et circumscriptum, quarum una aequetur arcui et alia aequet triangulum rectangulum portioni circuli; et vocetur prima, quae est latus inscriptum; secunda, quae aequatur arcui; tertia, quae aequat triangulum rectangulum portioni circulari; et quarta, quae est latus polygoniae circumscriptae. Tertio suppono quod illae quattuor lineae sic se habent, quod quando una crescit, omnes crescunt et quando una decrescit, omnes decrescunt; nam ad augmentum unius sequitur quod et alia augeatur. Quarto, quod quanto magis crescunt, tanto magis differunt et quanto magis decrescunt, tanto minus differunt. Quinto, quod quanto magis differunt lineae, tanto plus differunt potentiae earum.

73. Ex his sic arguo: Quanto quarta maior, tanto tertia maior et differentia linearum et potentiarum earum maior. Sic quanto secunda maior, tanto prima maior et differentia linearum et potentiarum earum maior. Sic quanto differentia potentiarum quartae et tertiae maior, tanto secundae et primae maior et differentia illarum differentiarum maior. Quare quanto quarta maior, tanto prima maior et differentiae potentiarum ipsarum maiores et differentia differentiarum quartae et tertiae ex una et secundae et primae ex alia maiores. Secundum igitur habitudinem differentiae potentiarum quartae et primae se habebunt differentiae quartae et tertiae ex una et secundae et primae ex alia, ita scilicet, quod si potentia secundae est maior potentia primae in aliqua quantitate et potentia quartae est dupla ad potentiam primae, erit potentia quartae maior potentia tertiae in dupla quantitate, et si est alia habitudo potentiarum quartae et primae, alia est habitudo quantitatum talium differentiarum.

74. Si negaveris et dixeris habitudinem potentiae quartae ad potentiam primae esse duplam et non excessum potentiae quartae super tertiam ad excessum potentiae secundae super primam, sed quod excessus potentiae quartae super potentiam tertiae sit ut tria et excessus potentiae secundae super potentiam primae sit ut unum: hoc dico implicare contradictionem. Nam sequitur quod prima et secunda lineae sunt minores et aequaliores quam prima et secunda, quae sic se habent, quod differentia est medietas. Quanto enim differentia excessuum minor, tanto lineae similiores et minores, et cum hoc sequitur, quod prima et secunda sint maiores quam prima et secunda, quae differunt in medietate differentiae quartae et tertiae. Nam quanto differentia quartae et tertiae magis excedit differentiam secundae et primae, tanto secunda et prima sunt maiores et inaequaliores. Erunt igitur maiores primis et secundis, ubi differentia est medietas, cum differentia ponatur una tertia differentiae quartae et tertiae. Sic erunt maiores et minores, similiores et dissimiliores, quod implicat. Simile inconveniens sequitur, si poneretur, quod differentia secundae et primae foret maior medietate quartae et tertiae. Et hoc inconveniens sequitur in omnibus, si habitudo excessuum potentiae quartae super tertiam et secundae super primam dicitur alia quam potentiae quartae super potentiam primae.

75. Si igitur hoc medio volueris lunulam abscindere seu circulum quadrare, sic facito, et sit in tetragono (cfr. figura 32).

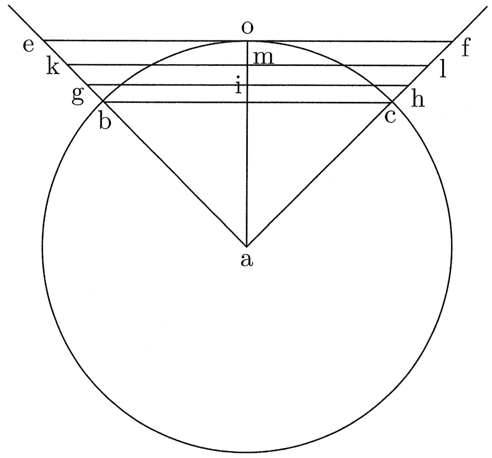


fig. 32

Esto igitur quod super *a* centro *bc* quadrans sit descriptus. Trahe lineas sectores de *a* per *b* et *c* in infinitum, trahe chordam *bc* et latus circumscriptum *eof* et in *o* tangat arcum; trahe semidiametrum *ao*, signa deinde secundam lineam aequalem arcui, quae ponatur esse *gh*, et ubi secat *ao*, ponatur *i*. Deinde signetur tertia linea, quae sit *kl*, et ubi secat *ao*, ponatur *m*. Si igitur tertia, scilicet *kl*, talis est, quod eius potentia est in dupla quantitate minor potentia *ef* quam potentia *bc* potentiae *gh*, et cum hoc id, quod fit ex ductu *ao* in *ih*, est aequale ei, quod fit ex ductu *am* in *ml*, habes intentum; si non, varia, quousque eveniet.

76. Exemplum in numeris. Esto quod *ao* semidiameter sit 7, cuius quadratum 49; erit *bc* radix de 98 et *ef* radix de 196. Esto igitur quod *gh* ponatur 11, erit eius quadratum 121, a quo subtrahe 98, manent 23. Duplum huius, scilicet 46, subtrahe de 196, manent 150. Si ductio 7 in 5 cum dimidio aequaretur ductioni medietatis radicis de 150 in se sive *am* in *ml*, quod idem est, cum *am* sit ut *ml*, tunc haberes intentum, et *lm* esset costa quadrati aequalis circulo, et quarta circumferentiae esset 11. Sed si bene calculas, reperies 11 parum excedere.

77. Est aliquantulum difficile in praxi reperire has lineas medias secundam et tertiam. Unde pro alleviatione laboris sic facito (cfr. figura 33): Fac lineam *ac*, quae aequetur 7 semidiametris, cuius medium sit *b*. Trahe orthogonales ad *c* et *b*, et sit *dc* ut *ac* et *eb* ut *ab*, et trahe lineam *aed*. Signa in *cd* semidiametrum et sit *f* ut semidiameter, et medietatem chordae quadrantis, scilicet *bc* in praemissa figura, signa in *be* et sit *bg* ut medietas chordae arcus quadrantis. Trahe lineam *fg*, et quia *cd* est potentia *f* radicis eius et *bg* radix *be*, tunc inter *be* et *cd* quaere potentias medietatum mediarum linearum, secundae scilicet et tertiae. Puta sit potentia medietatis secundae ut *ik*, et ubi secat *fg*, signa *l* et vide quantum *ik* excedit *be*, et fac *cd* in duplo excedere tertiam, quae sit *mn*, ita quod *be* excedat *mn* in dupla quantitate, qua *ik* excedit *be*, et ubi *mn* secat *fg*, pone *o*. Si tunc ex ductu *mo* in se idem eveniet, quod ex ductu semidiametri in *li*, habes intentum et *mo* duplicata erit costa quadrati circuli; si non, varia, quousque eveniet.

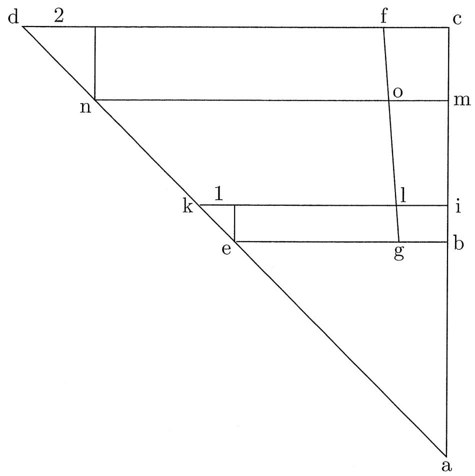


fig. 33

Et sicut in quadrante operatus es, proportionabiliter poteris in aliis arcubus prioribus attentis operari et lunulas abscindere et circulum rectilineare.

78. Volo autem adhuc alios quosdam possibiles modos tangere, quomodo scilicet omnis circulus immediate in quam volueris resolvitur polygoniam absque eo, quod peripheriam circuli curvam prius in rectam lineam resolvi oporteat, quos pro exercitio ad magis otiosos remitto.

79. Si quadranti circuli latera circumscriptae et inscriptae tetragonorum descripseris atque a centro circuli ad punctum, ubi circumscriptae latus circumferentiam contigerit, lineam duxeris et aliam a centro ad finem lateris triangulum claudendo traxerisque deinde a centro per aliquem punctum arcus ad latus circumscriptae lineam tali modo, quod alia linea aequedistans lateribus polygoniarum transiens de latere ad latus trianguli per eundem punctum arcus fuerit aequalis duabus portionibus, quas prior linea a centro ducta per eundem punctum de lateribus polygoniarum dictarum secaverit inter ipsam lineam et aliam, quae est latus trianguli, ad punctum contingentiae ductam: erit linea illa aequedistans medietas lateris polygoniae arcui correspondentis circulo aequalis.

80. Ut si super *a* centro describatur circulus, cui volo tetragonorum aequalem invenire (cfr. figura 34).

Quadrantem signo, qui sit *bc*, et traho latera tetragonorum, et sit latus tetragoni circumscripti *de*, et tangat circulum in *f* puncto. Traho *af* et *ad* et *bc* latus tetragoni inscripti, et ubi *bc* secat *af*, pono *k*. Traho deinde de *a* per aliquem punctum arcus *bf* lineam ad *df* et sit punctus in arcu *g*, et ubi secat latus *bk*, ponatur *l*, et ubi latus *df*, ponatur *m*; et per *g* traho aequedistantem ad *df* de *af* ad *ad*, et sit *hgi*. Dico si *hi* est aequalis *lk* et *mf* simul, *hi* est medietas lateris tetragoni circulo aequalis.

81. Pro intellectu huius primo considerandum quod si super *a* centro circulum descripseris et contingentem indefinitae quantitatis eidem in puncto *f* adiunxeris tracta linea

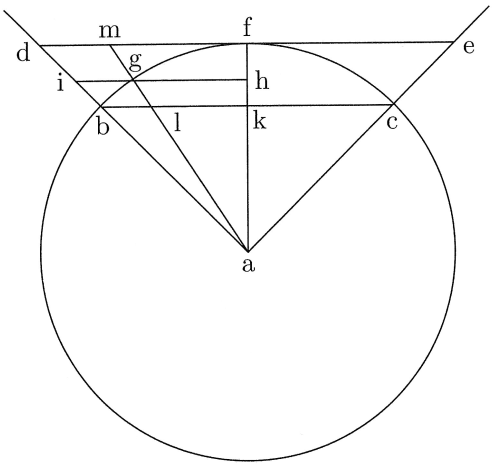


fig. 34

af et deinde de *a* ad contingentem lineam *ac* duxeris, quae secet circulum in *g* puncto, duxerisque aequedistantem ad contingentem de puncto lineae *af*, qui sit *o*, per *g* in infinitum, illa erit, de qua per aliam lineam de *a* ad contingentem aequatrix abscinditur, et sit *hrd* ita quod *or* sit aequatrix. Quam sic voco, quia lunulae *ogf*, quam de area circuli abscindit, substituit *hrg* aequalem quantitate claudendo triangulum rectilineum *aro* aequalem portioni circuli *ahf* (cfr. figura 35).

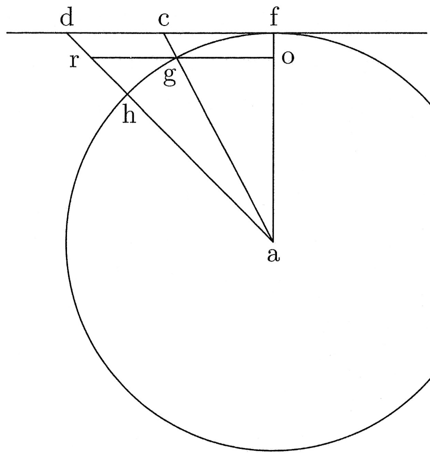


fig. 35

82. Secundo considerandum figura cum contingente et linea, de qua aequatrix abscinditur, servatis, quod de aliquo puncto circuli potest chorda sic trahi, quod portio eiusdem inter *af* et *ac* addita ad *cf* aequetur illi dictae aequatrici, et sit punctus in circulo *h* et portio inter *ac* et *af ik* (cfr. figura 36).

83. Tertio considerandum, quod figura priori cum contingente et linea de qua aequatrix abscinditur servatis, si alia mobilis linea iaceat super *ac*, quae sit *al* et illa versus sinistrum *a* fixo manente revolvatur, perveniet usque ad aliquem punctum circuli, a quo

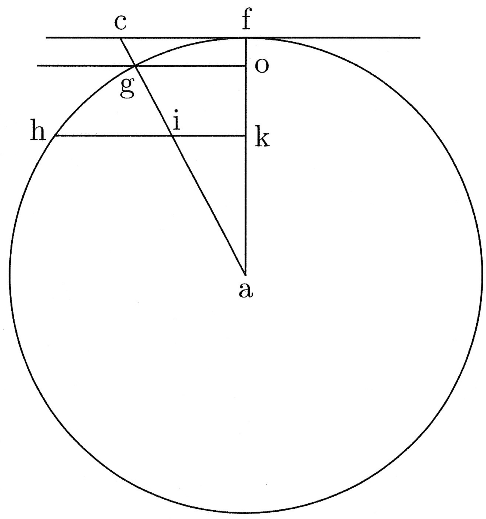


fig. 36

si ducitur chorda aequedistans contingenti usque ad lineam *af* portio illius inter *ac* et *af* addita ad *cf* aequabitur aequatrici, quae per *al* abscinditur. Et sit punctus ille in circulo *h* et semichorda *hk* et portio *ik* et abscisio aequatricis *or*. Nec potest esse alius punctus quam unus ille *h*, in quo sic eveniet; nam ante illum portiones excedunt aequatricem et post illum aequatrix vincit portiones. Hoc verum, si *hf* fuerit semiquadrans, et si non, varia *g* punctum, quousque eveniet (cfr. figura 37).

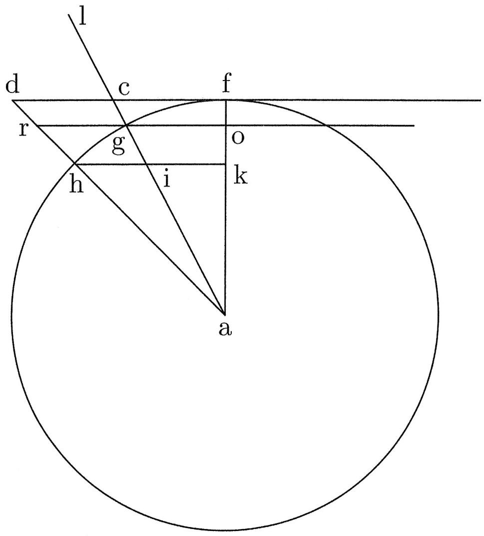


fig. 37

84. Dico igitur hoc casu aequalitatis portiones esse aequales verae aequatrici et illam esse *or*. Si negaveris et dixeris portiones fore minores verae aequatrici et similiter *or*, tunc, si portiones deberent esse aequales, oporteret lineam de *a*, quae illas abscindere deberet, cadere inter *c* et *d*, et ita arcus *gf* foret minor quam esse deberet et lunula *gof* minor quam *hrg*. Sed quia dicis *or* minorem aequatrice, igitur aequatrix cadit supra *or* versus contingentem et *or* infra eam versus *hk*; quare ipsa *or* abscindit maiorem arcum quam aequatrix, et lunula *gof* erit maior quam *hrg*, et ita erit minor et maior. Sic si dixeris portiones maiores et *or* maiorem aequatrice, idem sequitur inconveniens. Patet igitur propositum.

85. Pandam nunc ultimo, quomodo simul reperiuntur quae volueris latera polygoniarum aequalium circulo, cuius haec est propositio.

Si semidiametro circuli et semilateribus polygoniarum circumscriptarum et lineis complementi inscriptis linea de centro ad semilatus circumscriptae ducta abscindit minorem portionem de linea complementi unius inscriptae et maiorem de semilatere eiusdem circumscriptae, quae simul aequantur semilateri polygoniae aequalis circulo: tunc, si aliae lineae sic ductae fuerint per portiones talium linearum, quod ipsae portiones se habeant ad priores portiones semilaterum, sicut semilatera simul iuncta unius polygoniae ad semilatera simul iuncta alterius, tales similiter abscindunt portiones, minorem de linea complementi inscripta et maiorem de semilatere circumscriptae, quae aequantur semilateri talis polygoniae aequalis circulo (cfr. figura 38).

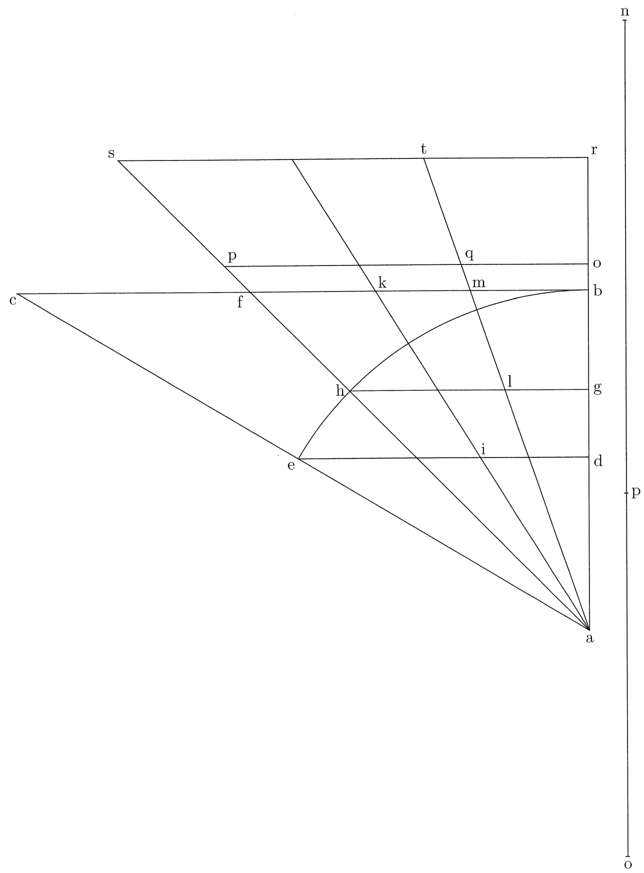


fig. 38

86. Esto quod super *a* centro circulus sit descriptus, cuius semidiameter sit *ab*, tractis semilatere trigoni circumscripti *bc* et linea complementi *de* et tractis etiam semilatere tetragoni circumscripti *bf* et linea complementi *gh*. Et si volueris, poteris plurium polygoniarum trahere similiter semilatera. Trahe deinde lineam de *a* ad *bc*, et ubi abscindit *de*, pone *i*, et ubi *bc*, pone *k*. Deinde trahe aliam de *a* ad *bc*, et ubi abscindit *gh*, pone *l*, et ubi abscindit *bc*, pone *m*. Dico si abscisio minor *gh*, quae est *gl*, una cum maiore *bf*, quae est *fm*, aequantur semilateri quadrati aequalis circulo, tunc si abscisio minor de *de*, quae est *di*, se habet ad *gl* sicut *bc* cum *de* ad *bf* cum *gh*, et sic se similiter habuerit *ck* ad *fm*: erit *di* cum *ck* semilatus trigoni aequalis circulo, et habebit se ad semilatus quadrati, sicut se habent portiones dictae ad invicem. Et uti facis in illis, facito in omnibus polygoniis.

87. Procedit haec propositio ex eo. Nam ex varietate laterum diversarum polygoniarum aequalium uni circulo sequitur varietas laterum polygoniarum circumscriptarum et linearum complementi inscriptarum. Quare sicut se habent illa latera, ita et ista simul sumpta. Hinc et abscisiones, quae fiunt per lineas a centro ex lateribus ad constituendum semilatus polygoniae aequalis circulo, tenere debent eandem habitudinem ad invicem, ut eiusdem habitudinis latera efficiant.

88. Non est autem dubium lineam de centro portiones abscindere posse de semilateribus, quae aequentur quaesitae. Sed posset difficultas esse, quomodo sciri possint lineae complementi, quae additae ad semilatera polygoniarum circumscriptarum efficiunt latera polygoniarum eiusdem areae. Puta si *de* additum ad *bc* ponitur latus trigoni, quod tunc *gh* additum *bf* efficit latus aequalis tetragoni. Sed habitudo laterum de facili scitur ex superioribus. Ponitur autem linea complementi in trigono semilatus polygoniae inscriptae, ut est *de*, et alia complementa secundum hoc adaptantur. Dicuntur complementa, quia additae ad semilatus polygoniarum circumscriptarum constituunt semilatera polygoniarum aequalium arearum.

89. Posset etiam dubium esse, an portiones teneant habitudinem, quam debent. Unde poteris sic facere. Trahe *ab* in longum et similiter lineam de *a* per *f* in longum et lineam unam, quae sit *no*, aequalis *bc* et *de*, divide in duas portiones, quae se habeant ut *gh* ad *bf*, et sint *op* et *pn*. Hanc aequedistanter ad *bc* inter dictas lineas de *a* per *b* et per *f* colloca, et linea, quae de *a* per *gh* ducitur, abscindit portionem de *op*, quae se habet ad portionem abscisam de *gh* sicut est proportio laterum. Sit igitur portio in *op* linea *oq*, quae se habet ad *gl* sicut debet. Si igitur *di* est ut *oq*, tunc habes illam portionem. Sic facito de alia portione lineae *no*, quae sit *rs*, et sit *rs* ut *pn*. Applica inter lineas de *a* per *b* et *f* ut prius cum alia portione, et si portio, quae per lineam *aq* in *rs* abscinditur, quae sit *st*, fuerit ut *ck*, habes intentum; si non, varia, ut fiat. Et haec est via universalis in omnibus polygoniis.

90. Elicias ex hoc te artem habere omnem portionem circuli, quae per sectores a centro abscindi potest, etiam ad totum improportionalem in rectilinealem superficiem reducere posse et omnem portionem circumferentiae etiam improportionalem ad totum medio aequatricis secundum praemissa in lineam rectam convertendi.

91. [Patet nunc circuli quadraturam semper quaesitam hactenus, ut creditur, non inventam sufficienter explicatam. Nam aut ipsa sciri potest per reductionem rectilineae in curvam peripheriam, et eo modo tradita est in primo libello, aut e converso per reductionem curvae peripheriae in rectam lineam, et ita duplici modo eam reperies in hoc secundo libello traditam, aut simul cum reductione curvae in rectam reperiendo costam quadrati aequalis circulo, aut sine omni reductione rectae in curvam vel e converso, sed simpliciter reperiendo costam quadrati, et hi modi similiter reperiuntur supra annotati. Sic constat hanc partem hactenus ignoratam abunde sufficienterque explicatam, ex qua alia sequuntur, quae sine ista sciri non poterant, quae sunt mathematicae complementa. Amen.]

FACILLIMA CIRCULI RECTILINEATIO

92. Descripto super *a* centro circulo et tracta diametro *bac* atque maxima chorda in infinitum extensa, quae orthogonaliter secet *bac*, quae sit *dae*, si tunc super aliquo puncto *ac*, qui de *b* distet secundum longitudinem chordae arcus tertiae partis circuli, qui sit *f* circulum, cuius semidiameter sit *fb*, descripseris, ille de maxima chorda abscindet rectam *gh* medietati circuli aequalem vel propinquam. Quod si de *b* et *c* rectas ad *g h* traxeris, erit superficies *bgch* aequalis vel propinqua superficiei circuli *bcde* (cfr. figura 39).

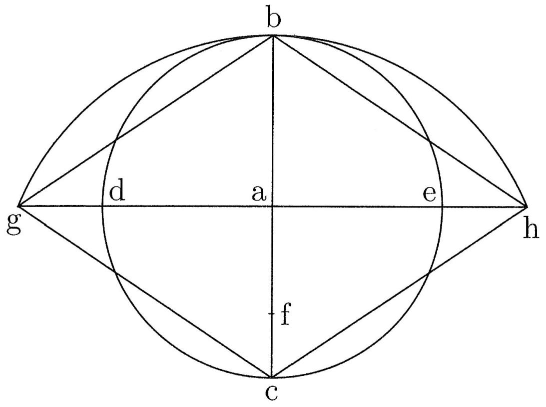


fig. 39

93. Ad cuius intellectum describe circulum super *a*, qui sit *bcde* ut prius, et trahe chordam arcus sextae partis circuli, et sit *lm*, et quartae partis, quae sit *ik*, et tertiae partis, quae sit *no*, et considera, ex quo omnis chorda est minor arcu et plus chorda maioris arcus, quod tunc circulus, qui debet per *b* transire et habere centrum in *bc* diametro et secare de chorda extensa aequale arcui, ille habebit necessario centrum ultra *a* versus *c* tanto distantius quanto arcus maior, cui chorda subtenditur. Et minimus omnium, quo non potest dari minor, habebit centrum in *a*, cuius semidiameter *ab*. Maximus autem circulus habebit centrum ultra *a* versus *c* maxime distans ab *a*, cuius semidiameter maxima. Qui circulus abscindere debet de maxima chorda rectam aequalem semicirculo, et illa maxima semidiameter quaeritur (cfr. figura 40).

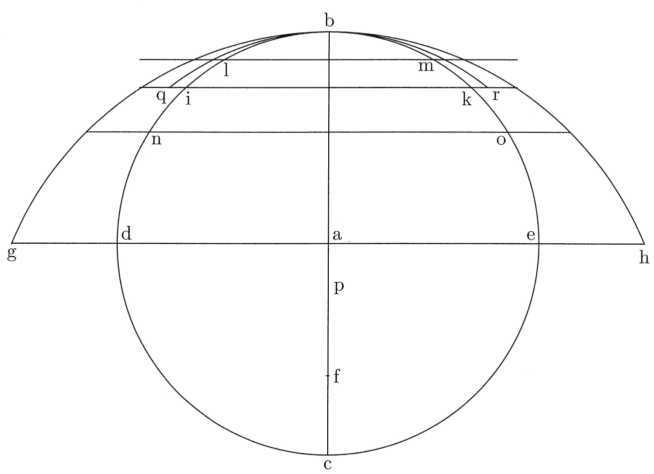


fig. 40

94. Secundo est attendendum quod chorda aliqua potest signari, quae sit media inter chordas ei compares. Et voco compares chordas, quarum una minor signata et alia maior sic, quod per arcum aequalem distent a signata, uti *ik* ab *lm* et *no*. Nam cum *il* arcus sit ut *in*, tunc *lm* et *no* dicuntur compares *ik*. Dico quod potest chorda signari, ubi omnes duae compares habent potentias, quae simul iunctae sunt maiores duabus potentiis chordae mediae, ut si ad *lm* chordam compares aliquae traherentur, earum potentiae semper erunt maiores duabus potentiis *lm*. Potest etiam chorda media signari, ubi potentiae omnium duarum comparium erunt minores duabus potentiis chordae mediae, ut comparium ad *no*. Ita potest signari chorda, ubi omnium duarum comparium potentiae erunt aequales duabus potentiis chordae, quia quanto potentia minoris comparis est minor potentia chordae mediae, tanto maioris comparis est maior, et quia tunc omnium duarum comparium potentiae erunt aequales duabus potentiis chordae mediae, patet illam esse chordam *ik*. Nam potentia *lm* cum potentia *no* aequantur duabus potentiis *ik*. Sic et potentia maximae chordae, scilicet *de*, cum compari, scilicet cum potentia minimae chordae, aequabitur duabus potentiis *ik*. Et quia potentia minimae chordae non est aliqua, patet potentiam diametri aequari duabus potentiis *ik* sive lateris tetragoni inscripti. Ita de omnibus duabus comparibus *ik*. Hoc verum.

95. Tertio suppono quod *ik* bis excedit duas semidiametros, scilicet maximi circuli, qui quaeritur, et minimi, cuius semidiameter est *ab* , et hoc notum relinquo. Ex quo elicio duas compares chordas ad *ik* dabiles, quae simul iunctae aequabuntur illis duabus semidiametris. Nam dabiles sunt compares maiores, scilicet prope *ik*, et dabiles sunt minores distantissime ab *ik*, igitur et aequales.

96. Quarto elicio ex his *no* esse semidiametrum vel prope quaesiti circuli. Nam cum potentiae comparium aequivalentium duas semidiametros aequentur duabus potentiis *ik*, et *lm* sit semidiametro minimi circuli, cuius potentia si de duabus potentiis *ik* subtrahitur, remanet potentia *no*. Quare *no* erit semidiameter maximi circuli quaesiti.

97. Quinto elicio, quod si *no* est semidiameter, tunc si in *af* reperitur punctus, qui sit *p* ita, quod *ap* se habeat ad *af* sicut sagitta arcus *ibk* ad sagittam *dbe* semicirculi, erit *p* centrum circuli et *pb* eius semidiameter, qui de *ik* chorda extensa abscindit *qr*, quae duplicata aequabitur *gh*. Et si de omnibus duabus comparibus sic feceris ex proportione sagittarum centro inveniendo, abscisiones, quae de extensis comparibus fient, simul iunctae semper aequabuntur *gh*, licet non omnis abscisio unius comparis aequetur suo arcui, et ita de infinitis comparibus. Per eandem regulam abscindere poteris rectas aequales semicirculo. Si vero *no* est semidiameter circuli, non concordabunt istae abscisiones. Ideo varietur, quousque concordabunt. Quod autem superficies *bgch* aequetur superficiei circuli, satis patet ex praemissis.

98. Sexto elicias, quomodo portiones circuli inter compares cadentes se habent ad circulum, sicut se habet arcus inter compares ad circumferentiam circuli. Puta inter *lm* et *no* portio circuli est sexta circuli, quia arcus *ln* et arcus *mo* sunt sexta circumferentiae. Quanto enim portio inter *ik* et *lm* est minor duodecima, tanto portio inter *ik* et *no* est maior duodecima parte circuli. Et per hanc considerationem poteris varias abscisiones portionum circuli facere et varios triangulos aequare. Et haec sufficiant.

Declaratio rectilineationis curvae, quae ponitur in primo modo secundi libelli *De mathematicis complementis*

Traduzione italiana a p. 265.

Prima suppositio

1. Sexta cum medietate portionis quintae, quae cadit inter curvam et quartam, potest aequari *be* curvae. Haec suppositio certa est, ut in littera (cfr. figura 1).

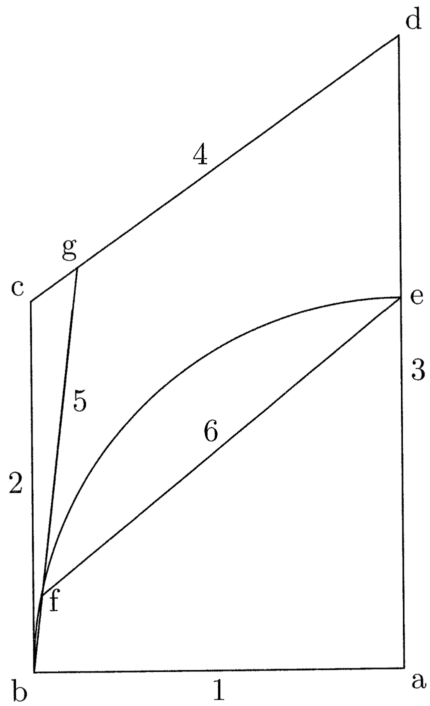


fig. 1

Secunda suppositio

2. Sexta cum medietate portionis et quinta cum medietate differentiae chordae, quae est sexta, et partis quintae, quae etiam est chorda, possunt aequari *be* curvae bis. Illa suppositio probatur, uti praemissa in textu probatur. Nam dabilis est locus, ubi sunt maiores *be* curva bis, et ubi minores, et ideo et, ubi aequales.

3. Dico hanc secundam suppositionem non habere locum nisi ubi differentia est ut portio, et hoc probat prima suppositio. Nam si dixeris in secunda suppositione differentiam maiorem portione, erit igitur quinta minor sexta. Quae est sextae aequalis, quando differentia chordarum sicut portio quintae, et minor, si differentia maior, et maior, si differentia minor, ut de se patet.

4. Esto igitur, quod ad sextam addatur tota portio et ad quintam tota differentia. Tunc erunt aequales, et quaelibet maior *be* curva. Si igitur subtrahitur aequale, ut quaelibet sit sicut *be* curva, tunc necesse est, quod de sexta cum portione subtrahatur plusquam medietas portionis, cum portio ponatur minor differentia, et oportet quod de differentia subtrahatur minus quam medietas, et tantum minus eius medietate, quantum prius plus medietate portionis, ut simul maneat medietas portionis et medietas differentiae, quae additae sextae et quintae efficiant *be* curvam bis , ut de se patet. Sext a igitur cum medietate portionis erit tunc maior *be* curva; non erit igitur sexta cum medietate portionis aequalis *be* curvae differentia portionem excedente.

5. Puta tu dicis, quod *bg* quinta cum medietate differentiae *fe* sextae et *bg* chordae quintae,et *ef* sexta cum medietate *fg* portionis simul aequentur *be* curvae bis, et dicis differentiam *fe* et *fb* maiorem *fg* portione. Sit igitur linea *hi* ut quinta *bg*, cui addatur differentia quae sit ut *ik*. Sit alia linea sub dicta descripta *lm* ut sexta *fe*, cui addatur portio *fg*, et sit *mn* ut *fg*; linea *hk* est ut linea *ln*. Signetur medietas differentiae, quae sit *io*, et medietas portionis, quae sit *mp*. Cadat orthogonaliter inter *p* et *o*, quae sit *rs*. Quanto igitur *ms* est minus medietate portionis, quae est *mp*, tanto *ir* maior medietate differentiae, quae est *io*. Erit igitur *ls* aequalis *be* curvae. Sic sexta *lm* cum medietate portionis est maior *be* curva. Ubi ergo sexta cum medietate portionis debet esse aequalis *be* curvae, medietas differentiae non erit maior medietate portionis (cfr. figura 2).

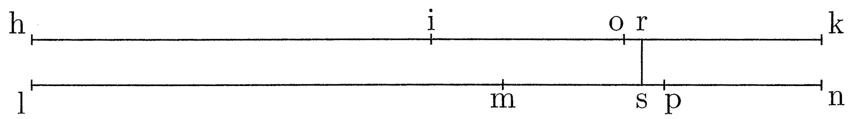


fig. 2

6. Sic si dixeris differentiam minorem portione, sequitur sextam cum medietate portionis minorem *be* curva. Oportet igitur, si sexta cum medietate portionis debet esse aequalis *be* curvae, quod differentia sextae et chordae quintae non sit maior aut minor portione. Quo casu probat primum praesuppositum secundum, scilicet quintam cum medietate differentiae et sextam cum medietate portionis tunc aequari *be* curvae bis, quando differentia fuerit ut portio, et hoc est, quando quinta est ut sexta, et hoc est intentum.

7. Ecce mirabilem modum ostensionis, quoniam sive dixeris differentiam aequari portioni in secunda suppositione sive non aequari, sequitur in prima suppositione differentiam aequari portioni, et per consequens et in secunda suppositione. Et est quaedam coincidentia oppositorum, quoniam per hoc, quod dicis differentiam non aequari portioni, sequitur, quod aequetur, et falsum interimit seipsum.

De una recti curvique mensura

Traduzione italiana a p. 269.

1. Quia vidi practicum magisterium commensurationis curvi et recti deesse geometricis, ideo ipsos imperfectos et plura, quae possibilia fieri vident, ad actum deducere non posse, conatum igitur non parvum adhibui, ut ipsam artem assequerer. Quam si repperi, tu qui haec leges, iudicabis.

2. Commensurari autem curvum et rectum dico, quando una mensura mensurantur, puta quando recta linea tot pedes habet rectos quot arcus curvos.

Propositio prima

3. Dato area rectam ei commensurabilem assignare (cfr. figura 1).

Sit *bc* datus arcus, cuius *a* medium, et trahatur chorda *bc* et in illa punctus aequedistans de *a* et *b*, qui sit *d*, et hic est punctus huius magisterii. De illo igitur per *b* continua rectam, quae sit *de*, taliter, quod si de *a* chordam *ag*, quae sit ut medietas *de*, per *de* traxeris, illa chorda vadat per *f* punctum lineae *de*. Sit autem *df* quarta pars *de*. Tunc *de* linea recta est commensurabilis *bc* arcui.

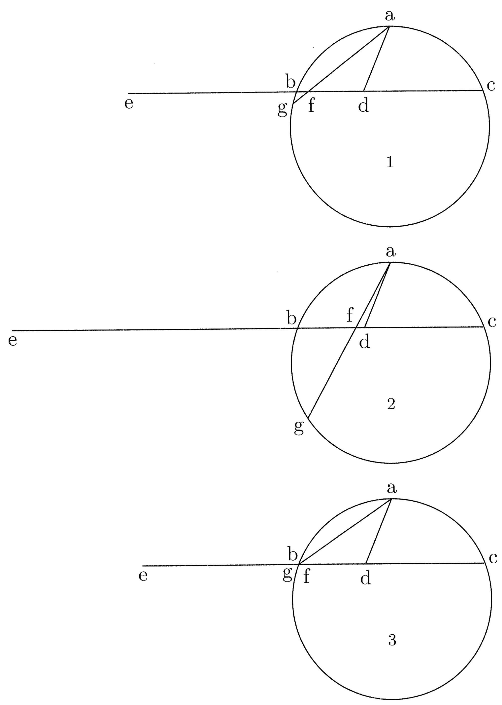


fig. 1

4. Ad hoc probandum praesuppono duo. Primo, quod *de* sic signari potest, quod inter *f* punctum, per quam vadit chorda, ut praefertur, et *e*, finem lineae *de*, portio aequetur tribus quartis commensurabilis rectae. Patet de se. Nam certum est, quod taliter signari potest, quod *fe* est plus, ut in secunda figura, et taliter etiam, quod est minus, ut in tertia figura; igitur et taliter, quod nec plus nec minus. Secundo praesuppono, quod quanto *de* est minor, tanto *fe* in habitudine ad *de* est minor et *df* maior, et quanto maior, huius contrarium. Hoc etiam per se patet ad oculum in secunda et tertia figuris.

5. Dico igitur primum praesuppositum verificari, aut quando *de* est quaesita, scilicet commensurabilis arcui, aut quando minor aut quando maior. Si primum, habeo intentum; nam oportebit tunc *df* esse necessario quartam partem *de*. Si dicis verificari, quando *de* est minor commensurabili, hoc est impossibile. Nam cum tunc ex secunda suppositione *fe* sit minor in habitudine ad *de* et *df* maior quarta in commensurabili, et secundum te aequabitur tribus quartis commensurabilis; non erit *de* minor commensurabili, sed maior. Sic si dicis verificari, quando *de* est maior commensurabili, similiter implicat contradictionem.

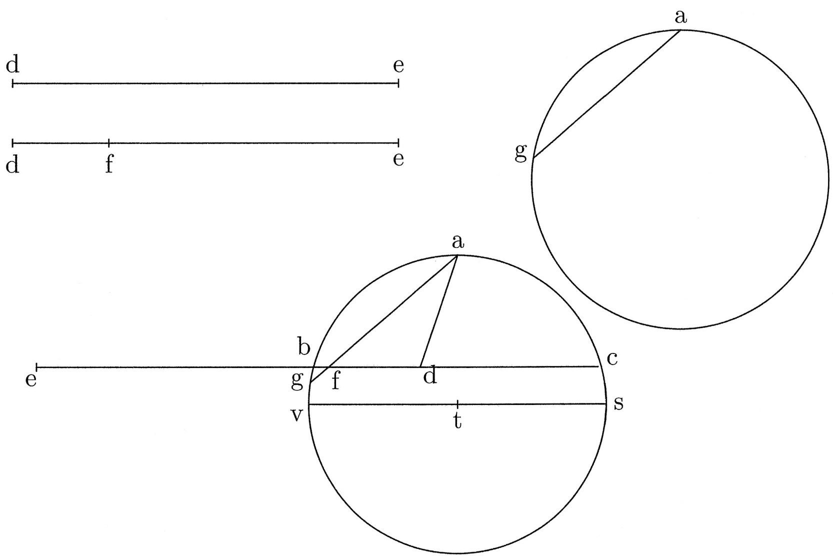


fig. 2

Propositio secunda

6. Datae rectae arcum dati circuli commensurabilem assignare (cfr. figura 2).

Sit data recta *de* et datus circulus, cuius centrum *t* et diameter *stv* et *a* medium omnium arcuum. De *a* trahe chordam *ag*, quae sit ut medietas *de*, et in *de* signa eius quartam, quae sit *df*, et applica *de* aequedistanter ad *tv*, taliter quod *f* cadat super *ag* chordam, et ubi secat circumferentiam circuli, pone *b*. Si tunc *d* aequedistat de *b* et *a*, erit *ba* medietas arcus quaesiti. Continua igitur *bd*, quousque compleatur chorda in *c*, et habes *bc* arcum commensurabilem *de* rectae. Totum patet ex praemissa.

7. Ut autem videas *d* esse punctum huius magisterii, qui si *ag* chorda est *ba* arcui commensurabilis, ab *f* sectione ubi *ag* secat *bcd*, ipse punctus per medietatem *ag* distat, considera, quod quanto *bc* chorda est maior, tanto *d* de *b* et *a* plus et de centro circuli minus distat, et quanto minor, huius contrarium; et hoc de se patet (cfr. figura 3).

In maxima igitur chorda *d* minime distat a centro circuli et maxime de *b* et *a*; in minima chorda maxime distat de centro et minime de *b* et *a*. Unde *d* in maxima chorda est in centro circuli, et in minima in circumferentia eius. Sed certum est, quod *d* sive in maxima chorda sive in minima aequedistat de *b* et *a*; igitur sic in omnibus intermediis.

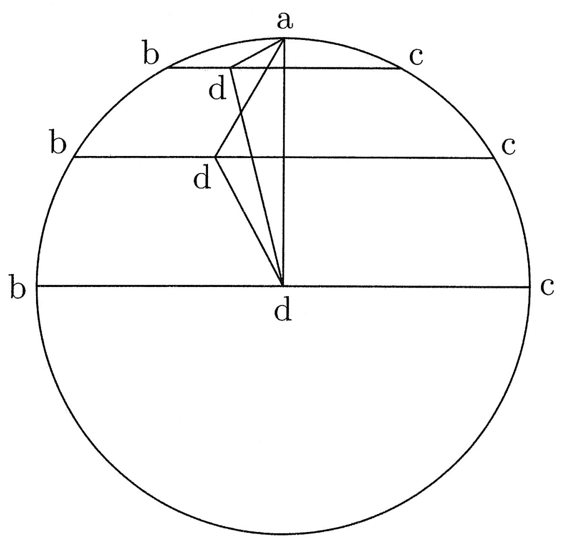


fig. 3

Unde sequitur, quod si *bc* est chorda arcus tertiae partis circumferentiae circuli, *d* punctus a centro et de *b* et *a* aequedistabit.

8. Adhuc sic de *a* potest trahi *ah* chorda per *bc*, quam in *i* puncto secet (cfr. figura 4). Dico *aih* sic potest trahi, quod *ai* erit distantia puncti *d* de *a* in illa chorda *ah*. Hoc certum.

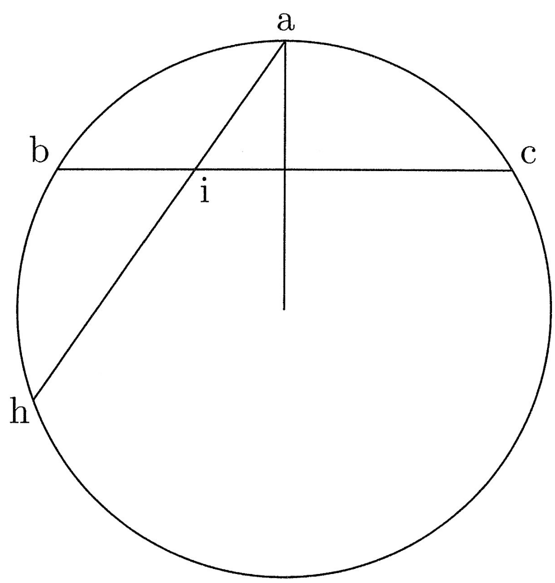


fig. 4

Aut igitur hoc erit, quando *ah* est ut *bc*, et tunc *i* sectio aequedistabit de *b* et *a*, et erit *d* utriusque, et est intentum. Aut *ah* est minor, et hoc non est possibile, quia tunc *ai* esset maior quam prius, quando aequalis; aut quando maior, et est iterum impossibile, quia *ai* minor quam prius, quando aequalis.

Propositio tertia

9. Arcui semicirculi rectam et areae eius curvae rectilinealem commesuraliles designare (cfr. figura 5).

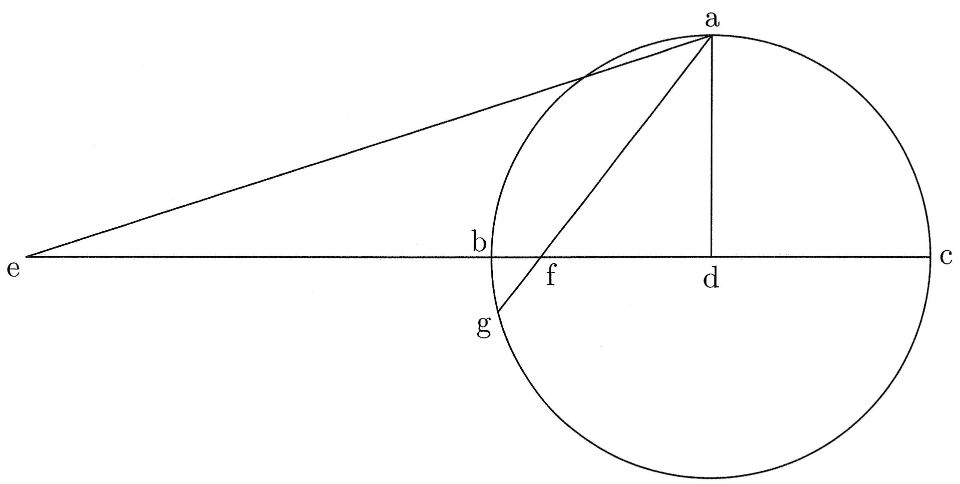


fig. 5

Sit circulus et *bc* arcus semicirculi, cuius medium *a*, et *d* punctus magisterii aequedistans de *a* et *b*, puta hoc casu centrum circuli. Et trahe *ad* lineam, deinde trahe *db* in continuum, et sit *de*, ita quod si medietatem *de* feceris chordam *ag*, quae de *a* per *de* trahitur, ipsa transeat per *f* punctum *de*, qui *f* punctus distet de *d* per quartam partem *de* modo quo supra. Deinde claude orthogonium per *ae* latus. Dico aream *ade* orthogonii commensurabilem areae semicirculi, et *de* commensurabilem arcui *bc*. Secundum patet ut supra. Primum patet eodem modo ut prius per duo supposita, quorum primum est: *de* posse signari et per *ea* orthogonium claudi, taliter quod si ducitur chorda, quae sit medietas *de* de *a* per *de*, ut sit *afg*, area inter *afe* cadens erit commensurabilis tribus quartis areae semicirculi. Patet, quia datur, ubi est plus et ubi minus, igitur et ubi nec plus nec minus. Secundo praesuppono, quod quanto *de* fuerit minor, tanto illa area *afe* est minoris habitudinis ad totam aream orthogonii *ade*, et quanto maior, maioris. Primum igitur praesuppositum aut verificatur, quando area orthogonii *ade* est commensurabili areae semicirculi, et habetur intentum; aut ubi minor seu maior, et utrumque implicat contradictionem praecise modo quo supra.

10. Palam igitur est, quod si orthogonius, cuius unum latus est semidiameter et aliud cum illo rectum angulum faciens est commensurabile toti circumferentiae circuli: area illius orthogonii est commensurabilis areae circuli. Et quia quaelibet polygonia in aliam verti potest, igitur poteris areae circuli commensurabilem aream trianguli, quadranguli, quadrati, pentagoni et cuiuscumque alterius polygoniae assignare, et cuiuslibet partis circuli etiam circulo incommensurabili. Dare etiam angulos poteris datarum linearum habitudinis et figurarum omnium unius in aliam commensurabiliter: dico mirabiles transmutationes facere salva cuiuslibet figurae capacitate et propria invariabilique natura, et ad multa occulta, quae vix enarrari possunt, hac arte pervenies, etiam in sectionibus et uniformiter difformibus curvitatibus. Etiam angulos et instrumenta componere poteris, cum quibus praemissa facillime et subito facies, quae tuae industriae relinquimus.

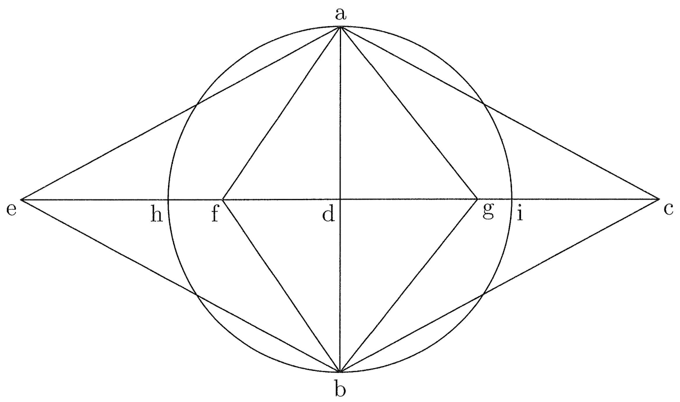


fig. 6

11. Area *agbf* commensuratur medietati areae circuli et area *abe* commensuratur areae circuli (cfr. figura 6). Medium proportionale inter *ad* semidiametrum et *ed* rectam medietati circumferentiae circuli commensurabilem, quam nona sexti Euclidis reperire docet, est costa quadrati, cuius area commensuratur circulo. *df* recta commensurabilis est octavae circumferentiae circuli, ideo area *adf* orthogonii commensuratur octavae areae circuli. Ideo quando habes rectam arcui commensurabilem, habes et aream rectilinealem areae portionis circuli commensurabilem.

Finis.

Dialogus de circuli quadratura.
Dialogus inter cardinalem sancti Petri, episcopum Brixinensem, et Paulum physicum Florentinum, de circuli quadratura

Traduzione italiana a p. 275.

PAULUS. Pater optime, quia me nosti a puero veritatem quaesivisse, quae in mathematicis clarius videtur relucere, atque quantum cupiam hactenus ignotam circuli quadraturam: si igitur post mihi missos tuos de mathematicis complementis, utique mihi obscuros atque incertos libellos, alius certior modus incidit, rogo communices.

NICOLAUS CARD. Immo facilis et ut puto certus.

PAULUS. Dicito, quaeso.

2. NICOLAUS. Omnia tibi nota scio, quae ad rem pertinent, solum hoc unico dempto, scilicet ut datae circumferentiae circuli scias rectam lineam ei aequalem assignare.

PAULUS. Ita est. Nam mihi ex Archimede notum est, si semidiametrum circuli duxero in lineam aequalem semicircumferentiae, oriri quadrangulum circulo aequalem.

3. NICOLAUS. Ut igitur tibi pandam conceptum circa id, quod restat, accipe propositionem: Si chorda quadrantis dati circuli fuerit addita semidiametro eiusdem, oritur diameter circuli circumscripti trigono isoperimetro circumferentiae dati circuli (cfr. figura 1).

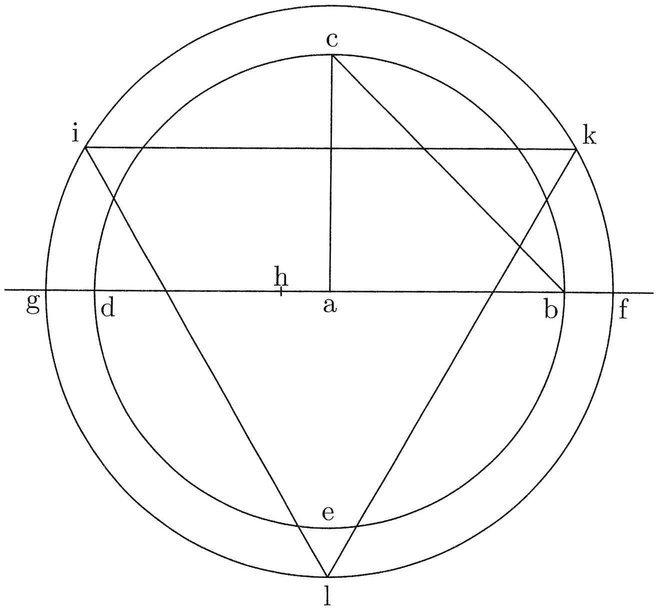


fig. 1

Puta sit datus circulus super *a* descriptus *bcde* et *bc* quadrans, tracta chorda *bc* et lineis *ab* et *ac*, et sit alius circulus super eodem *a* centro descriptus, cuius diameter *fg* sit ut *ab* et *bc*, scilicet *gh* ut *ba* et *hf* ut *bc*, et inscribatur trigonus *ikl*. Dico illum trigonum rectilineum aequari circumferentiae curvae *bcde*.

PAULUS. Facilis est haec praxis atque carissima, si hoc verum ostenderis.

4. NICOLAUS. Conabor. Servata descriptione dati circuli lineam *ac* continuabo in infinitum, quae sit *ma*. Dico non dubium de *b* ad *am* lineam aliquam posse lineam duci, quae sic se habet, quod si ei additur alia linea, quae se habeat ad ipsam sicut costa ad diametrum quadrati, exsurget linea aequalis diametro circuli circumscripti trigono isoperimetro dati circuli (cfr. figura 2).

PAULUS. Admitto. Nam potest dari linea sic de *b* ad *am* tracta, cui si additur alia habens se ad ipsam ut costa ad diametrum, oritur linea minor diametro circuli circumscripti trigono isoperimetro dati circuli. Ut si trahitur ad punctum prope *a*, quae ponatur esse *n*, et sic potest dari alia, quae ad punctum prope *m*, puta *o*, trahatur, quae cum costa sit maior. Igitur inter *n* et *o* erit punctus, ad quem si trahitur linea de *b*, illa cum costa erit aequalis, nec maior scilicet nec minor diametro circuli circumscripti trigono isoperimetro dati circuli.

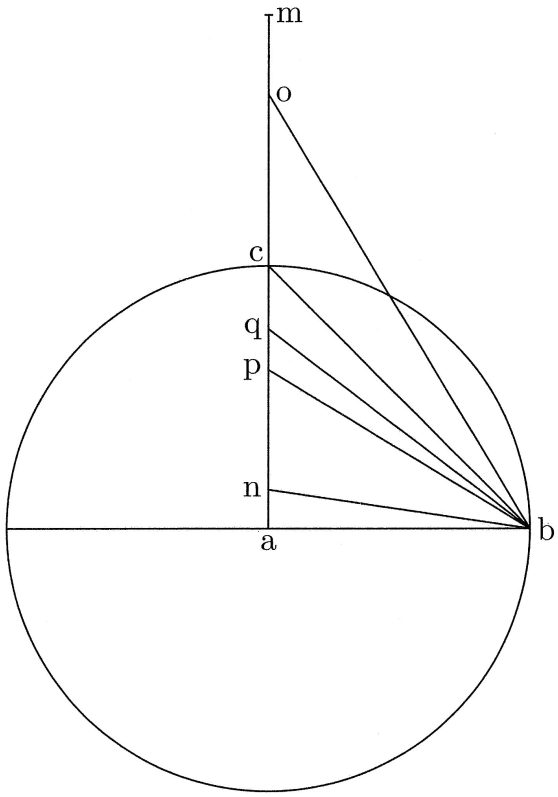


fig. 2

5. NICOLAUS. Bene dico igitur, quod sicut si acceperis *bn* cum quotquot volueris costis suis, linea quae oritur erit minor diametro circuli circumscripti trigono et tot semidiametris dati circuli, quot costas addideris, una costa dempta. Et si acceperis *bo* cum tot costis suis sicut volueris, exsurget linea maior semidiametro circuli circumscripti trigono et tot semidiametris dati circuli, quot costas addideris, una dempta. Igitur etiam erit punctus inter *n* et *o*, ad quem si de *b* lineam traxeris, sic se habebit, quod ipsa erit aequalis diametro circuli circumscripti trigono et tot semidiametris dati circuli, quot costas addideris, una dempta. Hoc autem non est possibile nisi in puncto *c*, cuius costa est ut semidiameter dati circuli, scilicet ut *ba*; alias, si costa foret maior aut minor quam *ba*, non erit hoc possibile.

6. PAULUS. Fateor primum, scilicet quod *bn* cum tot costis sicut placuerit sumptis maneat minor diametro circuli circumscripti trigono isoperimetro et tot semidiametris dati circuli, una dempta. Intelligo una dempta, quia unam costam iungis lineae *bn* pro diametro circuli circumscripti; nam cum *bn* cum costa sit minor quam illa diameter et costa sit minor quam *ab*, patet totum. Sic contrario modo se habet linea *bo*, et etiam patet. Est etiam certum, si sic debet fieri quoad aequalitatem in aliquo medio puncto, quod ille sit *c* ob rationem quam dixisti. Si enim costa foret minor aut maior *ab* linea, nullo modo sequeretur. Sed quid, si quis negaret punctum talem dari inter *n* et *o*?

NICOLAUS. Qui negat inter minus et maius cadere medium aequale, negat dari posse trigonum isoperimetrum circulo. Ego autem praesuppono quadraturam circuli possibilem et per consequens omnia, sine quibus non est possibilis.

7. PAULUS. Possem dicere nihilominus possibilem, sed non esse hoc possibile de quotquot costis ad lineam addendis, ut diameter illa circuli circumscripti trigono et tot semidiametris dati circuli una dempta oriantur, quia possem dicere, quod punctus cadat inter *n* et *c,* qui ponatur esse *p*, et quod linea *bp* cum costa aequetur diametro dicti circuli circumscripti.

8. NICOLAUS. Tunc non negas, quin si *bp* caperetur cum duabus costis, quod tunc foret aequalis diametro dicto, sed cum hoc minor semidiametro dati circuli, quia costa minor quam *ab*.

PAULUS. Quomodo negarem hoc?

NICOLAUS. Esto igitur, quod recipiam punctum supra *p*, qui sit *q*, ubi *bq* cum costa sit tantum maior diametro dicto, quantum una costa minor linea *ab*; hoc quidem tunc est possibile. Nonne hoc dato *bq* cum duabus costis valeret dictum diametrum et cum hoc semidiametrum dati?

PAULUS. Quis dubitat?

NICOLAUS. Quid, si quaererem lineam, quae cum costa excederet diametrum dictam, quantum duae costae sunt duabus semidiametris dati circuli minores?

PAULUS. Oporteret punctum esse adhuc propinquiorem puncto *c*.

NICOLAUS. Quid, si adhuc pluribus costis additis velles lineam pluribus semidiametris aequari?

PAULUS. Necesse foret continue punctum accedere ad *c*.

NICOLAUS. Recte dicis. Si igitur in infinitum sic processeris, necessario ultimo ad *c* punctum devenires, cum ante *c* punctum costa semper sit minor *ab*.

PAULUS. Optime dicis.

9. NICOLAUS. Constat igitur, quod hoc non est impossibile, scilicet quod inter *n* et *o* cadat punctus, ad quem linea ducta sic se habeat, quod quotquot costas ei addideris, ipsa erit aequalis diametro circuli circumscripti trigono isoperimetro et tot semidiametris dati circuli, quot addideris costas una dempta; sed ille erit *c* punctus. Et si dixeris punctum ultra *c* versus *o* esse, idem inconveniens sequitur contrario modo arguendo, quia devenietur necessario iterum ad *c* punctum.

10. PAULUS. Non possum negare quin ita sit, ut clare ostendisti. Manifeste enim constat, quod qui punctum citra vel ultra *c* dixerit esse, ille errat, et error convincitur ex ipsius positione, quoniam omnis linea maior *bc* cum costa sua est maior diametro circuli circumscripti trigono isoperimetro, et minor cum costa est minor diametro.

NICOLAUS. Posset adhuc alia via id ipsum ostendi, et plures modi sunt diametros circulorum inscriptorum et circumscriptorum polygoniis isoperimetris datis circulis faciliter reperiendi ex scientia, quod capacissima polygonia infinitorum laterum coincidit cum circulo. Sed sufficit iste modus; reliquum ad te remitto.

11. PAULUS. Satis est scire modum curvam circumferentiam in rectam lineam transmutandi et converso rectam in curvam, ex quo omnia, quae hactenus in mathematicis ignorabantur, possunt elici, prout in mathematicis tuis tetigisti complementis. Qui igitur reduxerit curvam in rectam, ducat semidiametrum dati circuli in semirectam aequalem circumferentiae. Puta sit *rs* ut *ab* et *st* ut medietas trium linearum *ikl*, concludendo quadrangulum *rstv*, qui erit ut area circuli *bcde*, reperiat medium proportionale inter *rs* et *st* per nonam sexti Euclidis, et sit *xy* medium proportionale scilicet costa quadrati, et erit *xy&z* quadratum aequale circulo (cfr. figura 3). Ista nota sunt, et ideo tibi Nicolao, patri optimo, gratias ago, quod tot tuis curis non obstantibus dignatus es tuum ingenium ad hanc rem ab omnibus doctis in mathematicis desideratam et non repertam applicare, et post multos labores et varios modos facillimam atque clarissimam inventionem tuam propalare, et inquisitores a fatiga magna relevare.

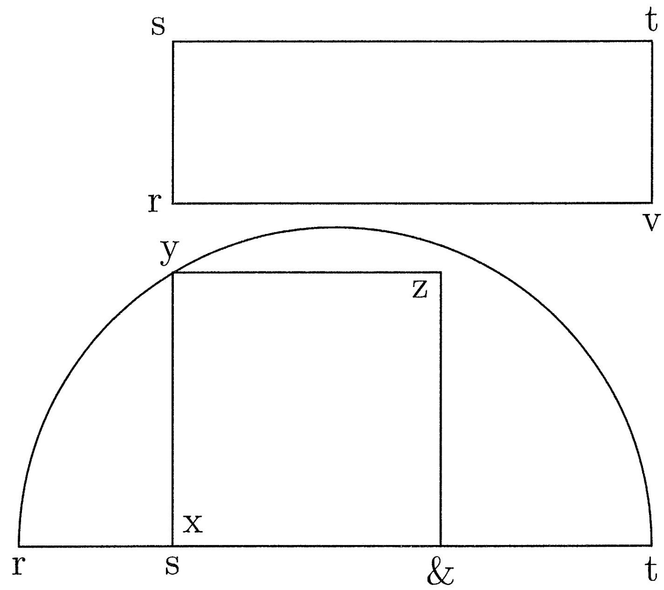


fig. 3

Finis. Brixinae. 1457.

‹Appendix›

12. Punctus stat in hoc, scilicet in processu in infinitum. Nam si est punctus ille, ad quem linea de *b* ducta cum costa sic se habet, quod si costas infinitas addideris, non secus feceris, quam si *ba* infinities ad diametrum circumscripti trigono isoperimetro addideris. Clarum est tunc lineam cum costa aequari diametro circumscripti et costam aequari *ba*, et erit *c* punctus.

13. Si vero negatur processus, tunc clarum est, quod qualiscumque punctus signetur citra *c*, etiam si *bc* ponitur cum costa excedere diametrum circumscripti, tunc semper certus numerus costarum additus ad lineam cum costa efficit diametrum circumscripti et tot lineas *ba*, et potest semper ille numerus augeri, si punctus magis accedit ad *c*, et numquam cessat illa adauctio, quia non est punctus citra *c*, ubi linea cum costa in numeris excedat diametrum circumscripti, quantum infinitae costae ab infinitis lineis *ba* exceduntur, cum quaelibet costa in aliqua quantitate sit minor *ba* linea. Quae quantitas infinities multiplicata maior semper erit quam quantitas excessus lineae cum costa diametrum circumscripti excedentis.

14. Adhuc dico: non dubium *bc* cum costa excedere diametrum circumscripti capacissimae polygoniae, scilicet infinitorum angulorum, quae convertitur cum diametro circuli isoperimetri. Ideo si addideris quotquot volueris costas, semper excedunt tot lineas *ba*, et hoc in quantitate, qua *bc* excedit *ba*, ut est notum. Quod si receperis aliam polygoniam citra capacissimam, tunc excessus ille est minor, et ita in infinitum, et cum inter capacissimam et incapacissimam cadere possint infinitae polygoniae, erit in trigono ille excessus, si erit saltem ita parvus, quod non potest esse minor. Si enim posset esse minor, non esset polygonia incapacissima. Quantitas autem, quae non potest esse minor, non est quantitas, sed punctus. Sic linea *bc* non est aliqua quantitate maior quam illa, quae quaeritur.

15. Aliter: Esto quod *bn* sit linea, quae cum costa sua aequetur diametro circumscripti capacissimae polygoniae. Manifestum est, quod *bn* excedit *ba*, semidiametrum circuli isoperimetri, plus quam diameter circumscripti diametrum circuli scilicet in tantum, quantum *bn* excedit *ba*, ut est notum; et in aliis polygoniis minus capacibus continue minus. In minime igitur capaci minime debet linea illa costam suam excedere *ba* ultra excessum, quam diameter circumscripti excedit diametrum circuli isoperimetri. Sicut igitur in maxime capaci excessus ille est maximus, qui non potest esse maior, et continue minor in minus capacibus, erit in minime capaci minimus, qua non potest esse minor. Quare erit costa illius ut *ba*. Si enim foret minor quam *ba*, manifestum est, quod plus excederet *ba* quam in incapacissima fieri debet; si maior *ba*, tunc minus; erit igitur *bc*, cuius costa *ba*.

Caesari meo piissimo domino Friderico Imperatori Nicolaus, Cardinalis Sancti Petri, episcopus Brixinensis,
De caesarea circuli quadratura

Traduzione italiana a p. 281.

2. Compulit me pridie quaedam inopinata persecutio munitionem Andracii, quae Almanice Buchenstein appellatur, inhabitare. Ibi inter Alpes libris carens recreationis gratia inquirere coepi, si ne claro et facili modo semper quaesita et, ut fertur, nondum scita circuli quadratura posset reperiri. Et is subscriptus modus post plures alios in aliis meis de hac re conscriptis libellis clarior et mihi gratior in mentem venit, quem tuae maiestati tamquam donum tuae celsitudini dignum transmitto. Hoc enim, quod hactenus aestimatum est posse inveniri, licet non nisi altissimo ingenio et tanto fervore, tamquam singularissimum aliquid quaesitum, cui dignius offertur quam supremo imperatori, qui et in secretis ingeniis uti nobilissimus princeps delectatur?

3. Scio hoc, licet parvum sit, munusculum pro tua innata clementia magni facies et mihi utique, tuo fideli, gratiosior eris. Capies etiam exemplo reductionis figurarum, quomodo imperatori adiacet potestas rotundum in angulare et item angulare in rotundum vertere, aliquando legis severitatem in clementiam, aliquando clementiam in rigorem mutare. Quod solum tibi, qui es solutus legibus, competit, cum tu solum civilibus praesis legibus, quibus ceteri iure subesse deberent.

Propositio

4. Si de *a*, centro dati circuli, ad duo puncta circumferentiae, *g* et *f*, per duodecimam circumferentiae partem distantia lineas traxeris et de uno puncto *ag* lineae, puta *d*, orthogonalem in infinitum per *af* sic duxeris, quod portio, quam abscindit a *c* contactu ad circumferentiam, sit medietas *ad*, signaverisque punctum *x* in orthogonali, ita quod linea de *a* centro ad ipsum ducta sit ad lineam *ad* dupla, erit *dx* ut sexta pars circumferentiae dati circuli (cfr. figura 1).

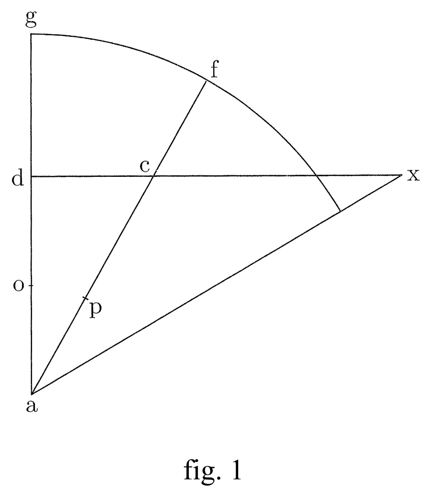


fig. 1

Ratio huius est, quia *ad* erit semidiameter circuli inscripti trigono isoperimetro dato circulo et *ax* semidiameter circuli circumscripti dicto trigono et *dx* medietas lateris dicti trigoni.

Probatio

5. Probatur: Cum sit certum, quod *ga* sit maior 2/3 semilateris trigoni et minor semilatere, signetur igitur stante figura tam in *ga* quam in *fa* ad imaginationem linea aequalis 2/3, quae sit *go* et *fp*. Deinde de aliquo puncto *ag* ducatur orthogonalis ad *af*, quae se habeat ad duas lineas, quae sunt supra ipsam in *ga* et *fa*, sicut se habent illae duae ad *go* et *fp*. Hoc quidem est possibile, quia datur prope *g*, ubi se habet ad plus, et prope *o*, ubi se habet ad minus; igitur in aliquo loco medio se habebit nec in plus nec in minus. Sic etiam potest dari orthogonalis, quae habeat se ad lineas, quae sunt sub ea usque ad *o* et *p* in habitudine, qua illae se habent ad *og* et *pf*, arguendo ut praemittitur.

6. Dico illas duas orthogonales coincidere in una, quae abscindit de *og* sursum et *fp* deorsum aequales partes, et per consequens etiam de *go* deorsum et *pf* sursum aequales partes; aliter enim hoc non est possibile, ut infra ostendetur. Erit igitur illa orthogonalis 1/3 semilateris, uti ponitur esse *dc*. Et quia *ca* est dupla ad *dc*, erit *ca* ut *fp*, et *pa* erit ut *fc* et *fc* ut *do*. Et cum *fc* sit etiam ut *oa*, erit *fc* medietas *da*; et quia *dc* est 1/3 semilateris trigoni isoperimetri et triplicata semilatus contingens circulum inscriptum trigono in *d*, erit ad semidiameter illius circuli inscripti. Quod erat intentum.

7. Quod autem orthogonalis de *g* descendens et alia de *o* ascendens coincidant in puncto *d*, ut praemittitur, sic patet: Nam orthogonalis descendens usque ad dictam habitudinem supra *d* stare nequit. Patet, quia lineae supra orthogonalem ibi sunt minores medietate *go* et *fp*, et orthogonalis maior medietate *go*, ut est certum. Nec potest infra *d* descendere, quia ibi duae lineae supra orthogonalem sunt maiores medietate *go* et *fp*, et orthogonalis minor medietate *go*. Si igitur descendens orthogonalis non potest cadere nisi in *d*, igitur etiam et ascendens non potest cadere nisi in *d*. Cum in *d* superiores et inferiores lineae aequentur, igitur coincidunt orthogonales. Quod fuit ostendendum.

8. Aliter idem probatur. Et primum suppono posse signari in *ag* semidiametrum circuli inscripti trigono isoperimetro dato circulo, qui sit ad imaginationem *ad*. Et licet sit maior medietate *ag*, est tamen multo minor duabus tertiis, ut notum est ex ostensione dudum scita, quae habet diametrum circuli triplicatam cum septima excedere circumferentiam. Potest etiam ab puncto *d* orthogonalis duci indefinitae quantitatis, quae sit *dx*, et *af* de *ag* linea super *a*, centro dati circuli, circumvolvi, quousque portio eius supra *dx* et infra circumferentiam sit medietas *ad*. Patet. Nam si *af* est prope *g*, portio illa est maior medietate *da*; sed si pervenit prope locum, ubi *dx* scindit circumferentiam, est minor, igitur in aliquo loco nec maior nec minor. Ubi autem portio illa aequatur medietati *ad*, residuum lineae *af* infra *dx* versus *a* erit ut *gd* cum medietate *da*. Et haec omnia relinquo manifesta.

9. Secundo suppono, quod si orthogonalis de *d*, puta *dx*, fuerit ut sexta circumferentiae dati circuli, tunc *ax* linea erit dupla ad *ad*. Et tres lineae singulariter notantur: prima est *dg*, alia est portio *af* super *dx* et est secunda, et est linea inter *d* et *af* tertia, et hoc certum.

10. Tertio suppono, quod si *af* iacet super duodecimam partem circumferentiae distantis a *g* puncto, tunc linea orthogonalis *dx*, quae cadit inter *d* et lineam *fa*, quae ponatur esse *dc*, erit tertia pars lineae *dx* aequalis sextae parti circumferentiae circuli. Nam illa tertia erit medietas semidiametri circuli illius, cuius semidiametri potentia est tertia pars potentiae semidiametri *ax*, igitur trigoni inscripti eidem semilateris duae tertiae. Patet, nam potentia semilateris trigoni ad potentiam semidiametri se habet ut 3 ad 4. Igitur potentia duarum tertiarum semilateris ad potentiam totius semilateris se habet ut 4 ad 9, et potentia semidiametri erit ut 12, cuius tertia est 4, et hoc certum.

11. Quarto suppono, quod dum *af* circumvolvitur, veniet ad locum, ubi tres lineae, de quibus in secunda suppositione, erunt aequales *dx*. Nam si locetur *af* prope *g*, erunt minores; si distanter et ultra duodecimam circumferentiae a *g* puncto, erunt maiores. Erunt igitur in aliquo loco nec maiores nec minores *dx*, quae ponitur esse sexta circumferentiae.

12. Quinto suppono, quod dum circumvolvitur *af*, quamdiu secunda est maior medietate *ad*, tunc prima et secunda simul sunt maiores linea residui. Et voco lineam residui illam partem de *af*, a qua est secunda subtracta. Et quando secunda est minor medietate *ad*, tunc prima et secunda simul sunt minores linea residui. Quanto autem *af* locatur distantius a *g* puncto, tanto tres lineae simul sunt maiores; et ita quanto secunda est maior, tres lineae simul sunt minores; et quanto minor, maiores.

13. Dico igitur, quod cum *af* locatur super punctum duodecimae partis circumferentiae distantis a *g* puncto, tunc tres lineae simul aequantur *dx*, scilicet sextae parti circumferentiae, quia secunda est medietas *ad* et prima et secunda aequantur lineae residui, quae cum tertia aequatur *dx*.

14. Si quis negat hoc, oportet quod ideo, quia non fatetur secundam medietatem *ad*. Ideo si negans dicit tres lineas minores *dx*, necesse est, quod dicat secundam esse talem, quod tres lineae sint minores quam si secunda esset medietas *ad*. Et ergo ex quinta suppositione oportet, quod dicat secundam esse maiorem medietate *ad*; et si sic, tunc, cum ex eadem suppositione prima et secunda simul excedant lineam residui *ca*, quae cum tertia *cd* aequatur *dx*, patet tres lineas non esse minores, sed maiores *dx*. Sic si dixerit tres lineas maiores, necessario dicet secundam minorem medietate *ad*. Et si sic, prima et secunda erunt minores linea residui, quae cum tertia aequatur *dx*. Tres igitur lineae erunt minores; et quidquid negans dicit, ex quinta suppositione infertur oppositum. Et ita patet necessario propositionem veram et *ad* semidiametrum circuli inscripti trigono isoperimetro et *cf* eius medietatem atque *dx* rectam aequalem sextae parti circumferentiae dati circuli, cuius *ag* semidiameter, et hoc est intentum.

15. Adhuc aliter. Dico tres lineas aequari medietati lateris trigoni isoperimetri, et consequenter primam et secundam simul aequari duabus tertiis illius et secundam esse medietatem semidiametri circuli inscripti trigono.

16. Si unum est verum, omnia sunt vera, ut est certum. Si negas, tunc tibi contradicis. Nam si servata figura priori dicis tres lineas esse minores medietate lateris dicti trigoni, tu dicis secundam esse maiorem et minorem medietate semidiametri circuli inscripti dicto trigono. Maiorem dicis in eo, quod asseris tres lineas simul esse minores, quam si secunda esset medietas semidiametri circuli inscripti trigono. Quanto enim secunda maior, tanto tres lineae simul minores ex quinta suppositione. Tu dicis etiam secundam minorem medietate dicti semidiametri, quia asseris primam et secundam simul minores residuo *af*, a quo secunda est abscisa. Alias enim tres lineae non essent minores medietate lateris trigoni. Etiam dicis tertiam esse maiorem et minorem 1/3 semilateris trigoni. Nam si tres lineae simul sunt minores medietate lateris trigoni et prima cum secunda sunt maiores residuo *af*, igitur tertia est minor 1/3 semilateris. Et cum prima et secunda etiam sint minores residuo *af*, igitur tertia maior 1/3 semilateris. Et hoc idem eveniet, quando dicis tres lineas maiores semilateri. Sic patet, quomodo negans dicit duo contradictoria.

17. Palam diametrum dati circuli valere semidiametrum circuli inscripti trigono isoperimetro et 2/3 lateris trigoni isoperimetri. Ideo si fuerit linea aequalis diametro triplicatae cum 1/7 eius et sumpseris ex illa semidiametrum inscripti et 2/3 lateris trigoni, erunt simul maiores diametro, quia linea aequalis diametro triplicatae et eius septimae parti est maior quam circumferentia. Et si fuerit linea aequalis diametro triplicatae et 10/71 eius et ex illa sumpseris semidiametrum circuli inscripti trigono dicto et duas tertias lateris trigoni, erunt illa simul minores diametro, quia diameter triplicata cum 10/71 eius est minus quam circumferentia, uti haec Archimedes et alii ostenderunt. Et poteris in numeris experiri.

18. Est etiam notandum, quod qui negat circuli quadraturam ex eo, ne affirmet curvum et rectum coincidere, ille negando affirmat duo contradictoria coincidere. Subtiliter advertens ostendet propositiones mathematicas veras ex eo, quia alias sequeretur circuli quadratura, et similiter ex eo, quia alias sequeretur circulum non posse quadrari. Unde ex affirmatione et negatione quadraturae circuli possunt omnes propositiones mathematicae vere ostendi, uti aliqualiter alibi de hoc tetigi, sicut docta ignorantia omnia scibilia venatur in fine indagationis, ne sit coincidentia et pariter ne non sit coincidentia contradictoriorum, de qua alibi, licet insufficientissime, aliqua in tribus scripsi libellis.

19. Certum autem est, si ducitur *ga* semidiameter dati circuli in *ab* triplam ad *dx*, oriri quadrangulum aequale circulo (cfr. figura 2). Et si capitur medium proportionale inter *ag* et *ab* triplam ad *dx* per nonam sexti Euclidis, ut est *ae*, erit *ae* latus quadrati, quod aequatur circulo, ut haec prius scita sunt. Quibus hanc caesaream addo circuli quadraturam.

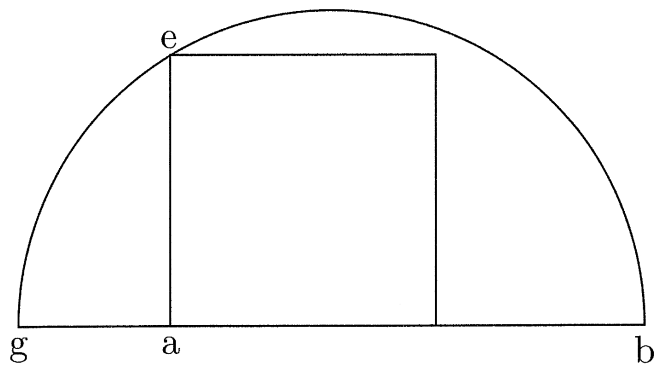


fig. 2

Finit anno Christi 1457 sexto Augusti in Andracio.

De mathematica perfectione

Traduzione italiana a p. 287.

Reverendissimo in Christo Patri, domino Antonio sanctae Romanae ecclesiae tituli sancti Chrysogoni presbytero cardinali, Nicolaus cardinalis tituli sancti Petri ad vincula de mathematica perfectione

1. Sollicita est nobilis mens vestra, P. reverendissime, ut videat etiam hebetiorum speculationes, et a me alias novi aliquid deposcebat. Et quoniam me a palatio pes morbidus excusavit, biduo domi sedens mathematicam perfectionem, quam mitto, conscripsi, quatenus virtutem coincidentiarum experimento ignotorum hactenus in theologicis inquisitionibus commendarem. Omne enim scibile mathematicum ex ipsa, uti exempla quaedam subiungo, attingitur in his obscuris semper quam avide quaesitis, quae nulli hactenus patuerunt. Quomodo autem mathematica nos ducant ad penitus absoluta divina et aeterna, melius me novit doctissima paternitas vestra, qui estis theologorum vertex. Quandam etiam meae considerationis circa speculum et aenigma parvam alligavi scripturam: ubi si R. P. V. modicum versari dignabitur, subito videbit, si visum mentis recte in rerum conieci principium, haec talia, quae etiam a doctissimis scribi timebantur. Quoniam minus apte panduntur quam contemplentur, non erubui P. V. mittere, cuius iudicio dirigi opto, sciens me non alieno, sed patri, qui me amat, communicare secreta, quae mihi pretiosiora fortassis videntur quam existant: correcturus aestimationem secundum vestram sententiam, quam istis libellis supplex ascribi deposco.

2. Intentio est ex oppositorum coincidentia mathematicam venari perfectionem. Et quia perfectio illa plerumque consistit in rectae curvaeque quantitatis adaequatione, propono habitudinem duarum rectarum linearum se ut chorda ad suum arcum habentium investigare, sciens illa habita me medium habere curvam quantitatem cum recta adaequandi; et quoniam ad has inveniendas necesse est me alicuius chordae ad arcum habitudinem scire, ut ex illa cognita pergere queam ad artem. Sed quomodo est possibile me cuiusquam datae chordae ad arcum habitudinem scire, cum inter illas quantitates adeo contrarias forte non cadat numerabilis habitudo?

3. Necesse erit igitur me recurrere ad visum intellectualem, qui videt minimam, sed non assignabilem chordam cum minimo arcu coincidere. Nam quanto chorda minor, tanto sagitta adhuc minor, ut *de* sagitta chordae *bc* est minor quam *ge* sagitta chordae *fh*, quia *bc* minor *fh*, et ita consequenter (cfr. figura 1).

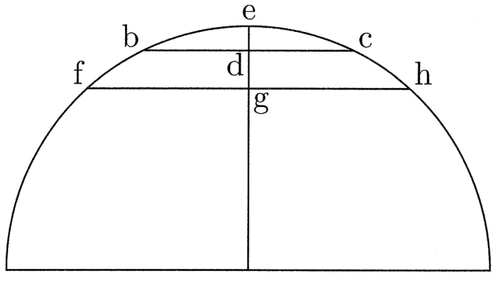


fig. 1

4. Minima igitur chorda, qua minor dari non posset, si signabilis foret, non haberet sagittam, et ita etiam non foret minor arcu suo. Coincideret igitur ibi chorda et arcus, si ad minimam quantitatem in talibus deveniretur. Hoc videt bene intellectus necessarium, licet sciat nec arcum nec chordam, cum sint quantitates, esse simpliciter minimas in actu et posse, cum continuum sit semper divisibile. Ad hauriendum autem scientiam habitudinis respicio ad intellectualem visionem et dico me videre, ubi est chordae et arcus aequalitas, scilicet in simpliciter minimo utriusque. Ex hac visa aequalitate pergo ad inquirendum intentum medio trianguli orthogonii, et hoc per propositionem, quae sequitur.

Propositio

5. Si orthogonii latus, quo non est maius, ponitur linea prima et semidiameter circuli, et latus, quo non est minus, secunda linea et semichorda, et reliquum latus tertia linea: quae erit semiarcus ad semichordam habitudo, illa erit lineae aequalis tribus primis lineis ad lineam aequalem duabus primis cum tertia.

Ut si orthogonius est *abc* et *ac* latus, quo non est maius, prima linea et semidiameter circuli, et *bc* latus, quo non est minus, secunda linea et semichorda, et *ab* latus tertia linea, et *hc* semiarcus, et de aequalis tribus lineis *ac*, et *fg* aequalis duabus *ac* cum una *ab*. Dico, quod quae est habitudo *hc* ad *bc* illa est *de* ad *fg* (cfr. figura 2).

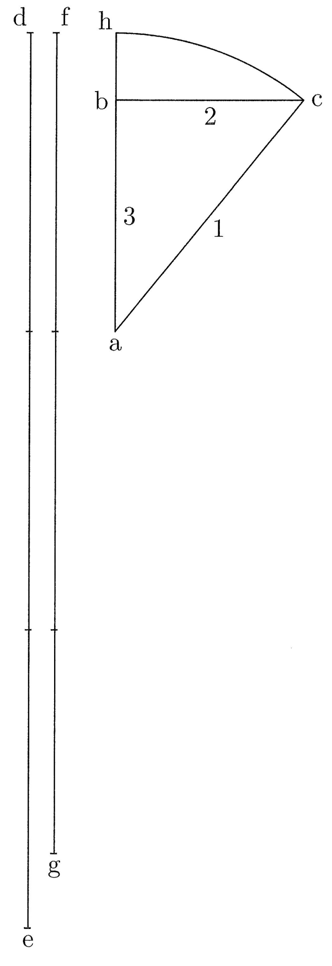


fig. 2

Explanatio propositionis

6. Orthogonius est tanto minor, quanto prima linea tertiam minus excedit. Si igitur posset dari minimus orthogonius, prima tertiam non excederet, et quia secunda linea foret minima, tunc cum ponatur semichorda, ipsa non foret minor semiarcu secundum praemissa.

Maximus autem orthogonius est, quando prima tertiam excedit maxime. Et hoc erit, quando tertia erit ut secunda, qua non est minor, et tunc secunda est semichorda quadrantis. Et sit ille orthogonius *abc* (cfr. figura 3).

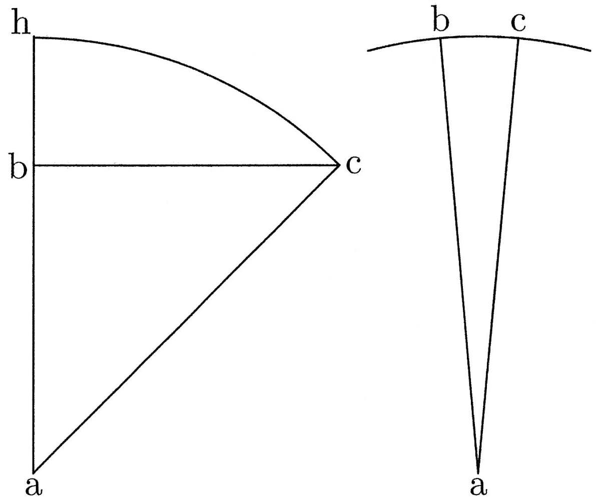


fig. 3

Dico possibile esse, quod aliqua linea addatur *ac* et eadem addatur *ab*, et maior se habeat ad minorem ut *hc* semiarcus ad *bc* semichordam. Hanc lineam posse dari, quae addatur *ac* et *ab*, ut praefertur, certum relinquo, cum possit linea aliqua dari, quae addita ad *ac* et *ab* efficiat lineas maioris habitudinis quam est habitudo *hc* semiarcus ad *bc*, et possit dari linea, quae addita efficiat lineas minoris habitudinis quam *hc* ad *bc*, et hoc certum. Igitur et dari posse eam, quae addita efficiat lineas nec maioris nec minoris habitudinis quam *hc* ad *bc*, manifestum, cum non repugnet lineas rectas se habere ut chorda ad arcum, sive chorda sit arcui commensurabilis sive incommensurabilis.

7. Constat autem, quod qualiscumque illa linea fuerit, si in minimo orthogonio etiam ad *ac* et *ab* additur, propositio verificatur, cum ibi prima et tertia sic sint eadem sicut semiarcus et semichorda. Quare qualiscumque illa linea fuerit, quae additur, propositio vera manet. Et quia sic est, quod linea, quae additur in maximo orthogonio, est etiam illa, quae additur in minimo, igitur et in omnibus orthogoniis intermediis eadem manebit.

Et haec est radix huius scientiae, ex qua sequitur, quod si reperio lineam, quam addo in orthogonio, cuius *bc* est semichorda quadrantis, et quam etiam addo, ubi *bc* est semichorda hexagoni, et quae hinc inde reperio, tenent habitudinem ad invicem sicut arcus scilicet ut tria ad duo. Patet me lineam addendam in omnibus invenisse, et hoc est indubitatum.

8. Hoc faciliter sic patet. Possibile est lineam aequalem tertiae adiunctis duabus primis orthogonii ad lineam ex prima adiunctis quattuor se|cundis in aliquo loco se habere ut semichorda ad semiarcum. Hoc certum. Nam datur, ubi in minus, ut in maioribus orthogoniis, et ubi in plus, ut in minoribus, ut de se patet: datur igitur in aliquo loco, ubi nec in plus nec in minus. Ubicumque hoc fuerit, oportet per praemissa, quod sit eadem linea, quae additur ad tertiam et quae additur ad primam. Sed quae additur ad tertiam, est prima bis. Igitur quae additur ad primam, erit similiter ut prima bis, et ita erit, ubi secunda erit medietas primae, scilicet semichorda arcus hexagoni. Quare addenda est diameter.

9. Sic poteris et aliter idipsum videre. Puta datur, ubi prima bis cum secunda bis se habet ad primam ter sicut semichorda ad semiarcum, arguendo ut ante: Sed cum una debet esse linea addita ad tertiam et primam, et ad primam additur prima bis, et prima bis additur ad secundam bis, erit secunda bis ut tertia, et quae additur, erit diameter. Et consimilia facere poteris argumenta, quot placuerint.

Sed propositio dicit lineam addendam ad *ac* et *ab* esse diametrum sive duplam ad *ac*, quod idem est. Poteris hoc experiri ex iam dicto, scilicet an in omnibus proportionabiliter idem eveniat.

10. Sed ut tu videas utique sic esse, ut habet propositio, sumas duplicem orthogonium, ut est *abc* et *abd*, et describe arcum *dc* continuando etiam *ab* ad arcum, et sit *be* sagitta (cfr. figura 4). Dico possibile esse aliquem triangulum ex orthogoniis compositum sic se habere, quod si *ac* et *ad* continuantur in infinitum, et chorda aliqua, quae sit aequedistans ad *dc*, fiat aequalis *ad*, *ac* et *ab*, ut *gf*: quod tunc arcus, cuius *gf* chorda, excedat chordam in *be* sagitta, scilicet in tantum, quantum *ae* excedit *ab*.

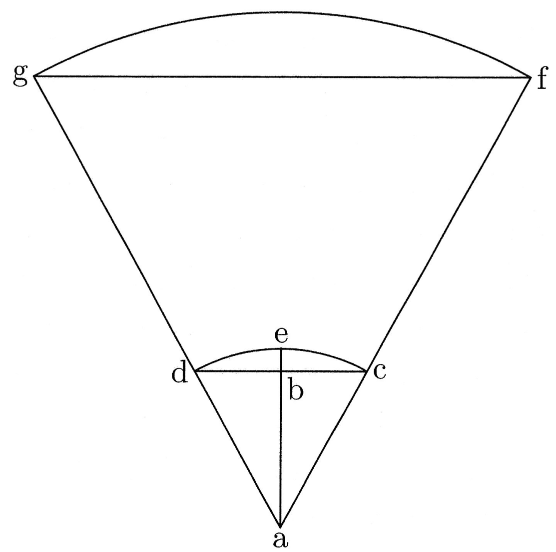


fig. 4

11. Hoc quidem in aliquo loco possibile esse negari nequit, puta ubi tres semidiametri minus sagitta sunt triplae ad chordam. Tamen sive ibi sive alibi sit, non variat; sufficit, quod in aliquo loco est possibile.

Et hoc si volueris ut ante probare, poteris: quia datur, ubi excessus est in minus quam sagitta, et datur, ubi in plus; et haec certa relinquo. Datur igitur, ubi nec in plus nec in minus modo praemisso. Ubicumque autem hoc fuerit, patet *ac*, *ad* cum *ab* se habere ad *ac* ter sicut chorda ad arcum. Patet, quia *ac* ter cum *ac* ter minus sagitta in aliquo loco aequentur chordae et arcui simul, et hoc certum, aut igitur ibi, ubi arcus excedit chordam in dicta sagitta. Et habetur propositum aut citra vel ultra. Si citra: tunc, cum arcus chordam minus excedat quam in dicta sagitta, ideo chorda erit maior quam ubi arcus excedit chordam in dicta sagitta, quod est impossibile, scilicet minorem arcum habere maiorem chordam. Sic, si diceretur quod ultra: oporteret maiorem arcum habere minorem chordam. Quare linea ad *ac* et *ab* addenda est *ac* bis seu diameter circuli, et haec est veritas.

12. Cur autem sit diameter eiusdem circuli, forte dici poterit, quod cum linea addenda sit alicuius circuli diameter. Non dicetur, quod sit maioris circuli diameter, quia tunc non haberet veritatem in maximo circulo, quo actu non est maior. Nec potest dici, quod sit minoris, quia in minimo circulo actu non haberet veritatem; et ita in nullo, cum id, quod de circulo ut de circulo dicitur, omnibus convenire necesse sit. Et si omnibus non convenit, tunc nulli: sive tamen illa sive alia sit ratio, non refert. Sic patet propositionis intellectus.

13. Adiciam aliam eiusdem lineae addendae ostensionem (cfr. figura 5). Dabilis est linea, cuius *ac* est pars aliquota, quae ad lineam, quam excedit in quantitate, qua *ac* excedit *ab*, se habet in maiori habitudine quam *hc* ad *bc*: uti est linea ad *ac* dupla. Et dabilis est linea, cuius *ac* est pars aliquota, quae ad lineam, quam excedit in quantitate, qua *ac* excedit *ab*, habet minorem habitudinem quam *hc* ad *bc*: uti est quadrupla ad *ac*. Et haec verissima. Quare dabilis est linea, cuius *ac* est pars aliquota, quae ad lineam, quam excedit in quantitate, qua *ac* excedit *ab*, se habet in habitudine qua *hc* ad *bc*. Et haec, cum sit necessario maior dupla et minor quadrupla, erit tripla ad *ac*. Quare addenda ad *ac* erit dupla ad ipsam seu diameter.

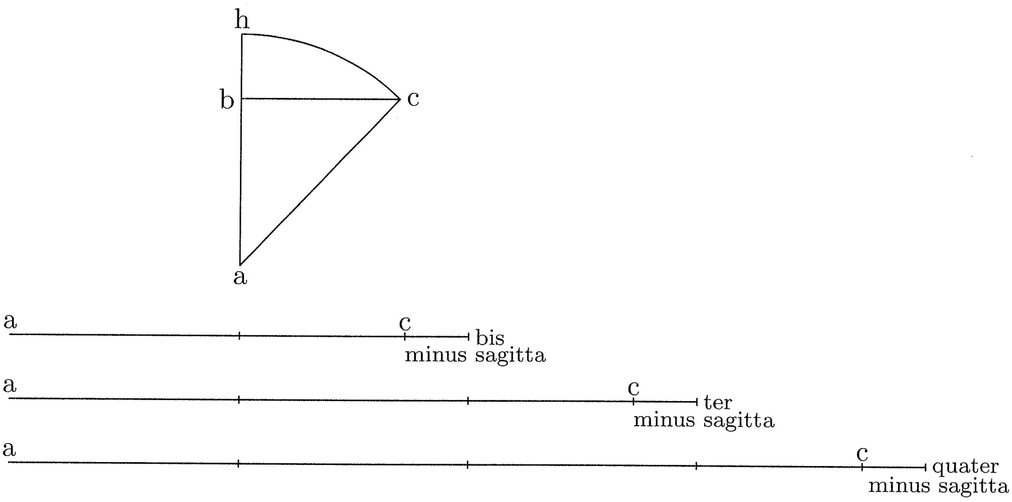


fig. 5

14. Ut autem in numeris tu videas illa vera, quae de dupla et quadrupla ad *ac* dixi, ponas secundum propinquitatem Archimedis *ac* esse 7 et *ab* quasi 5, et sit *bc*, ut in quadrante, ei aequalis etiam 5. Et *hc* erit 5 cum dimidio secundum propinquitatem positionis, quod semicirculus sit *ac* ter cum una septima, scilicet quasi 22, et ita habitudo *hc* ad *bc* erit quasi 5 cum dimidio ad 5 sive 11 ad 10, et excessus *ac* super *ab* quasi duo. Et patet, quod dupla ad *ac*, scilicet 14, se habet ad minorem ea in quantitate excessus, qua *ac* excedit *ab*, scilicet qui est quasi duo, puta 12, in maiori habitudine quam 11 ad 10, et quater ac, scilicet 28, ad minorem ei in duobus, scilicet 26, in minori habitudine quam 11 ad 10. Ideo linea, cuius *ac* debet esse aliquota, debet esse maior dupla et minor quadrupla. Erit igitur tripla, cum illa sola sit media, cuius *ac* est aliquota.

15. Causa autem, cur procedit argumentatio, quod linea, quae quaeritur, debet esse pars aliquota *ac*, est ista: Quia cum debeat esse una in omnibus orthogoniis, tunc necesse est, quod respiciat *ac*, quae etiam est una in omnibus, et non *ab* vel *bc*, quae semper variantur. Possent alii innumerabiles modi ostensionis propositionis adduci, sed isti sunt fundamentales et sufficientes.

16. Multa hic propalantur abscondita, quoniam vides, quomodo id, quod verificatur de maximo et minimo, verificatur de mediis, et quod ille, qui videt maximum coincidere cum minimo, quoniam maximum pariter et minimum, ille in ipso videt omnia. Et praxim habes venandi scientiam commensurationis contrariorum, quae incommensurabilia videntur. Haec mihi magna et prius intacta videntur. Archimedes etenim, qui per helicam voluit rectam circumferentiae circuli commensurare, nihil de arte tetigit nec id invenit in dicto particulari, quod quaesivit; peccavit enim praesupponens, quod quaesivit. Helica enim sive spiralis linea sine motu duorum punctorum, quorum motuum habitudo est ut semidiameter ad circumferentiam circuli, describi nequit. Id igitur praesupposuit, dum de helica loqueretur, quod quaesivit. Sed haec sic sint. Redeamus ad institutum et ex fecunditate propositionis aliqua eliciamus corollaria, ut pari modo innumera alia his datis queant explicare.

Corollarium

17. Illa est habitudo trium semidiametrorum ad tres semidiametros minus sagitta chordae quadrantis et minoris, quae est cuiuslibet arcus ad suam chordam (cfr. figura 6).

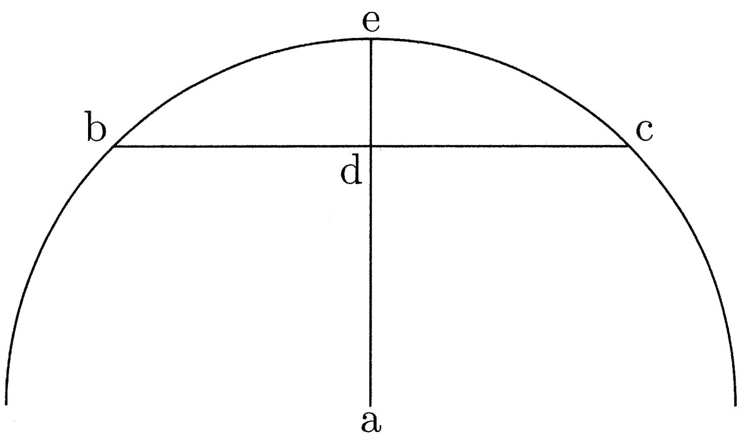


fig. 6

Ut si *bc* sit chorda quadrantis vel minoris arcus, et *de* a centro per *d* medium *bc* ad *e* circumferentiam sector ducatur. Illa est habitudo *ae* ter sumpta ad *ae* bis sumpta cum *ad*, quae arcus ad *bc* chordam. Cum autem dicitur *de* chorda quadrantis et minoris, patet ideo, quod in maiori chorda latus orthogonii, quo non est minus, non possit esse semichorda, quod tamen requiritur. Et clare patet corollarium ex praemissis.

Corollarium

18. Datum arcum in rectam resolvere.

Arcus enim, si est quadrans et minor, ipsum sic recipito; si maior, partem eius recipito aliquotam, quae sit quadrans aut minor. Et sit *bc* arcus quadrantis in rectam resolvendus (cfr. figura 7). Trahe de *a* centro lineas per *b* et *c* in infinitum et aliam ad medium chordae, scilicet *ad*, et inter infinitas lineas unam aequedistantem ad *bc* chordam describe, quae sit

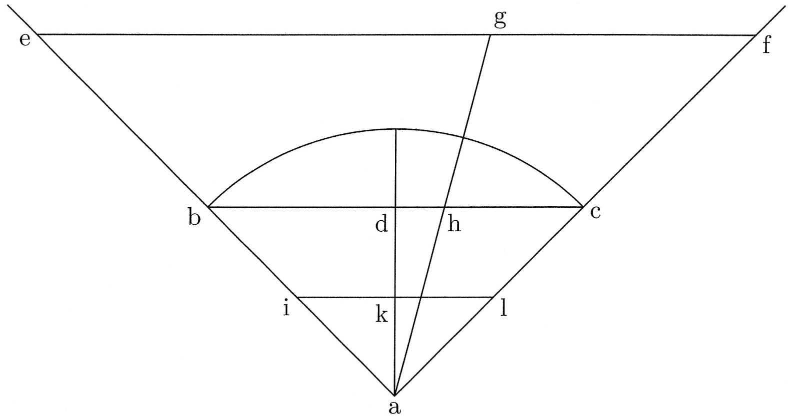


fig. 7

aequalis *ab*, *ad* et *ac*, et sit *ef* aequalis illis. In *ef* signa *ab*, et sit *fg* ut *ab*, et trahe *ag* lineam notando, ubi chordam *bc* secat, ponendo *h* litteram. Dico *hc* esse tertiam arcus. Tripla igitur *hc*, et redegisti arcum in rectam. Vel trahe aequedistantem ad *bc* versus centrum, quae sit *ikl*, ita quod *ai*, *ak* et *al* simul aequentur *bc* chordae, et *ai* erit tertia arcus. Haec omnia de se patent.

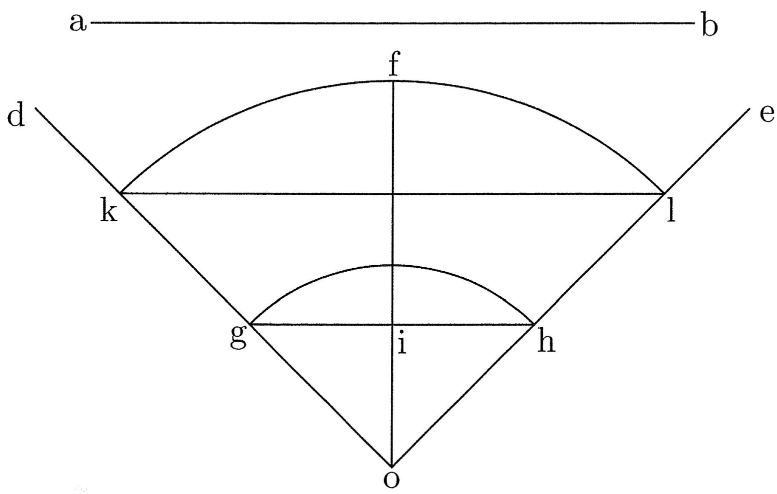


fig. 8

Corollarium

19. Datam rectam in arcum resolvere.

Sit *ab* recta, quam si vis in quadrantem alicuius circuli resolvere, fac de *o* centro lineas, quae rectum angulum constituunt, exire indefinitae quantitatis, quae sint *od* et *oe*, et aliam fac transire *e* medio anguli, scilicet *of*, et tertiam partem *ab* lineae resolvendae signa in *od* et *oe*, et sit *og* ut tertia *ab*, similiter et *oh*, trahendo *gih* (cfr. figura 8). Et consequenter trahe aequedistantem ad *gih* aequalem *og*, *oi* et *oh*, et sit *kl* illis aequalis, et describe quadrantem, cuius *kl* chorda, quia ille est, cui *ab* aequatur. Et si in alium arcum resolvere volueris, qui fuerit minor quadrante, eodem modo facito; si maior, recipito partem aliquotam. Puta vis in circulum reducere, recipito quartam partem rectae et resolve in quadrantem, et totum in circulum reduxisti.

20. Si vero datam rectam in arcum dati circuli resolvere volueris, vel cum tota vel parte aliquota eius, procede modo quo supra, angulum *od* et *oe* variando, quousque attingas chordam, quae *og*, *oi* et *oh* aequetur.

Corollarium

21. Datum arcum unius circuli in arcum alterius circuli resolvere.

Hoc fit resolvendo ipsum primo in rectam, deinde rectam in arcum alterius modo praemisso.

Corollarium

22. Angulos, qui se habent ut datae lineae, assignare.

Hoc fit in resolvendo lineas in arcus eiusdem circuli et a centro sectores ad fines talium arcuum trahendo.

Corollarium

23. Quae est habitudo semidiametri ad semidiametrum minus sagitta, illa est tertiae arcus ad excessum, quo chorda duas tertias arcus sui excedit (cfr. figura 9). Puta sit *bc* chorda quadrantis, et in illa per praemissa signasti duas tertias arcus, scilicet *cd* et *de*. Dico quod habitudo *de* tertiae arcus ad *eb* excessum, quo chorda duas tertias excedit, est sicut semidiameter ad semidiametrum minus sagitta. Patet corollarium ex praemissis. Et habet veritatem in maximo et minimo orthogonio et in omnibus mediis.

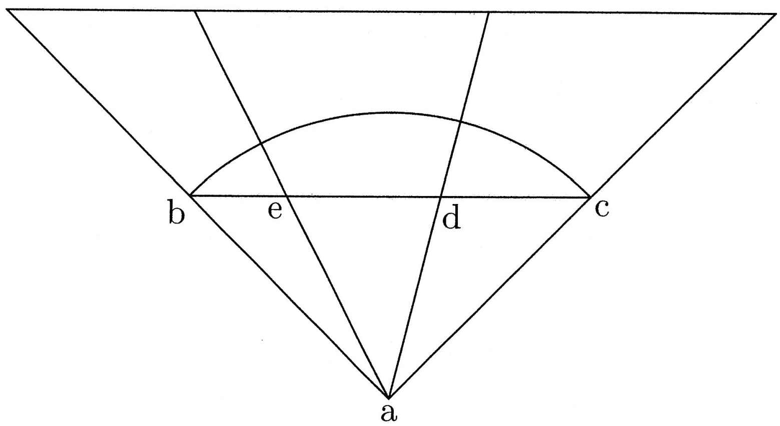


fig. 9

Corollarium

24. Chordam dati arcus partis aliquotae semicirculi assignare.

Puta tu vis ex scientia chordae quadrantis scire chordam arcus, qui est medietatis quadrantis. Tu nosti partem chordae quadrantis, quae aequatur tertiae arcus, et recipis medietatem illius et addis ei similem, et quaeris excessum, qui se habeat ad unam tertiam sicut semidiameter minus sagitta ad semidiametrum.

25. Subiciam adhuc curiosa corollaria.

Si tres semidiametri minus sagitta erunt triplae ad chordam, erit arcus ut semidiameter.

Si erunt duplae ad chordam, arcus se habebit in proportione sesquialtera ad semidiametrum.

Tres semidiametri sunt medium proportionale inter tres semidiametros minus sagitta et semicirculum.

Si tres semidiametri minus sagitta fuerint multiplices ad chordam, sic erunt et tres semidiametri minus sagitta ad chordam medietatis arcus et cuiuslibet partis aliquotae proportionabiliter.

Tria latera trigoni aequilateri erunt ut circumferentia circuli illius, cuius diameter est tertia pars duorum laterum et lineae rectae de uno latere ad medium lateris sibi oppositi.

26. Si a centro tres lineae ducantur, una per principium chordae quadrantis aut minoris arcus, alia per medium, tertia per finem, quae in linea aequedistanti chordae terminentur, ita quod illarum trium linearum habitudo ad chordam sit ut circumferentiae ad arcum, tunc linea ducta per principium chordae triplicata est aequalis circumferentiae.

Arcus aequalis tribus quartis diametri excedit chordam suam in medietate sagittae.

Diameter circuli est aequalis duabus tertiis laterum trigoni isoperimetri et semidiametro circuli eidem trigono inscripti.

Excessus semicirculi super duas chordas quadrantis est ut excessus diametri quadrati aequalis tertiae parti eius super suam costam.

Habitudo trium diametrorum circuli ad suam circumferentiam est ut 14 cum radice de 36 et 3/4 ad 21.

Scientia chordarum nunc exstat perfecte adinventa.

Scientia quadraturae circuli suum finem sortita existit. Secundum datarum linearum habitudinem sive commensurabilium sive incommensurabilium lineas et superficies rectas et curvas atque corpora dari docet haec ars perfectissima.

Adhuc ex coincidentia minimae contingentiae et minimi arcus propositionem recipio, quae est talis:

Propositio

27. Si ponitur secundum latus orthogonii semidiameter circuli et tertium linea contingens circulum vel e converso, et descriptus fuerit circulus, quae erit habitudo contingentis ad arcum, qui cadit intra orthogonium, illa et rectae atque curvae superficierum (cfr. figura 10).

Ut si orthogonius fuerit *abc* et *bc* contingens et *ab* semidiameter circulo descripto, cuius *bd* portio cadit intra orthogonium, quae est *bc* ad *bd*, illa *abc* rectae superficiei ad *abd* curvam superficiem.

Probatio huius est: Quia cum sic sit in minimo, si dari posset, igitur et in omnibus, cum non referat, utrum orthogonius sit maximus vel non.

28. Datam superficiem ex arcu et sectoribus constitutam in orthogonium resolvere.

Ut sit *abc*, resolvatur *bd* arcus in rectam, quae sit *bc*, et claudatur orthogonius per *ac*. Et ita habes, sive *bc* sit ad circumferentiam proportionabilis sive non, quomodo in rectam

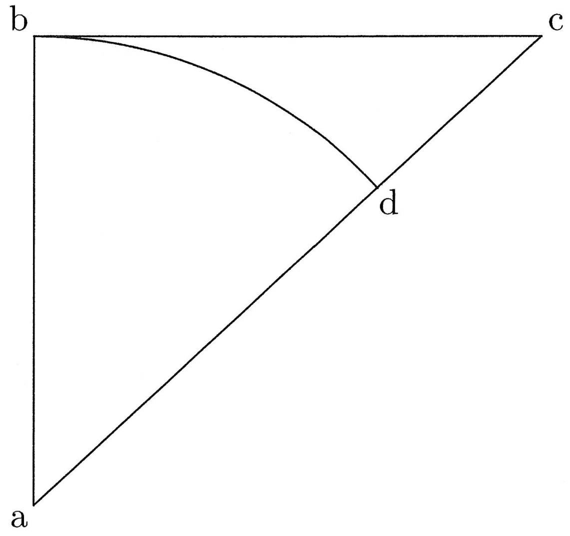


fig. 10

superficiem redigatur. Et habes, quomodo circulum in orthogonium resolvis et demum in quadratum seu aliam figuram.

29. Datam superficiem rectam in portionem circularem resolvere.

Ex praemissis patet, quod si est orthogonius, quomodo hoc fiat; si non est, redigatur in orthogonium.

Abscisiones ex chorda et arcu in rectas aut circulares resolvere, de se patet.

30. Abscisionum sphaerae habitudo curvae superficiei ad rectam basis est ut linea de cenit ad centrum basis cum semidiametro basis ad ipsam semidiametrum.

Patet, quia in minima abscisione, ubi recta superficies coincidit cum curva et cenit cum centro, ita est; ideo in omnibus.

Curva superficies medietatis sphaerae est dupla ad rectam circuli basis.

Datam curvam sphaerae superficiem in rectam resolvere, circularem et rectilinealem.

Sphaeram in cubum et cubum in sphaeram resolvere.

Simili modo in aliis curvis superficiebus ad minima respiciendo habitudines elice. Et quidquid scibile est humanitus in mathematicis, mea sententia hac via reperietur.

Deo laus.

R. D. N. Cardinalis S. Petri in mathematicis aurea propositio

Traduzione italiana a p. 303.

1. Sive tres lineae a centro egressae angulos aequales semirectos aut minores constituentes per arcum seu chordam terminentur, eandem ad terminantem tenent habitudinem (cfr. figura 1).

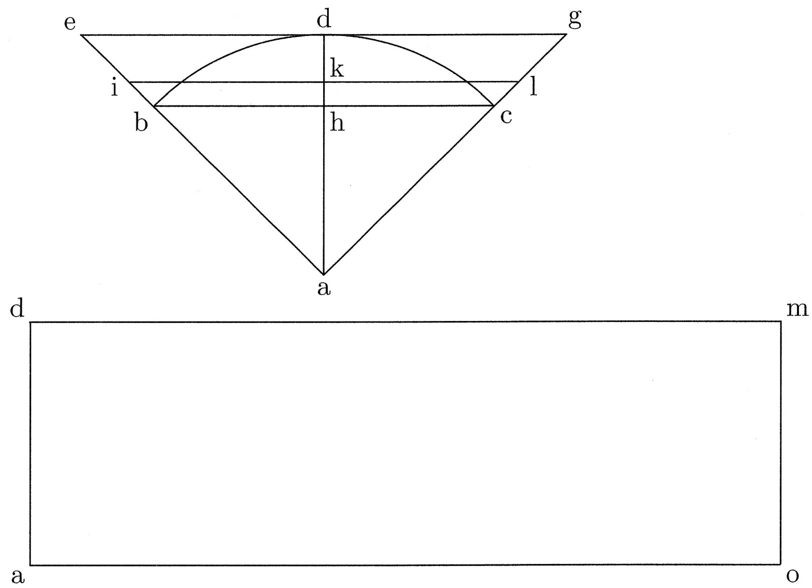


fig. 1

Uti si de *a*, centro *bdc*, indefinitae quantitatis lineae egrediantur, duos aequales circa *a* angulos semirectos seu minores constituentes, per alicuius circuli arcum, puta *bdc*, aut eius chordam, scilicet *bhc*, sive contingentem, puta *edg*, terminentur: eandem teneant tres lineae *ab*, *ad* et *ac* ad arcum terminantem habitudinem quam *ab*, *ah* et *ac* ad *bhc* terminantem, sive *ae*, *ad* et *ag* ad *edg* terminantem. Quod idemestac si diceretur: Sicut *bdc* arcus est quadrans et tres lineae *ab, ad* et *ac* sunt tres semidiametri eius, sic *edg* est aequalis alicui quadranti et *ae, ad* et *ag* aequantur tribus semidiametris circuli eius.

2. Ratio huius, quoniam si arcus *bdc* deberet in rectam, cuius extrema aequedistant ab *a* centro, inter lineas de *a* per *b* et de *a* per *c* egredientes cadentem extendi, necesse foret extrema cum medio simul tam rectae quam arcus aequedistare ab *a* centro. Si enim extrema aequedistarent, tunc medium rectae minus distaret quam medium arcus ab *a* centro, et recta foret minor arcu, ut in chorda *bhc*. Et si media aequedistarent, tunc extrema rectae plus distarent ut in contingente *edg*, ideo ipsa maior arcu *bdc*. Oportet igitur, quod quantum medium arcus, dum extenditur, descendit ad centrum, quod tantum extrema ascendant a centro, ut in *ikl*, ubi medium arcus in extensione de *d* descendit in *k*, et *b* et *c* extrema ascendunt in *i* et *l*; et extremorum ascensus aequatur descensui medii, ita quod extrema cum medio rectae simul aequedistant ab *a* centro, sicut extrema simul cum medio *bdc* arcus. Unde si non foret aequedistantia talis, recta non aequaretur illi arcui, sed simili maioris circuli, si maior distantia a centro, vel minori, si minor.

3. Et quia, quanto circulus maior est, tanto arcus rectae similior, ideo videt mens, si infinite maximus circulus signabilis foret, arcum esse et rectam et haec, quae dicta sunt ibi atque propositionem veram. Et quoniam stante eodem angulo circa centrum eadem est habitudo terminantium et terminatarum, ideo id, quod in maximo videt mens verum, in omnibus pariformiter verum esse conspicit. Propositio igitur illis et aliis innumeris modis verissima conspicitur.

4. Ratio, cur propositio de duobus semirectis, qui rectum angulum faciunt, et minoribus et non universaliter de omnibus angulis loquitur, haec est, quia a minimo arcu et portione circuli usque ad quadrantem triangulus ex orthogoniis compositus et portioni circuli inscriptus continue augetur et fit maximus in quadrante, post minuitur. Et ideo non potest propositio aeque vera esse arcu cum portione et triangulo crescente atque arcu cum portione crescente et triangulo decrescente.

5. Patet faciliter omnem arcum rectilineari posse. Nam si tres lineae in recta terminatae sunt pars aliquota trium semidiametrorum, recta talis erit aliquota arcus, curva tamen superficies est capacior recta. Sic si tertiam partem trium terminatarum in recta sumpseris et semidiametrum feceris describendo arcum, ille rectae aequabitur, et universaliter arcum in rectam et rectam in arcum vertes et arcum unius circuli in arcum alterius (cfr. figura 2).

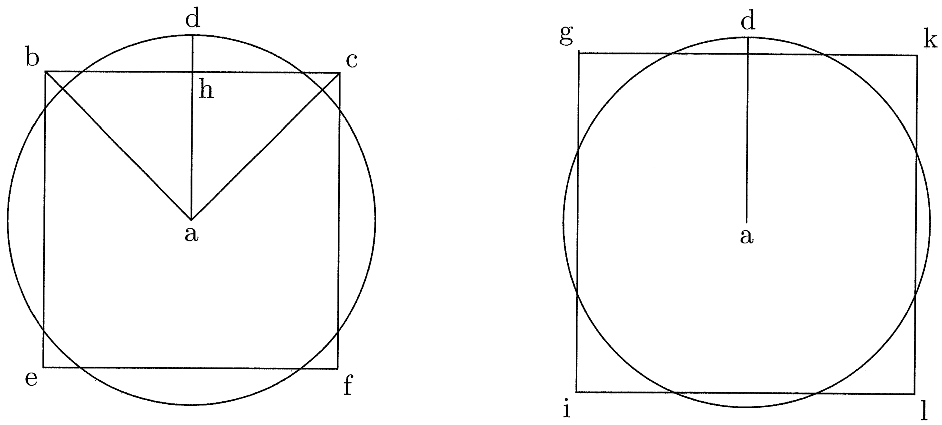


fig. 2

6. Constat etiam, quod anguli dari possunt, qui se habent ut costa et diameter quadrati et universaliter sicut dabiles lineae, ita et superficies et corpora. Habes etiam innumerabiles modos circulum rectilineandi, quadrangulandi et quadrandi. Sic de qualibet portione circuli commensurabili circulo vel incommensurabili. Patescunt etiam ignota de sinibus et chordis. Haec omnia hactenus in mathematicis incognita et quaeque mathematice scibilia cum infinitis inauditis corollariis ad hoc datis quaerentes reperient.

7. Altius se elevantes vident aequalitatem habitudinis esse medium transmutationis atque transitus de contrario in contrarium, et quid mysterii habet, quod tres lineae a puncto egredientes aut terminantur in uno arcu, et sunt omnes aequales, aut in recta, et extremae sunt aequales et media inaequalis usque ad incommensurabilitatem, sicut costa est et diameter quadrati. Et diversitas terminationis diversificat superficies, ut una sit curva, alia recta, manente eadem habitudine terminantium, quae linearum ex eodem puncto et modo aequali egredientium. Nec hoc citra nec ultra trinitatem linearum, quae non ut separa-tae, sed ut una simplex longitudo considerantur, verum esse potest. Circa unitrinum igitur principium et rerum ab eo effluxum versabitur altissima sapientis speculatio.

Finit Romae 1459 8. Augusti, tempore legationis urbis etc.

Appendix
‹Magister Paulus ad Nicolaum Cusanum Cardinalem›

Traduzione italiana a p. 307.

1. Capacitates omnium polygoniarum isoperimetrarum ad invicem et ad circulum isoperimetrum eandem proportionem habent quam primae lineae unius ad primas lineas alterius et ad semidiametrum isoperimetrum. Similiter excessus capacitatis aliarum a triangulo supra triangulum in eadem proportione se habent ad capacitatem trianguli, quam habent excessus primarum linearum aliarum figurarum a triangulo ad primam trianguli lineam.

2. Verbi gratia: Sit prima trianguli *ab*, prima alterius figurae mediae ut quadrati *cd*, prima circuli sive semidiameter *ce*, sit *ac* semicircumferentia omnium istarum superficierum, quoniam sunt isoperimetrae (cfr. figura 1).

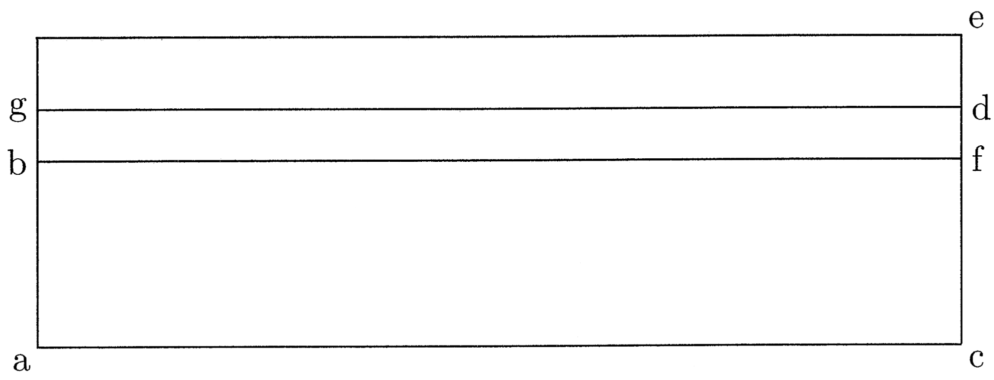


fig. 1

Erit superficies *ae* capacitas circuli, superficies *ad* capacitas figurae mediae ut quadrati, superficies *af* capacitas trianguli. Dico primo, quod qualis est proportio superficiei *ae* ad *ad* superficiem, talis est *ce* lineae ad *cd* lineam, et qualis proportio est *ad* superficiei ad *af* superficiem, talis est *cd* lineae ad *cf* lineam, per primam enim sexti Euclidis. Dictae superficies sunt eiusdem altitudinis, ergo suis basibus sunt proportionales. Eodem modo probatur de excessibus capacitatum, quia eaedem sunt proportiones de superficiebus *ge* et *bd* ad lineas *ed* et *df* vel de superficiebus *be* et *bd*, qui sunt excessus capacitatum circuli et quadrati supra triangulum, ad lineas *fe* et *fd*, qui sunt excessus primarum linearum circuli et quadrati supra primam trianguli. Haec clara sunt ex eadem prima sexti Euclidis. Quicquid ergo de capacitatibus corporum dicitur et capacitatibus excessuum, de ipsis primis lineis dici potest et de eorum excessibus.

3. Si a secunda extremitate primae circuli ad secundam trianguli linea recta ducatur aequedistanter basi, in ea proportione, qua dividet excessum secundae supra primam ipsius trianguli, in eadem proportione dividet excessus secundarum a primis omnium aliarum figurarum mediarum.

4. Sit supra extremitatem lineae *ac* erecta linea *ab*, quae sit prima circuli, et super alia extremitate dictae lineae *ac* sit erecta linea *cd*, quae sit secunda trianguli. Quia linea *ab* est minor linea *cd*, si a puncto *b* trahatur linea *be* aequedistans basi *ac*, perveniet ad lineam *cd* et dividet excessum secundae a prima, qui est *hd*, in quadam proportione *de* ad *eh*. Dico quod si prima et secunda alicuius figurae mediae describatur, ut *gi* prima et *gf* secunda, quod excessus secundae a prima, qui est *fi*, dividetur ab ipsa *be* linea in puncto *k* in eadem proportione, quae erit *fk* ad *ki* ductis lineis *db hb* ita, quod erit eadem proportio *fk* ad *ki*, quae *de* ad *eh*. Totus enim triangulus *dhb* divisus est per aequedistantem basi *fi*. Erit ergo proportio *eb* ad *kb* sicut *dh* ad *fi*, et eadem proportio erit *de* ad *kf* et *eh* ad *ki* propter similitudinem triangulorum sicut *eb* ad *kb*. Sicut ergo *de* ad *fk*, ita *eh* ad *ki*; permutatim ergo sicut *de* ad *eh*, ita *fk* ad *ki*. Ergo illi excessus proportionabiliter sunt divisi, quod fuit probandum (cfr. figura 2).

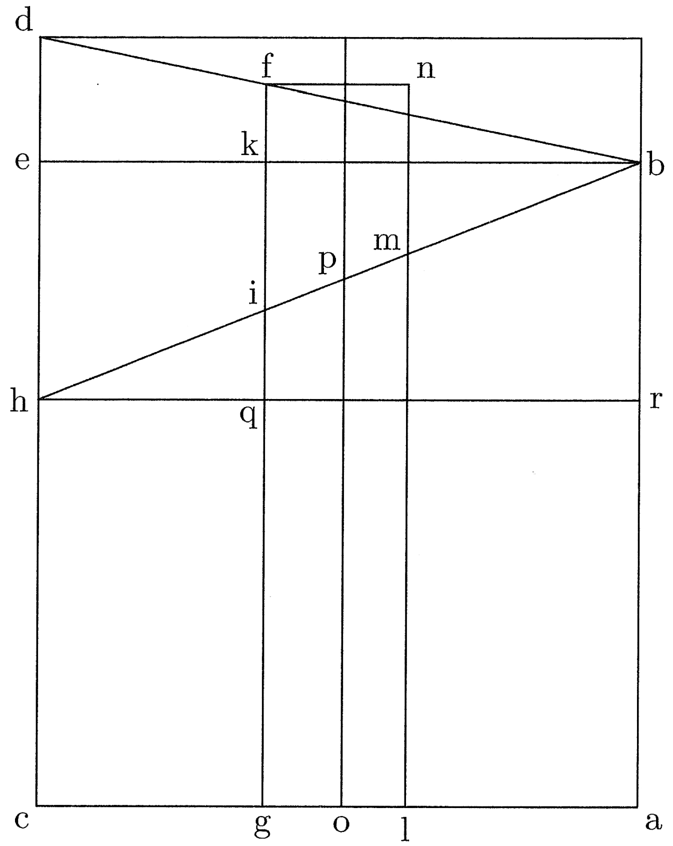


fig. 2

5. Forte dicitur, quod si *gf* est secunda unius figurae mediae, quod *gi* non erit prima. Erit ergo prima eiusdem figurae aut maior *gi* aut minor. Sit primo maior, et sit *lm*. Quam extendo sursum usque ad *n*, ita quod *ln* sit aequalis *gf*, et traho lineam *fn* aequedistanter basi propter eandem longitudinem duarum linearum *gf* et *ln*. Inter duo ergo puncta *g*, *l* sunt signandae plures primae et secundae lineae figurarum mediarum. Signetur una, et sit *op* prima, qua extendatur usque ad secundam eiusdem figurae. Aut proveniet infra lineam *fn* aut in ipsa linea aut supra. Non infra ipsam nec in ipsa, quia est secunda figurae minoris capacitatis; ergo deberet esse longior. Non tamen potest poni longior, quia *gf* est posita inter figuras minoris capacitatis et esset brevior, quod est impossibile, quia non diminuendo procederem secundae lineae versus capaciores figuras incedendo, quod est impossibile. Eodem modo dicetur impossibile sequi, si dicatur, quod prima eius erit minor *gi*. Cum ergo nec maior nec minor dici potest, ipsa *gi* erit prima, quia omnes excessus secundarum a primis in eadem proportione dividentur, quod fuit probandum.

6. Haec videtur declaratio undecimae conclusionis vestrae, in qua pendet tota demonstratio quadraturae. Nam qualis est proportio *hq* ad *qi*, talis est *hr* ad *rb*. Istarum autem quattuor linearum proportionalium tres primae sunt notae: *hq* prima, quia subtractio sagittae quadrati vel alterius mediae a sagitta trigoni; *qi* secunda est etiam nota, quia excessus primae tetragoni a prima trigoni; tertia etiam est nota *hr*, quia sagitta trigoni. Si ergo multiplices *hr* in *qi* et dividas per *hq*, habetur *rb* nota, quae adiuncta primae trigoni *ra* erit *ab* nota prima circuli sive semidiameter, quod intenditur. Sed non video, cur duae lineae *hb* et *bd*, concludentes omnes illos excessus primarum et secundarum, non possent esse curvae omni genere curvitatis, et tunc non procederet demonstratio. Erit enim illud, quod in decima tua conclusione dixisti, quod primae capaciorum erunt semper maiores et secundae minores.

7. Haec volo mihi in praesenti sufficiant. Multa habeo, quae me movent, quod istae coincidentiae sive intensiones et remissiones formarum non per lineas rectas signari debeant, ut moderni ponunt, sed in aliud tempus reservo. Vale.

8. Detur venerabili nostro fideli dilecto magistro Georgio Peurbachio Astronomo.

Traduzione italiana

Le trasformazioni geometriche

Versione originale latina a p. 59.

1. A Paolo, [figlio] del maestro Domenico, fisico fiorentino, uomo eccellente e dottissimo, il libro sulle trasformazioni geometriche del cardinale Niccolò da Cusa[1].

2. Sebbene gli antichi dotati di grande ingegno abbiano tentato, attraverso una diligente ricerca, di conoscere e trasmettere ai posteri molte cose un tempo oscure, e abbiano fatto utili progressi in molte delle arti più importanti e più nobili, tuttavia, nelle riflessioni più profonde, non hanno raggiunto tutto ciò che desideravano. Il sommo protettore di tutte le cose ha prestabilito questo universo affinché in noi la forza divina di comprendere non si indebolisse, ma fosse rivolta con interesse ancor più vivo a quelle cose che sono nascoste, ma accessibili alla conoscenza. E certamente più forte è la passione con cui siamo spinti ad esplorare ciò che è oscuro, maggiore è la tranquillità con cui ci compiaciamo della potenza della nostra mente. Tuttavia, tra le questioni che sono state d'ostacolo alle faticose speculazioni geometriche, ce n'è una che è rimasta sconosciuta a tutti quelli il cui spessore intellettuale è stato particolarmente apprezzato dai libri a noi tramandati, ossia la possibilità di stabilire un'uguaglianza tra ciò che è retto e ciò che è curvo[2] o la loro reciproca trasformazione. A causa dell'impossibilità dell'impresa e per il fatto che la natura ripugna la coincidenza di un'opposizione tanto grande, alla maggior parte di coloro che si sono dedicati a questa ricerca, dopo immensi sforzi, è sembrato che fosse a noi negata la via per giungere a tale conoscenza. Io, invece, pensando che la difficoltà di questa ricerca stesse piuttosto nella debolezza della [mia] conoscenza e nell'incostanza della [mia] attenzione, non avendo un acume particolarmente spiccato tra coloro che vi si dedicano – acume che l'oscurità dell'argomento richiede –, nel tempo libero che avevo a disposizione mi sono dedicato alla nuova arte[3], affinché con essa potessi raggiungere ciò che cercavo, e, in vista di fini più elevati, ho faticato molto su di essa, finché ho trovato, tra tutte le mie riflessioni, la seguente facile soluzione. Tuttavia, poiché non potevo confidare nell'oscurità e nella debolezza del mio ingegno per comprendere un'arte così importante e finora sconosciuta, dalla quale non soltanto dipende la perfezione della trasformazione geometrica, ma si delinea anche un'introduzione a studi più elevati, ho deciso di ricorrere direttamente a te, esaminatore espertissimo e difensore zelante della verità, e di rivelare senza indugio il risultato della mia ricerca a un amico coltissimo, affinché esso sia valutato sulla bilancia del giudice più equilibrato. Pertanto, carissimo amico, anche se ti occupi di cose ben più impegnative, non disprezzare questo mio lavoro come rozzo e confuso; essendo corto, si legge velocemente e si comprende molto facilmente. Dunque, in nome dell'amicizia e

---

[1] *Le trasformazioni geometriche* e *I complementi aritmetici* sono dedicati a Toscanelli, cui Cusano riconosce la massima autorità scientifica. Sarà proprio Toscanelli a criticare aspramente il primo libro de *I complementi matematici*, e ciò spingerà il cardinale alla stesura del secondo libro de *I complementi matematici*. Cusano era stato presentato al medico e astronomo Toscanelli (cfr. Uzielli 1894) durante il periodo di studi a Padova e aveva ascoltato con lui le lezioni di Prosdocimo de' Baldomandi (cfr. Favaro 1879). Tra loro nasce una sincera amicizia, testimoniata, per esempio, dal fatto che, nel 1443, Toscanelli aveva dato a Cusano, attraverso la penna del generale camaldolese Ambrogio Traversari, la traduzione della *Theologia latina* dello Pseudo–Aereopagita. Sarà lo stesso Toscanelli ad accompagnare Cusano nel suo ultimo viaggio da Roma a Todi (cfr. Stinger 1977, 42–44ss.).

[2] Per «rectus» e «curvus» si intende una linea dritta e una linea curva.

[3] Qui «ars», di lulliana memoria, sta per sapere, conoscenza, metodo.

dell'affetto cordiale che ci lega così tanto e ininterrottamente dagli anni della gioventù e dell'adolescenza, ti prego ora di prestare massima attenzione alla correzione, e di non parlarne ad altri, se non dopo aver apportato le dovute correzioni.

3. Dopo innumerevoli tentativi nei quali mi sono sforzato – tuttavia sempre vanamente – di pervenire all'arte intrapresa[4], rivolgendo l'attenzione al principio di cui mi ero servito ne *La dotta ignoranza*[5], mi si è aperta la strada. Inoltre, l'arte che cercavo, oltre a ciò che è stato già tramandato in geometria, permette la trasformazione di ciò che è curvo in ciò che è retto e di ciò che è retto in ciò che è curvo. Poiché il rapporto tra queste grandezze non è esprimibile attraverso un numero razionale, è necessario che il segreto di tale rapporto si celi proprio nella coincidenza degli estremi. Poiché essa ha luogo nel massimo – com'è stato esposto altrove – e il massimo è il cerchio che non si conosce, si dimostra qui che lo stesso deve essere cercato nel minimo, che è il triangolo[6].

4. Ora, si chiamano poligoni tutte le figure con molti angoli, equilateri quelle che hanno lati uguali, isoperimetrici quelle che, avendo la stessa lunghezza dei lati, hanno lo stesso perimetro[7]; è evidente che, tra di essi, il triangolo ha l'ampiezza[8] minore. E, poiché un isoperimetrico è tanto più ampio quanto più angoli avrà, il cerchio sarà la figura con la superficie più ampia tra tutte quelle isoperimetriche[9]. A questa, tuttavia, non si può arrivare moltiplicando gli angoli[10], così come non si può determinare il massimo numericamente. Dunque, nessun poligono può avere con la figura circolare isoperimetrica un rapporto esprimibile attraverso un numero razionale.

5. Ma, poiché la differenza di ampiezza tra le figure isoperimetriche corrisponde alle differenze [dei semidiametri] dei cerchi inscritti ad esse[11], come è stato già precedentemente osservato, allora né il cerchio inscritto, che è sempre minore, né il cerchio circoscritto, che è sempre maggiore, avrà con il cerchio isoperimetrico un rapporto esprimibile attraverso un numero razionale[12]. Ma i semidiametri di questi cerchi, di cui abbiamo parlato, sono massimamente disuguali nel triangolo, [dove la differenza è massima], mentre sono progressivamente meno disuguali negli altri [dove la differenza diminuisce]; men-

[4] Cfr. Cusanus 1972b, II, 2, 82.

[5] Cfr. Cusanus 1972a, I, 3, 9; Cusanus 1982, 26, 79, 1–3; Cusanus 1988a, I, 15, 6–9.

[6] Cfr. Cusanus 1972a, I, 4, 11.

[7] Sebbene, qui come altrove, Cusano abbia in mente i poligoni regolari, di essi il cardinale considera solo l'uguaglianza dei lati, non anche quella degli angoli; cfr. Cusanus 2010i, 8, 8–11. La stessa restrizione si ritrova in Busard 1980, 1, 6. Bradwardine 1495a, II, 4, concl. 4 e 5 introduce il termine «isoperimetrico» nella conclusione 1; nella conclusione 2 richiama l'attenzione sul rapporto tra l'incremento della superficie e quello del numero di angoli di un poligono, e, nelle conclusioni 3 e 4, i poligoni sono pensati sempre come regolari. Stessa considerazione si trova in Cusanus 2010i, 8, 8–11. Cfr. Hofmann e Hofmann 1980, nota 4, 190–191.

[8] Il termine «capacitas» è qui tradotto con ampiezza; per rispettare al meglio lo spirito del linguaggio cusaniano, a differenza sia di J. E. Hofmann che traduce «capacitas» con «Fläche» (cfr. Hofmann e Hofmann 1980, 54), sia di J.M. Nicolle che traduce il termine latino con «Surface» (cfr. Nicolle 1998, 7), si è preferito qui differenziare i due termini (*capacitas* e *superficies*), utilizzati entrambi da Cusano, rendendo il latino *capacitas* a volte con ampiezza, altre volte, a seconda del contesto, con estensione o superficie. In linea di massima sembra che Cusano utilizzi il termine *capacitas* per indicare l'ampiezza in generale, mentre fa uso del termine *superficies* quando intraprende costruzioni geometriche specifiche o discorsi che comportano una misurazione.

[9] Cfr. Bradwardine 1495b, II, 5, concl. 5. Sul tema, cfr. Gericke 1982, 160–187; Di Meglio 2010, 15–21; Heath 1921, 2019–2111; Porter 1933.

[10] Cfr. Cusanus 1972a, I, 3.

[11] Qui si presuppone tacitamente la formula dell'area $f_n = \frac{(u\rho_n)}{2}$, esplicitata più avanti.

[12] La conclusione è che: a $f_n = \frac{(u\rho_n)}{2}$ appartiene l'inscritto $\rho_n^2\pi$ e al circoscritto $r_n^2\pi$. Poiché f_n si rapporta a $f = \frac{ur}{2}$ non in una proporzione razionale, allora neanche $\rho_n^2\pi$, o meglio $r_n^2\pi$, a $r^2\pi$.

tre nel cerchio essi coincidono, poiché, in questo caso, l'inscritto, il circoscritto e la circonferenza coincidono. Bisogna cercare attraverso quale arte vogliamo arrivare a quella coincidenza e a ciò che ci siamo proposti.

6. Ora, per giungere all'arte cercata, sembra che sia necessario: in primo luogo, che a una data retta sia data una curva uguale[13]; in secondo luogo, che il rapporto tra una curva e l'altra sia lo stesso di quello tra una retta e l'altra; in terzo luogo, che, tra linee date, se ne assegnino due proporzionali; in quarto luogo, che, secondo il rapporto di due rette date, si sappia che a una terza data si dà una quarta[14]. Il primo punto è stato sin qui sconosciuto, il secondo non è stato ancora esaminato, il terzo è stato trattato da pochi in modo confuso[15], il quarto è stato chiaramente spiegato da molti. In questi quattro punti è racchiuso tutto ciò che è utile all'arte della trasformazione, come cercherò di spiegare negli esempi qui sotto riportati, grazie alle seguenti premesse che sono necessarie a tale scopo.

Prima premessa

7. Tutti ammettono che sia possibile che una linea curva non sia né maggiore né minore di una linea retta data, ma non tutti affermano che essa possa essere trovata. Dunque, è possibile che la circonferenza di un qualsiasi cerchio non sia né maggiore né minore del perimetro di un dato poligono, così che queste figure risultino isoperimetriche. Ma come si possa ottenere ciò, è appunto quello che vogliamo indagare[16].

8. Poiché il cerchio circoscritto a un poligono equilatero, ossia equiangolo[17], è tanto maggiore quanto meno angoli il poligono ha – e quello inscritto tanto minore –, allora nessuno può negare che ogni cerchio inscritto a un poligono equilatero è minore del cerchio isoperimetrico e che ogni cerchio circoscritto è maggiore. Di conseguenza, poiché l'isoperimetrico cade tra l'inscritto e il circoscritto, esso ha un semidiametro maggiore di ogni semidiametro di qualsiasi cerchio inscritto a un qualsiasi poligono isoperimetrico e minore del semidiametro del circoscritto[18]. Dopo tanti procedimenti ben più difficili, ciò che cerchiamo si paleserà invece come la semplice conseguenza di questa proposizione.

9. Il semidiametro del cerchio isoperimetrico al triangolo inscritto si rapporta alla linea tracciata dal centro del cerchio, al quale il triangolo è inscritto, al punto che segna la quarta parte del lato [del triangolo] secondo un rapporto di 5 a 4[19].

10. Intorno al centro *a* si descriva un cerchio, nel quale è inscritto il triangolo BCD, con il lato *bc* diviso in quattro parti uguali attraverso [i punti] *e, f, g*; dico che, se si prolunga la linea tracciata da *a* a *e* di un quarto della sua lunghezza, ottenendo così *ah*, allora questa sarà il semidiametro del cerchio la cui circonferenza è uguale [alla somma dei] tre lati del triangolo[20](cfr. figura 1).

---

[13] Il termine «aequalis» indica un'uguaglianza in generale e Cusano lo utilizza sia nel caso di uguaglianze tra lunghezze (come in questo caso), sia per indicare un'uguaglianza tra aree, ossia un'equivalenza.

[14] Cfr. Euclides 1883–1888, VI, 12.

[15] Cfr. Clagett 1964–1984a, III, 19ss.

[16] Cfr. Cusanus 2010c, 2–6.

[17] Come in precedenza, Cusano utilizza «isopleur» come sinonimo di equilatero.

[18] La stessa esposizione si trova in Cusanus 2010j, 3; Cusanus 2010i, 4–8.

[19] Questo testo si ritrova, con piccole modifiche, in Cusanus 2010c, 2.

[20] Cusano pone, senza dimostrazione, questa proposizione fondamentale che costituirà l'oggetto principale di tutte le successive discussioni. Egli pone un punto *e* tale che, se si fa passare per *e* un raggio *ah* che misura $\frac{5}{4}$ di *ae*, si ottiene il raggio di un cerchio isoperimetrico al triangolo BCD. $ah = ae + \frac{1}{4}ae$. Ciò dà un'approssimazione di π uguale a $\frac{72}{(5\sqrt{21})} \cong 3,1423$. Secondo Hofmann, se si pone *u* come perimetro del triangolo, si ha $bc = \frac{u}{3}$, $af = (\frac{u}{18})\sqrt{3}$; $fe = \frac{u}{12}$; $ae = \frac{(u\sqrt{21})}{36}$; $ah = \frac{5}{4}ae$. Questi valori sono ottenuti

11. Ciò può essere provato molto facilmente in questo modo. Infatti, è chiaro che la linea tracciata da *a* a *f* sarà il semidiametro del cerchio inscritto, e precisamente la più piccola di tutti i cerchi inscritti ai poligoni isoperimetrici; e, nello stesso modo, la linea tracciata da *a* a *b* sarà il semidiametro del cerchio circoscritto, e precisamente la più grande di tutti i cerchi circoscritti ai poligoni isoperimetrici.

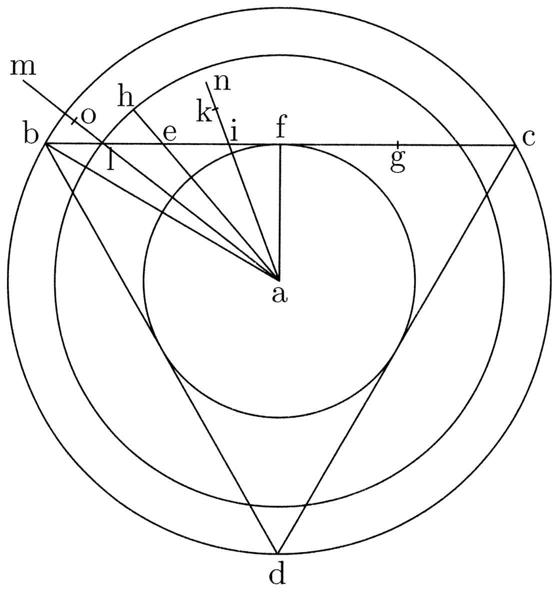


fig. 1

Se tracci una linea da *a* a *i* (vicino a *f*) e la prolunghi secondo il rapporto del segmento[21] *if* sul lato di *bc*, ottenendo così *ak*, è chiaro che essa sarà minore del semidiametro del cerchio isoperimetrico, essendo quest'ultimo il più grande di tutti i semidiametri dei cerchi inscritti ai poligoni isoperimetrici. Analogamente, se si prolunga la linea tracciata da *a* al punto *l* (vicino a *b*) secondo il rapporto del segmento di *lf* su *bc*, ottenendo così *am*, è chiaro che essa sarà maggiore di quella cercata, poiché quella che cerchiamo è la più piccola di tutti i ‹semi›diametri dei cerchi circoscritti ai poligoni isoperimetrici. Si può, pertanto, tracciare una linea da *a* verso qualsiasi punto tra *l* e *i* che, prolungata secondo il rapporto del segmento che cade tra questo punto e *f* sul lato *bc*, sarà uguale alla linea che cerchiamo[22].

---

applicando il teorema di Pitagora al triangolo BCD. Di conseguenza, $ah = \frac{(5u\sqrt{21})}{144}$; poiché *ah* è posta come il semidiametro del cerchio isoperimetrico al triangolo BCD, si ha l'uguaglianza seguente: $u = 2\pi ah$, da ciò, $\pi = \frac{u}{(2ah)}$ e, di conseguenza, $\pi = \frac{72}{(5\sqrt{21})} \cong 3,1423$, un valore compreso tra i limiti di Archimede $3(\frac{10}{71}) = 3,1409$ e $3(\frac{1}{7}) = 3,1429$.

[21] Il termine latino è «portio», che, negli scritti matematici, Cusano utilizza per indicare sia porzioni di linea retta (segmenti) sia porzioni di linea curva (principalmente archi) sia porzioni di superficie (settori circolari o segmenti di cerchio).

[22] Il ragionamento è il seguente: se $\frac{(ak-ai)}{ai} = \frac{if}{bc}$, allora la linea è troppo piccola. Se $\frac{(am-al)}{al} = \frac{lf}{bc}$, la linea è troppo grande. Esiste allora un punto compreso tra *i* e un ipotetico *p* tale che: $\frac{(ah-ap)}{ap} = \frac{pf}{bc}$, dove *ah* è il semidiametro del cerchio isoperimetrico al triangolo. Come si legge in Hofmann e Hofmann 1980, nota 16, 192, se poniamo $af = \rho_3 =$ raggio del cerchio inscritto; $a = r =$ raggio isoperimetrico e $ab = r_3 =$ raggio del cerchio circoscritto al triangolo equilatero, si ha che $\rho_3 < r < r_3$. Di conseguenza si dà una posizione precisa di *ah* nel campo angolare *fab* tale che *h* viene a trovarsi fuori del triangolo rettangolo

12. Allo stesso modo, se si prolunga la linea *ai* secondo il rapporto di *ib* su *bc*, ottenendo così *an*, è chiaro che questa sarà minore di quella che cerchiamo. E ancora, se si prolunga *al* secondo il rapporto di *lb* su *bc*, ottenendo così *ao*, è certo che essa sarà maggiore di quella che cerchiamo. C'è, quindi, un punto tra *l* e *i* verso cui si traccia la linea da *a*, tale che, prolungando la linea secondo il rapporto del segmento che si trova tra questo punto e *b* sul lato *bc*, essa sarà uguale a quella che cerchiamo. Da qui, trovato il punto, per esempio *i*, verso cui si traccia una linea da *a*, se si prolunga quest'ultima secondo il rapporto di entrambi i segmenti (verso *b* e verso *f*) sul lato del triangolo, allora essa resta minore; e si trova un altro punto, per esempio *l*, verso cui è tracciata una linea, che, prolungata secondo il rapporto dell'uno o dell'altro segmento sul lato del triangolo, risulterà sempre maggiore di quella che cerchiamo. Così, ci sarà un terzo punto, verso cui è tracciata una linea da *a*, che, prolungata secondo il rapporto di qualsiasi segmento sul lato del triangolo, non sarà né maggiore né minore di quella che cerchiamo. È chiaro che questo punto non può che essere *e*, poiché soltanto in esso il prolungamento secondo i rapporti dell'uno e dell'altro segmento può essere lo stesso[23].

13. Potrai anche dire che, se la linea *ai* si prolunga secondo il rapporto di *fi* su *bc*, essa è minore, e, analogamente, se viene prolungata secondo il rapporto del quadrato di *if* sul quadrato di *bf*, essa è minore. E se *al* si prolunga secondo il rapporto di *lf* su *bc*, essa è maggiore; analogamente, se viene prolungata secondo il rapporto del quadrato di *lf* sul quadrato di *bf*, essa è maggiore. Ci sarà, dunque, un punto tra *l* e *i* tale che la linea tracciata dal centro *a* a questo punto e prolungata secondo i due rapporti già menzionati non sarà né maggiore né minore [di quella cercata] e questo punto è necessariamente *e*.

14. Potrai ancora aggiungere un terzo rapporto: se *ai* si prolunga secondo il rapporto del quadrato di *if* sul quadrato di *bf*, secondo il rapporto di *if* su *bc* e secondo il rapporto di *bi* su *bc*, essa sarà sempre minore, e prolungando *al* secondo quei rapporti, essa sarà maggiore. Ci sarà, dunque, un punto tale che la linea tracciata dal centro *a* verso tale punto e prolungata secondo quei tre rapporti non sarà né maggiore né minore di quella cercata e questo è il punto *e*, equidistante da *b* e da *f*[24].

15. Ciò può essere tuttavia dimostrato anche in questo modo: è chiaro che in tutti i poligoni isoperimetrici la linea tracciata dal centro al punto medio del lato è il semidiametro del cerchio inscritto; e quanto maggiore è l'ampiezza del poligono, tanto più la linea si

AFB e *ah* interseca il cateto *fb* in un punto *e* tra *f* e *b*. Ora *e* taglia il segmento *ah* in un rapporto, che Cusano identifica con un numero intero e che spera di individuare esaminando i valori intermedi. A questo scopo egli cerca il rapporto $\frac{eh}{ae} = \frac{ef}{bc}$, che può essere preso come punto di partenza della riflessione. A questa relazione bisogna restar fedeli anche quando *e* è sostituito con un altro punto compreso tra *f* e *b*, per esempio con «*i* vicino a *f*» o con «*l* vicino a *b*», ma in questi casi non risulterà più il raggio isoperimetrico sul prolungamento del segmento, ma un segmento più piccolo vicino a *f* e più grande vicino a *b*. Cusano fissa la corretta posizione di *e* attraverso una costruzione intermedia.

[23] Cfr. Cusanus 2010c, 24. Qui Hofmann introduce nel testo della sua traduzione un simbolismo che tuttavia, come nota Nicolle 2007, nota 7, 15, è estraneo ai matematici dell'epoca. Non soltanto Cusano redige letteralmente i rapporti proporzionali, ma ignora la scrittura esponenziale del quadrato. Cusano fa il medesimo ragionamento sul lato di *b* e non più su quello di *f*: se $\frac{(an–ai)}{ai} = \frac{ib}{bc}$, allora la linea è troppo piccola; se $\frac{(ao–al)}{al} = \frac{lb}{bc}$, allora la linea è troppo grande. Esiste allora un punto compreso tra i e l (p') tale che: $\frac{(ah–ap')}{ap'} = \frac{p'b}{bc}$. E' "evidente" che $p = p'$ perché non c'è che un cerchio isoperimetrico al triangolo *BCD*. Si ha dunque: $\frac{(ah–ap)}{ap} = \frac{pf}{bc} = \frac{pb}{bc}$, e di conseguenza p non può essere che il punto e. In questo caso si ha $\frac{(ah–ae)}{ae} = \frac{eh}{ae} = \frac{ef}{bc} = \frac{eb}{bc} = \frac{1}{4}$; $ah - ae = \frac{1}{4}ae$ e si ottiene $ah = ae + \frac{1}{4}ae = \frac{5}{4}ae$.

[24] Cusano fa lo stesso ragionamento con i quadrati. Se $\frac{(ao–al)}{al} = \frac{lf}{bc} = \frac{lb}{bc} = \frac{lf^2}{bf^2}$, allora la linea è troppo grande. Se $\frac{(ak–al)}{al} = \frac{lf}{bc} = \frac{lb}{bc} = \frac{lf^2}{bf^2}$, allora la linea è troppo piccola. Si cerca dunque un punto e tale che $\frac{eh}{ae} = \frac{eb}{bc} = \frac{ef}{bc} = \frac{ef^2}{bf^2} = \frac{1}{4}$.

avvicinerà al semidiametro del cerchio isoperimetrico; allo stesso modo, la linea tracciata dal centro all'estremità del lato è il semidiametro del cerchio circoscritto e sarà progressivamente tanto minore quanto più ampio sarà il poligono. Dunque, tra questi due punti, cioè, tra l'estremità e il punto medio del lato di un poligono, cade un solo punto tale che la linea tracciata dal centro e prolungata secondo il rapporto del quadrato del segmento compreso tra il punto d'intersezione e il punto medio del lato e il quadrato del semilato, o prolungata secondo il rapporto del segmento sul lato, sarà uguale al semidiametro del cerchio isoperimetrico. Su ciò non ci può essere alcun dubbio.

16. Capita tuttavia che nei diversi poligoni questo punto si trovi a una diversa distanza dagli altri due punti, vale a dire, dall'estremità e dal punto medio del lato: quanto più ampio è il poligono, tanto più ci si avvicina al punto medio del lato e ci si allontana dall'estremità. Pertanto nei poligoni più estesi questo punto si avvicina progressivamente alla metà del lato fino a coincidere con tutti e tre i punti nel poligono più ampio; analogamente, è necessario che nei poligoni meno ampi questo punto si allontani dalla metà del lato fino a raggiungere la massima distanza da questi due punti nel poligono minore. Di conseguenza, questo punto medio, che ha la stessa massima distanza dalle estremità, è il punto *e*, e, nel triangolo, che è la figura meno ampia, questo punto è ciò che si cercava. Perciò ogni semidiametro del cerchio circoscritto cade tra il centro *a* e qualche punto della linea *be* prolungata secondo i rapporti premessi del segmento prolungato verso *b*, e così *ae*, prolungata in questo modo, è la più piccola di tutte le altre linee; essa è il semidiametro del cerchio isoperimetrico, poiché è il più piccolo semidiametro di tutti i semidiametri dei cerchi che si possono circoscrivere, con cui coincide il semidiametro più grande dei cerchi che si possono inscrivere. Perciò nel punto *e* si realizza la coincidenza dei semidiametri dei cerchi inscrivibili che crescono da *f* verso *e* e i semidiametri dei cerchi circoscrivibili che decrescono da *b* verso *e*, una volta che sono stati apportati i prolungamenti secondo i rapporti premessi dei segmenti verso *b* da un lato e verso *f* dall'altro[25].

Seconda premessa

17. Ho già sostenuto precedentemente[26] che si deve premettere come si giunge al rapporto tra una retta e l'altra, e a quello tra una curva e l'altra, poiché, come dimostrerà ciò che segue, la perfezione dell'arte delle trasformazioni che cerchiamo non potrà essere ottenuta senza tener conto di quest'aspetto. E, per questa indagine, ho preso in considerazione un triangolo rettilineo[27] nel quale la linea tracciata dal segmento di un lato al corrispondente segmento di un altro lato sia parallela al [terzo] lato che chiude il triangolo, e stia a quest'ultimo nello stesso rapporto con cui il segmento del primo lato, da cui è stata tracciata la linea, sta all'intero lato. Volendo cercare in un arco ciò che ho trovato nel lato dritto, ho notato che se disegnassi il triangolo con un lato curvo e un altro dritto, allora non si potrebbe tracciare dalla parte del lato curvo al corrispondente segmento dell'altro lato alcuna linea che stia al lato dritto secondo il rapporto cercato, se il terzo lato fosse dritto. Infatti, se il lato curvo fosse convesso, è chiaro che una linea dritta tracciata dalla sua metà alla metà del lato dritto sarebbe maggiore della metà del lato dritto che chiude il triangolo. E se invece fosse concavo, la linea dritta tracciata dalla sua metà alla metà del lato dritto sarebbe necessariamente minore della metà del lato dritto che chiude il triangolo.

[25] Cusano passa dal triangolo equilatero a un poligono regolare isoperimetrico e afferma che $\frac{eh}{ae}$ decresce con l'aumentare del numero degli angoli. Per il suo svolgimento, cfr. Hofmann e Hofmann 1980, nota 19, 193.

[26] Cfr. Cusanus 2010b, 6, 2–3.

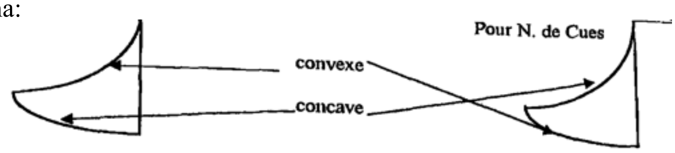
[27] Per «trigonum rectilineum» si intende un triangolo delimitato da linee (lati) dritte.

18. Se il [terzo] lato fosse curvo come l'altro, ossia convesso se è convesso o concavo se è concavo, la linea tracciata dal segmento corrispondente sarà maggiore o minore, proprio come nel caso precedente. Ma, se quello stesso lato fosse convesso, mentre l'altro è concavo ed entrambi appartenessero alla stessa circonferenza e fossero uguali, la linea tracciata attraverso i segmenti corrispondenti ai lati curvi serebbe necessariamente maggiore di quella che deve essere cercata secondo il rapporto. Infatti, se le corde fossero sottese agli archi, esse formerebbero lo stesso angolo dell'arco, e, se fossero corde di semiarchi, formerebbero di nuovo lo stesso angolo[28]. E poiché le corde dei semiarchi sono maggiori delle semicorde dell'arco intero, è evidente che la linea tracciata dalla metà [di uno] alla metà [dell'altro] sarà maggiore, a seconda dell'eccesso della corda del semiarco sul semiarco dell'arco intero.

19. È necessario dunque che l'altro lato sia più corto di quello curvo. Tuttavia quello concavo non può essere più corto. Infatti, se le corde fossero sottese a quegli archi, l'angolo compreso tra le corde sarebbe minore dell'angolo compreso tra gli archi e minore dell'angolo compreso tra le corde dei semiarchi. Da ciò, la linea tracciata da segmento a segmento sarebbe maggiore di quella richiesta. Di consequenza, è necessario che il triangolo che cerchiamo sia tale che, dei suoi tre lati, due siano curvi e di diversa lunghezza, cosicché il lato maggiore sia l'arco più grande della circonferenza e chiuda la superficie [del triangolo] in modo concavo, mentre l'altro [lato] minore sia l'arco più piccolo della stessa circonferenza e chiuda la superficie del triangolo stesso in modo convesso; il terzo lato sia dritto. Inoltre, se sottendi le corde a questi lati curvi, è necessario che l'angolo compreso tra le corde sia maggiore dell'angolo compreso tra gli archi, che l'angolo compreso tra le corde del semiarco sia maggiore dell'angolo compreso tra gli archi e minore dell'angolo compreso tra le corde degli interi archi interi, e precisamente, tanto minore quanto più le corde dei semiarchi eccedono le semicorde degli interi archi. E, ritenendo che con questa via sarebbe stato possibile che, dato il triangolo in questione, le linee tracciate dai segmenti fossero minori, maggiori o uguali a quelle che cerchiamo, ho suggerito di cercare un triangolo il cui lato dritto fosse il semidiametro del cerchio cui appartengono i lati curvi, e il lato curvo maggiore fosse un quadrante.

20. Ho descritto attorno al centro *a* il quadrante *bc* e, col piede fisso del compasso in *c*, ho descritto il semicerchio *ade* (cfr. figura 2). Ho diviso a metà l'arco *bc* nel punto *f* e ho descritto attorno a *f* il semicerchio *gh*, il cui semidiametro è uguale alla metà di *ac*. Attorno a *b* ho descritto il semicerchio occulto[29] *ik* e ho cercato nella sua circonferenza

[28] La difficoltà a comprendere questo passaggio deriva dalla diversa prospettiva tra la descrizione di Cusano e ciò che noi oggi chiamiamo curva concava o convessa. Noi intendiamo per curva concava quella che presenta una superficie incavata e convessa quella che è arrotondata all'esterno, situandoci all'interno della figura. Ora Cusano descrive queste curve dall'esterno delle figure. Come riporta Nicolle 2007, nota 9, 16, si ha:



La traduzione matematica di questa relazione è ben svolta da Hofmann e Hofmann 1980, nota 22, 194, che però mostra come Cusano dimostri questa proporzione solo nel caso di semiarchi.

[29] Cusano parla di «semicirculus occultus» e, qualche riga sotto, di «arcus occultus». È un termine di difficile traduzione, che non ci risulta utilizzata dai matematici del tempo. Essa invece si trova negli scritti matematici di fine Cinquecento e Seicento, per esempio in Christopher Clavius (*Gnonomices octo libr*i 1588, libro VIII, cap. III), in Jean Voel (*De horologiis sciothericis libri tres* 1608, libro I), nel cap. XXXVII del *De Usus et fabrica circini cuiusdam proportionis* 1607 (traduzione latina ad opera di Baldassare Capra de *Le operazioni del compasso geometrico et militare* di Galileo (il termine „occulto" si trova all'interno dell'operazione XXVI) (Padova, 1606); nel terzo Dialogo de il *Dialogo sopra i due massimi sistemi* di Galileo Galileo

un punto attorno a cui descrivere un arco (tenendo il piede fisso del compasso su questo punto e l'altro esteso fino a *b*) che si sviluppa passando attraverso il semicerchio minore *gh* verso quello maggiore *ade*, in modo che il punto di intersezione di questo arco con il semicerchio *gh*, ossia *l*, sia il centro dell'intero arco, avente la stessa distanza da *b* e dal punto d'intersezione dell'arco con *de*, ossia *m*. In modo analogo, ho tracciato così la linea *cm* e ho ottenuto il triangolo cercato CBM. Inoltre, cercando il punto *m*, ho trovato che esso deve distare necessariamente da *d* una lunghezza pari alla metà dell'arco *bc*, cioè alla metà del quadrante. Ora, questo punto cade tra il più vicino e il più lontano possibile. Infatti, posto il piede del compasso sulla circonferenza occulta *aki*, per esempio sul punto *a*, allora il punto più vicino sarà *d*, che cade sull'arco *bc*.

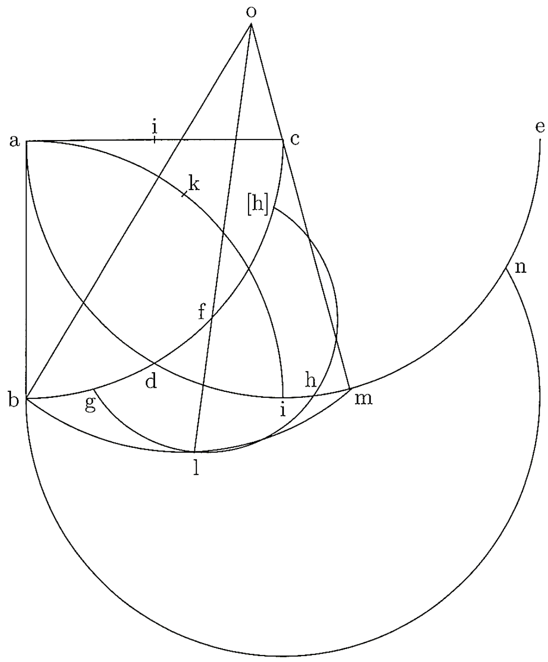


fig. 2

E se porrò il compasso sul punto d'intersezione dell'arco occulto *aki* e *de*, cioè su *i*, e descriverò l'arco *bn*, allora *n* sarà il punto più lontano. Infatti non sarà possibile trovare sull'arco *de* alcun punto più lontano da *d*. Ma è certo che la distanza tra *d* e *n* è pari a un quadrante sull'arco *de* – e la metà di questa distanza è il punto *m* – e in esso si trovano gli estremi ridotti all'uguaglianza media. Con questa via ho scoperto il triangolo cercato.

21. Dopo di ciò ho notato che, prolungando *cm* all'infinito e tracciando allo stesso modo una linea da *l* attraverso *f*, queste linee, non essendo parallele, si devono incontrare necessariamente in un punto. Dunque ho segnato il loro punto di intersezione con *o*. Così, ho osservato che tutte le linee che collegano una parte all'altra nel loro prolungamento devono convergere necessariamente con quelle due linee, nè una deve convergere o prima dell'altra. Di conseguenza tutte convengono nel punto *o*. Pertanto, se da *o* si tracciasse una linea passante per una qualsiasi punto del quadrante *bc* fino all'arco *bm*, allora il segmento di questa linea retta, che si trova tra i due archi, si rapporterà alla retta *cm*, come la parte dell'arco compresa tra *b* e il punto d'intersezione della linea retta e l'arco si rapporta a

(1632).

tutto il quadrante *bc*. Questo significa che tra l'arco *bf* e il quadrante *bc* sussiste lo stesso rapporto di quello esistente tra la linea *fl* e la linea *cm*, e questo era ciò che si cercava.

Terza premessa

22. La terza cosa che bisogna premettere è in che modo, tra linee date, se ne possano trovare due proporzionali. Da molto tempo si sa perfettamente che, se due linee date vengono unite per formare il diametro di un cerchio e una corda le taglia ad angolo retto, allora la semicorda è il medio proporzionale tra questi, poiché è necessario che la semicorda sia il medio tra la freccia e la parte restante del diametro[30].

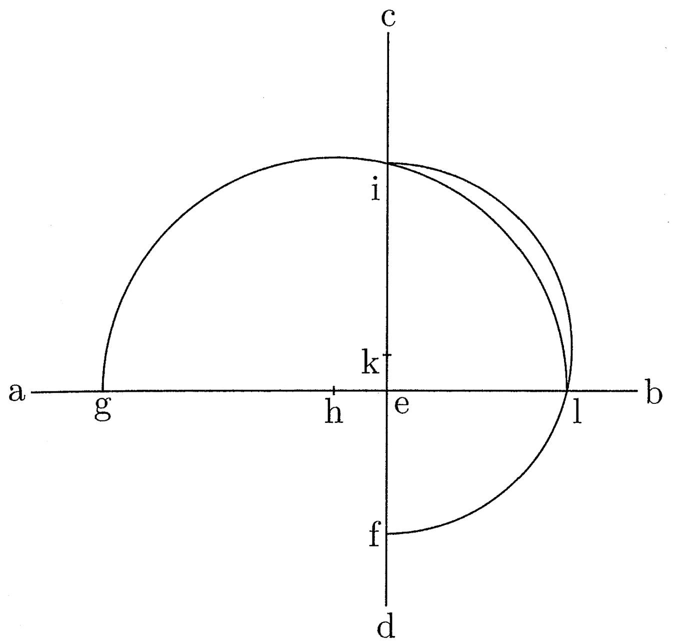


fig. 3

Se dunque due linee di lunghezza indefinita come *ab* e *cd* si taglieranno ad angolo retto nel punto *e*, e da *e* verso *d* traccerò la linea minore, cioè *ef*, e da *e* verso *a* la maggiore, cioè *eg*, e descriverò due semicerchi, uno sulla linea *ec* attorno al centro, per esempio *k*, l'altro sulla linea *ea* attorno al centro, per esempio *h*, allora si noterà che l'arco del semicerchio il cui centro si trova sulla linea *ea* taglia l'arco dell'altro semicerchio sulla linea *eb* nel punto *l* e sulla linea *ec* nel punto *i* (cfr. figura 3). Nessuno può negare che *ei* e *el*, per la suddetta regola conosciutissima del medio proporzionale unico, sono i medi tra *ef* ed *eg*.

23. Per ottenere praticamente questi medi facilmente, prendi uno gnomone e una linea che, applicata al lato dello gnomone, formi un angolo retto (cfr. figura 4). Stando alla premessa, traccia due linee di lunghezza indefinita che si tagliano ad angolo retto;

[30] Cfr. Bradwardine 1495b, III, 4, concl. 4 e Da Novara 2005, VI, 9. È necessario prendere il concetto di freccia nel senso più ordinario di retta perpendicolare al centro della corda dell'arco. Luca Pacioli la definisce così: «Si chiama freccia questa linea retta che parte dal punto mediano dell'arco di qualche porzione di cerchio per cadere in squadra nel mezzo della sua corda. Essa è detta freccia in relazione con la parte della circonferenza che si chiama arco, per somiglianza con l'arco materiale per il quale sono anch'esso usuali questi tre termini: corda, arco e freccia» (Pacioli 1509, 134).

poni in seguito l'angolo retto dello gnomone sulla linea *eb* e fai passare un lato su *f*; nota dove il secondo lato taglia la linea *ec*, applica lì il regolo[31] al lato di cui ho parlato in modo da ottenere un angolo retto. Se la linea condotta passerà per *g*, otterrai ciò che cercavi. Altrimenti, avvicina o allontana lo gnomone su *eb*, finché ciò si verifichi, e otterrai i due medi che cercavi. Se qualcuno lo desidererà, potrà trovare facilmente anche altri procedimenti; tuttavia, essendo il presente metodo chiaro, per il momento è sufficiente[32].

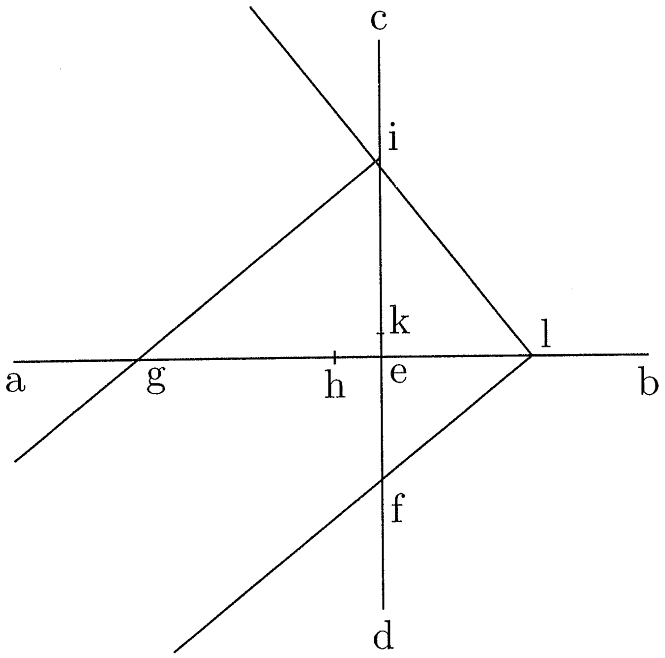


fig. 4

24. In che modo invece si possa aggiungere a tre linee date proporzionali una quarta in proporzione continua risulta evidente da quanto già detto in precedenza[33].

Quarta premessa

25. La quarta cosa [che bisogna premettere], ossia in che modo ottieni che, in rapporto a due linee date, a una terza si dia una quarta per mezzo di due triangoli aventi un angolo comune, e gli altri uguali, nella pratica risulta a tutti quasi evidente (cfr. figura 5). Infatti, se *ab* è una linea, *cd* un'altra ed *ef* una terza, unisci *ab* e *cd* a un angolo a piacere, *ghi*, e chiudi il triangolo. Quindi, prolunga il lato *gh* uguale ad *ab* finché non sarà uguale a *ef*, e sia questo *gk*. Traccia *kl*, parallela a *hi*, e prolunga *gi* fino ad essa, e sia questa *gm*. Nessuno, tranne un ignorante, può mettere in dubbio che la linea *km* si rapporta a *gk*, che

[31] La «regula» consiste nel condurre una linea perpendicolare al lato.

[32] Questa pagina si ispira a Eutocius da Ascalona (ca. 480–ca. 540), matematico bizantino, autore (circa sette secoli dopo Archimede), del *Commento della sfera e del cilindro* di Archimede, tradotto da Guglielmo di Moerbeke, o Willem van Moerbeke (ca. 1215–ca. 1286). Cfr. Clagett 1964–1984a, II, 238. Secondo Clagett 1964–1984a, III, 299–301 Cusano avrebbe letto questo passaggio nel *De arte mensurandi* di Johannes De Muris (cfr. De Muris 1998, VII, 16).

[33] Si tratta di determinare *d* dalla proporzione continua $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$; *c* è la terza proporzionale tra *a* e *b*; *d* è la terza proporzionale a *b* e *c*. Cfr. Da Novara 2005, VI, 10.

è uguale a *ef*, come *hi*, che è uguale a *cd*, si rapporta a *gh*, che è uguale ad *ab*. Questo è quanto stabilito dalle premesse.

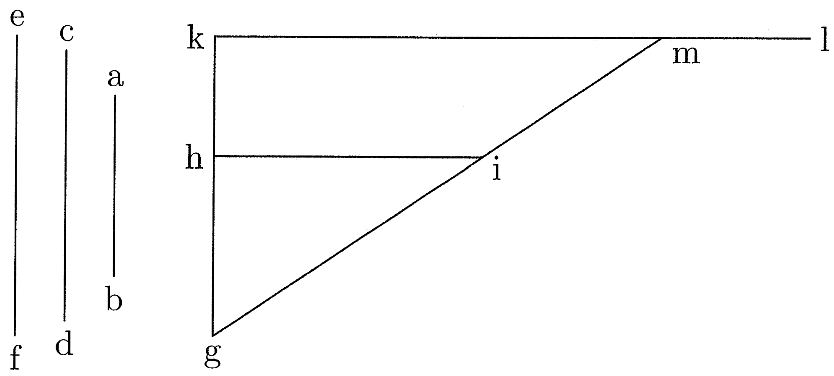


fig. 5

La trasformazione delle linee una nell'altra – capitolo primo

26. Nelle figure geometriche qualsiasi trasformazione è una trasformazione o di una linea in una linea o di una superficie in una superficie o di un solido in un solido[34]. Tre dunque sono i capitoli, che è opportuno trattare seriamente con l'aiuto di esempi.

27. Se intendi trasformare una linea retta in una curva di circonferenza, risolvi la linea retta in un triangolo o in un poligono regolare e, dalla prima premessa, determina il cerchio isoperimetrico la cui circonferenza è uguale alla linea retta data[35].

28. Se cerchi di risolvere una linea retta in un arco qualsiasi di circonferenza, risolvila nella circonferenza del cerchio intero e, dal rapporto di quella con l'arco di circonferenza, troverai ciò che stai cercando. Infatti, il rapporto delle circonferenze è uguale a quello dei semidiametri[36].

29. Se vuoi risolvere una linea retta data in un quadrante, allora ciò che cerchi è un quarto della circonferenza del cerchio il cui semidiametro è il quadruplo [di quello del cerchio la cui circonferenza è uguale alla linea retta data].

30. Se cerchi di trasformare una linea retta data in un arco di circonferenza di un cerchio dato, per prima cosa trasformala nella circonferenza del cerchio e, una volta conosciuto il rapporto dei semidiametri dei cerchi, sarà noto quanto cercato[37].

31. Se vuoi trasformare una linea curva[38] in una linea retta, non devi far altro che seguire la quarta premessa[39], eppure so che, nel far ciò, quasi tutti si sono sbagliati. Infatti, una linea curva può essere trasformata in una linea retta solo se la si rapporta a una qualche linea retta trasformata in linea curva. Se dunque ti proponi di fare ciò, trasforma prima la linea retta in una circonferenza e prendi il semidiametro di questo cerchio come prima

[34] Il termine latino è «corpus».
[35] Cfr. Cusanus 2010i, 31; Cusanus 2010d, 19.
[36] Cfr. Cusanus 2010d, 19.
[37] Cfr. Cusanus 2010e, 6; Cusanus 2010d, 19; Cusanus 2010k, 5.
[38] «Curva» indica qui una curva circolare, poiché la trasformazione si può realizzare solo su una curva regolare come la circonferenza di un cerchio.
[39] Cfr. Cusanus 2010i, 32; Cusanus 2010e, 3; Cusanus 2010d, 18; Cusanus 2010k, 5.

linea. In seguito, prendi un terzo della linea retta trasformata o un altro segmento come seconda linea; e indica come terza linea il semidiametro del cerchio la cui circonferenza è ciò che ti proponi di rettificare. Chiudi i triangoli che hanno un angolo comune e gli altri uguali; i lati opposti all'angolo comune risultano paralleli. Infatti, il secondo lato sarà una parte della linea cercata, per esempio un terzo, se il lato parallelo al primo è un terzo della circonferenza; se è altro, sarà diverso. In questo modo si conosce la trasformazione di una circonferenza in una linea retta e si conosce anche la trasformazione di un arco, che è la parte aliquota[40] e conosciuta della circonferenza.

32. Se ignori il rapporto di un arco dato con la circonferenza, che cerchi di rettificare, tieni conto della seconda premessa, e fai passare una linea dal punto d'intersezione *o* attraverso l'arco che cerchi o una sua parte, fino all'altro arco e segna la linea compresa tra i due archi. Poi, fa' che il semidiametro sia la prima linea, che la linea uguale al quadrante o a una sua parte aliquota sia la seconda, e chiama terza linea quella che hai tracciato tra gli archi. Dalla quarta premessa troverai la linea cercata attraverso i triangoli.

33. E si può ottenere ciò che cerchi solo in questo modo, che ti permette anche di trasformare una retta data nell'arco di una circonferenza data, anche se il rapporto dell'arco con la circonferenza non è nota. Ebbene, con questo procedimento, ciò è possibile.

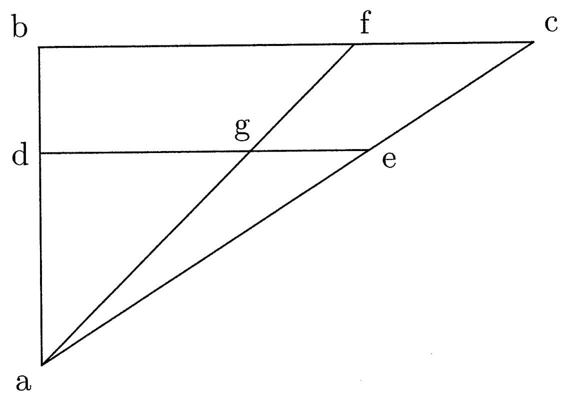


fig. 6

Prendi il semidiametro del cerchio come primo lato del triangolo, la linea retta corrispondente alla quarta [parte] della circonferenza come secondo [lato] e chiudi il triangolo (cfr. figura 6). Così, se il semidiametro è *ab* e la quarta parte della circonferenza *bc*, la linea *ca* chiude il triangolo. Fa' cadere una linea o una sua parte aliquota all'interno di questo triangolo parallelamente a *bc*, e sia essa *de*. Quindi, traccia da *b* verso *c* una linea uguale al semidiametro *ab*, ossia *bf*[41]; traccia *af* e indica con la lettera *g* il punto di intersezione

[40] Per «aliquota» s'intende: contenuta un numero intero di volte, ossia un sottomultiplo intero. Cfr. Bradwardine 1328, 68: «pars autem aliquota est illa quae, aliquotiens sumpta, reddit aequaliter summum suum. Pars vero non aliquota est illa quae nullatenus, aliquotiens sumpta, reddit aequaliter summum suum» («Una parte aliquota è invero quella che, presa un determinato numero di volte, dà come risultato il suo tutto. Una parte non aliquota è quella che, presa un qualsiasi numero di volte, non dà come risultato il suo tutto»). La citazione si trova anche in Clagett 1964–1984a, 493.

[41] Si deve determinare anche l'angolo (il radiante ϕ) di ciascun arco di circonferenza dal semidiametro *ab*, che sia uguale al segmento *ed* ($= ab \times \phi$). Mediante la costruzione sul triangolo risulta che $ed = dg \times \frac{\pi}{2}$; e così è applicabile $\phi : \frac{\pi}{2} = dg : ab$ e la costruzione della seconda premessa. Secondo Hofmann sulla figura originale del manoscritto *bf* non è uguale a *ab*, come invece dovrebbe essere (Hofmann e Hofmann 1980, nota 34, 195).

con *de*. Poi torna alla seconda premessa e tira una linea dal comune punto di intersezione affinché si trovi tra gli archi un segmento uguale a *dg*; questo è il semiarco uguale alla linea data o la parte aliquota dell'arco cercato, se hai lavorato con una parte della linea.

34. Con questo metodo puoi anche trasformare una curva data e qualsiasi arco di una qualsiasi circonferenza in un diverso arco di un altro cerchio[42], trasformando per prima cosa la curva stessa in una linea retta e in seguito questa linea retta in un arco della circonferenza data secondo il procedimento illustrato. Ciò è stato sufficientemente spiegato in questo capitolo sulla trasformazione delle linee.

La trasformazione delle superfici l'una nell'altra – capitolo secondo

35. Per spiegare sufficientemente la trasformazione delle superfici ed evitare inutili discorsi, tralascio, in quanto nota, la trasformazione delle superfici rettilinee[43]. Infatti, che il triangolo possa essere diviso in più triangoli e trasformato in un qualsiasi rettangolo[44] e questi, a sua volta, in un qualsiasi quadrato, e più quadrati in uno solo, o che un solo triangolo possa essere diviso in più triangoli equilateri e, similmente, anche il triangolo e il quadrato e così tutti i poligoni equilateri e in non equilateri in altre figure, tutto ciò ti è noto dagli *Elementi* di geometria e dal rapporto di proporzionalità tra i cerchi e i quadrati, per cui tralascio tutto questo, dato che è mia intenzione accrescere quanto già si sa e non ripetere ciò che è trito e ritrito. Così, grazie a ciò che ho trattato in precedenza, questo capitolo può essere facilmente compreso.

36. Se proponi di trasformare una superficie circolare in una rettilinea, per prima cosa risolvi la sua circonferenza in una linea retta; quindi, aggiungi il semidiametro della circonferenza ad angolo retto e chiudi il triangolo; così la superficie circolare è trasformata in una superficie triangolare. Se vuoi trasformarla in un rettangolo o in un quadrato, ciò è possibile facilmente a partire dal triangolo. Infatti, si quadra il cerchio, prendendo come lato del quadrato il medio proporzionale tra il semidiametro e la metà della circonferenza. È dimostrato dalle menti più acute che dal prodotto del semidiametro per la metà della circonferenza risulta l'area di un rettangolo che non sarà né maggiore né minore dell'area del cerchio[45]. Infatti, il prodotto del semidiametro del cerchio inscritto per la metà del perimetro del poligono inscritto è uguale all'area del poligono inscritto[46]; il prodotto del semidiametro del cerchio circoscritto per la metà del perimetro del poligono circoscritto è maggiore dell'area del poligono e minore dell'area del cerchio e, parimenti, il prodotto del semidiametro del cerchio inscritto per la metà del perimetro di ogni poligono circoscritto è uguale all'area di questo e maggiore dell'area del cerchio. Di conseguenza il prodotto

---

[42] Cfr. Cusanus 2010d, 21; Cusanus 2010k, 5.

[43] Per «superficies rectilinea» si intende una superficie delimitata da linee dritte. Cfr. Da Novara 2005, VI, 25 e Bradwardine 1495b, III, 6, concl. 4: «E' possibile ridurre ogni poligono in quadrato attraverso la risoluzione in triangoli, attraverso le quadrature di questi triangoli e attraverso circoscrizioni gnomoniche».

[44] Con rettangolo si traduce «quadrangulus». In questo, come negli altri scritti matematici, il termine «figura quadrangularis» è equivoco: Cusano lo riferisce tanto al quadrato quanto al rettangolo e al parallelogramma. Di volta in volta, a seconda del contesto, si renderà il termine «quadrangularis» con la figura corrispondente. Sull'utilizzo, da parte di Cusano, del termine «quadrangulus» e sull'influenza dalla terminologia matematica medioevale, cfr. Hofmann 1966, 98–136, spec. 105. Cfr. anche Cusanus 2010j, 2.

[45] Cfr. Archimedes 1910a, prop. 1, ripreso da Bradwardine 1495b, III, 6, concl. 5.

[46] La formula dell'area $f_n = \frac{u\rho_n}{2}$, già utilizzata nell'introduzione, compare nell'esempio dell'ottagono nel *Circ. dem.*, di Archimede, è ripresa da Bradwardine 1495b, II, 5, concl. 2 ed è menzionata in Cusanus 2010i, 10 per dimostrare il quadrato. La formula dell'area del cerchio è espressa in Bradwardine 1495b, III, 6, concl. 5, ma senza riferimenti al processo dimostrativo archimedeo.

Cfr. Cusanus 2010l, 10.

del semidiametro per la metà della circonferenza del cerchio non può essere né maggiore né minore [dell'area del cerchio].

37. Se tuttavia cerchi di trasformare l'area di una superficie rettilinea nell'area di una circolare[47], per prima cosa risolvi quella circolare, come già detto, in un poligono, per esempio in un quadrato, e prendi il semidiametro del cerchio come [prima] linea e il lato del quadrato come [seconda] linea, e, dopo aver trasformato la superficie rettangolare in un quadrato, prendi il lato [del quadrato] come terza linea: dalla quarta premessa troverai la quarta linea che sarà il semidiametro del cerchio cercato. Nota come non si arrivi alla trasformazione di un arco di circonferenza in una linea retta se non per mezzo della trasformazione di una qualche linea retta in un arco di circonferenza; e, inversamente, non si giunge alla trasformazione di una superficie rettilinea in una circolare, se non attraverso la trasformazione di una qualche superficie circolare in una rettilinea. L'arcano che qui si nasconde non è oggetto della presente trattazione[48].

38. Se tuttavia vuoi trasformare una qualsiasi porzione di superficie circolare che cade tra due raggi[49], che sia o no proporzionale all'intera superficie[50], lo puoi fare risolvendo in una retta l'arco compreso tra i due settori e moltiplicando il semidiametro per la metà dell'arco stesso.

39. Se cerchi di ridurre la porzione compresa tra una corda e l'arco in una superficie delimitata da lati dritti[51], per prima cosa risolvi tutta la porzione compresa tra i raggi tracciati dal centro nel modo già illustrato in un cerchio. Quindi, trasforma, allo stesso modo, il triangolo compreso tra i raggi e la corda in un cerchio e, dopo averlo sottratto dal primo, resterà una porzione [di cerchio] ridotta in una superficie compresa tra le due circonferenze, che può essere ridotta nella superficie di un rettangolo attraverso la risoluzione di ciascun cerchio in quadrato e la sottrazione di ciascun quadrato dall'altro, visto che la differenza è uguale a questa porzione. Essa può dunque essere risolta nella superficie di un quadrato e attraverso questa nella superficie di un cerchio secondo i procedimenti già sufficientemente esposti. Attraverso questi esempi l'arte della trasformazione delle superfici l'una nell'altra è sufficientemente spiegata.

40. A ciò che l'arte delle trasformazioni esige come necessario si possono aggiungere molti altri punti [rimasti] finora nascosti, per esempio come fare a descrivere un angolo attorno al centro di un cerchio che si rapporta a due angoli doppi secondo il rapporto della doppia proporzionale[52], in base a quanto detto nella seconda premessa. Infatti, si può dare

---

[47] Cfr. Cusanus 2010i, 34.

[48] Secondo Clagett 1968, II, 302–304, Cusano ha compreso male la dimostrazione indiretta di Archimede «.. e inversamente…»: questa idea di operazione inversa gli venne dal *De arte mensurandi* (cap. 8, prop. 15) di Johannes De Muris (De Muris 1998).

[49] Nel Medioevo le figure geometriche sono viste non come rette che delimitano delle superfici, ma come superfici delimitate dalle rette. Cusano vede l'angolo come una superficie e i settori come porzioni di superficie del cerchio delimitate da raggi (cfr. Nicolle 1998, nota 19, 17). Troviamo la seguente definizione in Proclo: «la natura particolare dell'angolo non consiste in una contrazione di superficie o del solido, ma in una superficie contratta in un punto e compresa tra due linee spezzate» (Proclus 1873, 117, 73).

[50] Cfr. Cusanus 2010i, 28.

[51] Cfr. Cusanus 2010i, 29, 4–5.

[52] «Secundum proportionem medietatis duplae»: si tratta di un'espressione idiomatica intraducibile in sè, utilizzata anche ne *La quadratura del cerchio* (Cusanus 2010j, 9, 8) e ne *I complementi matematici* (Cusanus 2010i, 36). Considerando l'angolo come una superficie, Cusano ritiene il rapporto tra angoli uguale al rapporto degli archi corrispondenti allo stesso cerchio (cfr. Hofmann e Hofmann 1980, nota 42, 195–196). Vescovini 1972, nota10 sottolinea che l'espressione medietatas duplae rimanda alla tradizione matematica medievale con cui Cusano allude alla dimostrazione dell'irrazionalità della $\sqrt{2}$, spesso citata in Aristotele e menzionata anche in Oresme 1966, 160 e in Bradwardine 1495b, III–1. Oresme chiama il rapporto $\frac{a^2}{b^2}$ la

una linea retta che si rapporta a una data come il lato [del quadrato] alla diagonale[53]. Entrambi possono essere ridotti nell'arco della stessa circonferenza. Da lì, tracciati i raggi fino alle estremità degli archi, si formeranno attorno al centro necessariamente gli angoli secondo il rapporto degli archi.

41. Se, infatti, cerchi di risolvere una superficie in altre, tante quante ne vuoi, che non sono proporzionali tra di loro né alla superficie totale, ma sono tuttavia tali che se aggiungessi l'una all'altra, risulterebbe una parte aliquota della superficie totale, anche se la superficie data non fosse semicircolare, riducila in superficie semicircolare tracciando la corda dell'arco del quadrante, parallela al diametro, chiamato "medio divisore"[54](cfr. figura 7). Da questa [corda], su entrambe le parti, attraverso archi uguali, traccia, a tuo piacimento, corde [parallele] maggiori e minori. Tutte le porzioni[55] non saranno proporzionali né tra di loro né al tutto. Ma se unirai due porzioni aventi la stessa distanza dal "medio divisore", esse formeranno una parte della superficie [semicircolare] uguale a quella dell'arco sulla circonferenza. Così facendo, potrai ricavare dalla metà della superficie del semicerchio qualsiasi parte aliquota tu vorrai. La dimostrazione di ciò sta nel fatto che i triangoli compresi tra i raggi e le corde parallele al medio divisore, la cui distanza dal medio divisore è data da archi uguali, sono necessariamente uguali, ed è massimo quel triangolo compreso tra i raggi e la corda che chiamiamo medio divisore. Puoi anche di-

---

metà di $\frac{a}{b}$ (cfr. Oresme 1966, 454). La *proportio proportionum*, cioè la proporzione tra due rapporti $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ e $\frac{a}{b}$ è espressa dal rapporto $\frac{1}{2}$. Se la *proportio dupla* è il quadrato allora, la metà, ossia la *medietas duplae*, è la radice. Cusano si riferisce a questa terminologia matematica di Bradwardine, di Oresme e di altri studiosi interessati agli incommensurabili e ai rapporti irrazionali. Cfr. Rommevaux 2003, 401–418; Pedersen 1953, 134ss. Questa espressione è legata al problema della duplicazione del cubo e alla relativa doppia media proporzionale. Secondo la leggenda l'oracolo di Delo aveva vaticinato che per far cessare una terribile pestilenza si doveva dedicare alla divinità un'ara cubica di volume doppio rispetto all'ara cubica dedicata in precedenza. Un problema semplice solo in apparenza. Era noto che, raddoppiando la misura degli spigoli del cubo, il volume aumenta $2^3 = 8$volte. Il problema consisteva, quindi, dato un cubo di spigolo a, nel trovare un cubo di spigolo x tale che $x^3 = 2a^3$, ossia nel trovare due numeri tali che la terza potenza di uno sia il doppio della terza potenza dell'altro. Ippocrate di Chio (ca.470a.C.–ca.410a.C.) aveva proposto una via di risoluzione riducendo il problema di Delo all'altrettanto difficile problema delle due medie proporzionali, nel senso che la soluzione del secondo equivale alla soluzione del primo. 'Due medie' perché se tra i segmenti a e b riusciamo a inserire due segmenti x e y tali che $a : x = x : y = y : b$, allora abbiamo trovato il valore di x che risolve il problema cioè, come diciamo oggi, che soddisfa l'equazione di terzo grado $x^3 = 2a^3$. La riduzione di Ippocrate alle 'due medie' è corretta, infatti dalle due proporzioni si ricava x e y ossia: $x^2 = ay$ $y^2 = bx$ da cui elevando al quadrato $x^4 = a^2y^2$, sostituendo $x^4 = a^2bx$ cioè $x^3 = a^2b$ e ponendo $b = 2a$, si ottiene l'equazione cercata $x^3 = 2a^3$. È Eutocio che, nel suo *Commento alle Sfera e Cilindro* di Aristotele (Libro II), riporta la lettera di Eratostene a re Tolomeo, raccontando, vera o presunta che sia, la nascita del problema del raddoppiamento del cubo. Sul tema, cfr. Gamba e Montebelli 1988, 166ss; Maracchia 2017, II, 24ss. Fatto questo, rimane il problema di determinare x e y. Ragionando nei termini della geometria analitica nata con Cartesio, le relazioni $x^2 = ay$ e $y^2 = bx$ sono le equazioni di due parabole entrambe passanti per l'origine degli assi cartesiani, una simmetrica all'asse x, l'altra all'asse y. Oltre che a intersecarsi nell'origine, le due parabole si intersecano in un punto P di coordinate (x, y), e la coordinata x risolve il problema di Delo.

[53] Cusano utilizza il termine «diameter» per indicare la diagonale, in base a una etimologia inesatta da «δύο» e «μετρεῖν» (che divide in due) ripresa da Bradwardine (Bradwardine 1495b, II, 1, concl. 8: «linea diagonalis quae ducitur ab angulo ad angulum […]in quadrato vocatur diameter»). Cfr. Da Novara 2005, X, 7, add. Bradwardine 1495b, III, 4, concl. 3. Una fonte chiara è Pisanus 1862, 2. Alla fine del Quattrocento si trova ancora il termine diametro per designare la diagonale del quadrato nell'opera di Luca Pacioli: «Si ha costume di parlare di diametro anche per i quadrati: ecco (è) perché, al fine di evitare qualunque equivoco, si dice diametro del cerchio e diametro del quadrato per differenziarli» (Pacioli 1509, I, 71, 133). Sul tema, cfr. Giusti e Maccagni 1994.

[54] Il termine latino è «medium divisionis».

[55] Qui per porzione s'intende un segmento circolare.

videre la superficie in parti, in modo che, unendo l'una all'altra, la superficie formata da queste parti resti non proporzionale, come accade se tracciassi le corde dal medio divisore, attraverso archi non proporzionali alla circonferenza. E da qui potrai dedurre tutto il resto a tuo piacimento[56].

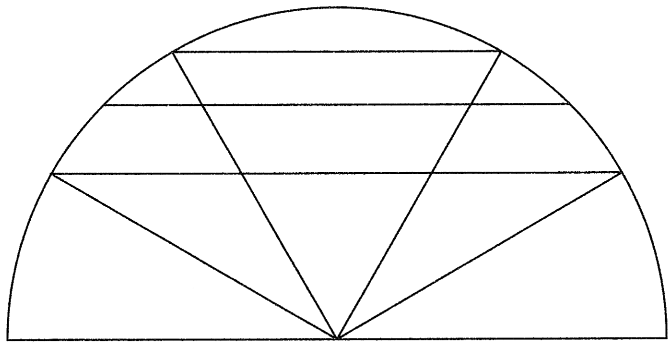


fig. 7

La trasformazione dei solidi l'uno nell'altro – capitolo terzo

42. In ultimo luogo, resta da spiegare la trasformazione dei corpi con l'aiuto di esempi. D'altra parte, i solidi si trasformano in corpi in base alle proposizioni fondamentali esposte.

43. Un parallelepipedo [rettangolo][57] si riduce in un cubo in questo modo. Si quadra la sua base, se non è già quadrata, attraverso il medio proporzionale tra i suoi due lati diversi; tra questo lato [del quadrato] e l'altezza del corpo si costituiscono due linee in proporzione continua, secondo la terza premessa; e se l'altezza è maggiore del lato del quadrato, il medio minore è il lato della base del cubo cercato. Ma se il lato del quadrato è maggiore dell'altezza, il lato della base del cubo cercato è il medio[58] maggiore. Se è uguale, allora si ha il cubo. Se è un cilindro, si quadra la base e si procede secondo quanto finora stabilito.

44. Tuttavia, se vuoi trasformare un cubo in una sfera, riduci la superficie quadrata del cubo in un cerchio e fa' di questo il cerchio maggiore della sfera[59].

[56] Questa uguaglianza tra la porzione del cerchio e la sezione della circonferenza è ripresa da Di San Vincenzio 1647, X, 20, il quale verosimilmente aveva preso Cusano come modello. Per una chiara illustrazione del ragionamento cusaniano, cfr. Hofmann e Hofmann 1980, nota 43, 196.

[57] Cusano usa l'espressione «columna quadrangula» o anche (alla fine del §46) «corpus altera parte longius» per indicare il parallelepipedo; più avanti (§ 50) Cusano indica il cilindro con l'espressione «columna rotunda». Anche in questa proporzione Cusano si ispira al *De arte mensurandi* di De Muris.

[58] Se a è il lato della base quadrata, h l'altezza (Cusano usa *longitudo*) del parallelepipedo dato, e c lo spigolo del cubo cercato, si ha: $a^2h = c^3$. Questo risulta aggiungendo due rette intermedie x e y tali che $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{h}$; se $h > a$ allora c è la minore delle due rette. Se $a > h$ allora c è la maggiore. Se $h = a$ allora $c = h = a$.

[59] Se c è lo spigolo del cubo e r il raggio della sfera, Cusano afferma a torto che $c^2 = \pi r^2$. Come riporta Nicolle 1998, nota 24, 17, Hofmann e Clagett segnalano qui un errore di comprensione del testo di Archimede da parte di Cusano. In una lunga *annotatio* di Omnisanctus indica lo stesso errore in una *Geometria vulgaris* di quel tempo, da un'altra *annotatio* all'ultimo passaggio del 3 capitolo risulta che si tratta della geometria di Ch. Bouvelles, in cui compare tra gli altri lo stessa formula sbagliata (πr^2) per la superficie della sfera. Cfr. Klibansky 1980, 358–362.

45. Se vuoi raggruppare più cubi in un unico cubo, posto che siano uguali, prendi come linea minore quella uguale al lato del cubo, e come linea maggiore quella uguale alla [somma di] tutti i lati [del cubo], segna quindi tra queste due linee due medi proporzionali secondo la terza premessa, poiché il minore tra questi due è il lato del quadrato, come abbiamo visto a proposito del parallelepipedo.

46. Se ti proponi di ridurre due [cubi] diversi in uno, riduci prima il più piccolo in un parallelepipedo rettangolo[60], la cui altezza[61] sia uguale al lato del cubo più grande, nel modo seguente: prendi il lato del più grande a cui aggiungi direttamente il lato del più piccolo cercando tra questi un solo medio proporzionale; trova un'altra linea in proporzione continua dopo il lato del più piccolo, cosicché siano quattro le linee in proporzione continua. Quest'ultima linea scoperta è il lato della base quadrata del parallelepipedo rettangolo la cui altezza è il lato del quadrato più grande, come risulta dal procedimento inverso di trasformazione del parallelepipedo. Fatta questa riduzione, cerca un quadrato uguale alla [somma di] due quadrati, ossia del quadrato del cubo più grande e della base quadrata del parallelepipedo rettangolo già menzionato, riducendo il cubo più grande e il parallelepipedo menzionato in un unico parallelepipedo rettangolo, il cui lato della base quadrata è maggiore dell'altezza. Riduci infine quest'ultimo a un cubo, seguendo la regola illustrata. Con questo metodo è evidente che si possono trasformare tutti i cubi che vuoi, siano essi uguali o diversi, in un cubo o infine in una sfera. E così facendo si possono ridurre più sfere in una sola, in un cubo o in un parallelepipedo rettangolo.

47. Ma se ti proponi di ridurre un parallelepipedo alto in uno più basso e/o viceversa, per prima cosa trasformalo in un cubo, poi traccia l'altezza [del nuovo solido] in cui ti proponi di trasformarlo. A questa aggiungi il lato del cubo cercando un solo medio proporzionale e una quarta linea in proporzione continua a queste tre. Questa quarta linea sarà [il lato] della base quadrata del parallelepipedo rettangolo avente l'altezza data[62].

48. Così, se di più parallelepipedi uguali o diversi vuoi costruire uno avente una data altezza, se essi sono uguali, prendi la base quadrata uguale a tutti e riducila in cubo e questo nel parallelepipedo avente l'altezza data secondo le modalità sopra esposte; se essi sono diversi, riduci a mente tutti i parallelepipedi in uno solo e questo in un cubo, e quest'ultimo in un parallelepipedo alto o basso, a tuo piacimento. Tuttavia, in ciò bisogna fare attenzione, poiché, se il cubo deve essere ridotto in un solido che ha come base un quadrato il cui lato è maggiore della sua altezza, allora [è necessario] unire all'altezza minore data il lato della base del cubo, cercando un solo medio proporzionale. A questo punto troverai una quarta linea, che si rapporta al medio come il lato del cubo si rapporta ‹all'altezza› [del solido cercato], e questa linea sarà il lato della base quadrata del solido, in cui volevi ridurre gli altri. Ma se vuoi che l'altezza di quel solido cercato sia maggiore del lato di base quadrata, aggiungi l'altezza direttamente al lato del cubo, e cerca il medio proporzionale: la quarta linea in proporzione continua dopo il lato del cubo è il lato cercato[63].

[60] Cusano utilizza la perifrasi «corpus altera parte longius» per indicare il parallepipedo rettangolo.

[61] La lunghezza, cioè l'altezza della colonna.

[62] Si cerca la trasformazione di un parallelepipedo di superficie quadrata a^2b in un altro x^2c di altezza data. Cusano costruisce non direttamente, ma indirettamente, ciò che facilmente sarebbe possibile da $\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{b}}{c} = \frac{b}{\sqrt{bc}}$: determina t da $t^3 = a^2b$, pone poi $tc = y^2$ e conclude $c : y = t : x$. In realtà $cx^2 = \frac{(y^2t^2)}{c} = t^3 = a^2b$, c.v.d. Cfr. Hofmann e Hofmann 1980, nota 49, 197.

[63] Se $t^3 = x^2c$ allora, per quanto detto nella nota precedente, si ha $tc = y^2$ e $c : y = t : x$. Ora Cusano distingue due casi: $c < t$ (e dunque $x > c$) e $c > t$ (e dunque $x < c$). Questo passaggio è oscuro e l'edizione di Omnisanctus presenta grandi differenze con il manoscritto. A quanto pare Cusano vuole costruire nel caso $c < t$ da $y : t = t : x$ e nel caso $c > t$ da $c : y = t : x$, ma non si capisce chiaramente il perché.

49. Se invece provi a trasformare una sfera in una piramide, fa' che la base della piramide sia uguale alla superficie curva della sfera e che la sua altezza sia uguale al semidiametro della sfera[64].

50. Se qualcuno dicesse: date due sfere di cui una è doppia dell'altra, trasformale in un cilindro, tu fa' che l'altezza del cilindro sia uguale al diametro della sfera ‹maggiore› e la base uguale al cerchio maggiore di questa sfera. Questo cilindro sarà uguale ad entrambe le sfere. Infatti, il cilindro la cui altezza è uguale al diametro della sfera e la cui base è uguale al cerchio massimo, è una volta e mezzo la sfera[65].

51. Questi e altri esempi, e tutto ciò che può avvenire nei solidi regolari mediante la trasformazione geometrica delle figure, puoi ricavarli da questi insegnamenti.

[64] Cfr. Archimedes 1910a, I, 33, letto attraverso il *De arte mensurandi* di De Muris o il *De curvis superficiebus archimenidis* di Johannes De Tinemue (cfr. Clagett 1964–1984a, I, 496–500 e 502–504).

[65] Da queste righe risulta che Cusano conoscesse la formula corretta del volume della sfera. Se a è il raggio della sfera maggiore, allora il suo volume è $4a^3\frac{\pi}{3}$ e quello della sfera minore $2a^3\frac{\pi}{3}$; entrambi danno $2a^3\pi = a^2\pi \times 2a$. Che il volume del cilindro circoscritto si rapporti a quello della sfera come $3 : 2$, è detto nella Prefazione del primo libro di Archimede, *Sulla sfera e sul cerchio* (cfr. Archimedes 1910a, I, 34).

Cfr. De Tinemue 1964, prop. 8, 496–500.

‹Appendice›

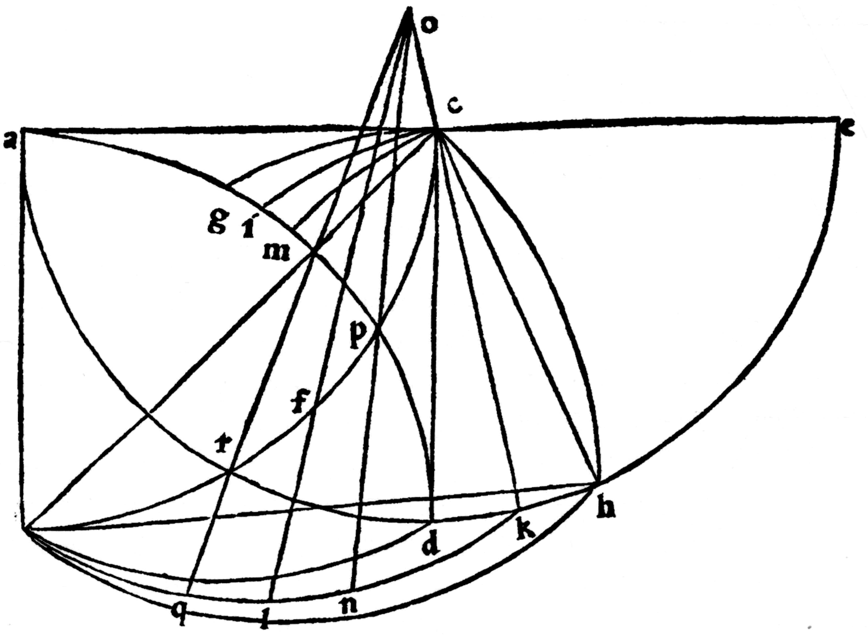


fig. 8

α[66] Ho descritto dunque un quadrante *bc* intorno al punto *a*, e, col piede del compasso fisso in *c*, ho tracciato il semicerchio *ade* (cfr. figura 8). Ho cercato in questo genere di triangoli il più piccolo e ho notato che, se si conduce una retta dal punto *c* al punto *d*, essa descrive un angolo tangente al quadrante, e di conseguenza il terzo lato che chiude questo triangolo sarà il più piccolo, essendo l'angolo a cui è sotteso, ossia quello di tangenza, il più piccolo. Tracciato quindi *ab* intorno al centro *b*, descrivo il quadrante occulto *ad*, uguale a *bc*. Dall'altra parte, tracciato *cd* intorno al centro *d*, indico con *g* il punto d'intersezione con il quadrante occulto *ad*. Poi, posto il piede del compasso fisso in *g* e l'altro in *b*, muovo *b* fino al punto *d*; l'arco descritto, ossia *bd*, avrà la stessa curvatura dell'arco del quadrante *bc*. Poiché tutte le rette condotte dal quadrante occulto al punto *b* sono uguali, è necessario descrivere archi della stessa curvatura o di cerchi eguali.

β. *bd* sarà il lato curvo più piccolo e convesso; di conseguenza il triangolo BCD sarà il in questo genere di triangoli, contenendo il più piccolo degli angoli, ossia quello di tangenza, dato che il lato curvo *bd* al quale è sotteso è il più piccolo. E, poiché è il più piccolo, il lato curvo *bc* sarà il più grande. Infatti, non si può dare il lato *bc* come il più piccolo, perché, se così fosse, il lato dritto *dc* intersecherebbe il quadrante *bc*, e il triangolo che si ottiene non rientrerebbe nel genere di quelli cercati. Dunque BCD è un triangolo i cui due lati curvi sono *bc* e *bd*, e di questi uno è il più grande ed è concavo, l'altro è il più piccolo ed è convesso; questi lati curvi hanno la stessa curvatura, il cui diametro è il terzo lato dritto, ossia *dc*. E poiché in questo genere [di triangoli] non se ne può dare uno il cui lato più piccolo convesso sia *bd*, allora BCD sarà il triangolo più piccolo in questo genere di triangoli. Al contrario, poiché in questo genere di triangoli si possono

[66] Questo testo si trova in *b* e *p*, tra i capitoli 20 e 21. Essa non è presente nelle traduzioni di Hofmann e Nicole.

dare triangoli più grandi, ossia quelli il cui lato curvo convesso è più grande dell'arco *bd*, si può dare correttamente il più grande, allorché il lato curvo e convesso sarà uguale a quello concavo, ossia quando è il più grande. Per descrivere tutto ciò, traccio una linea retta *bd*, e intorno al centro *h* descrivo *hc* e indico con *m* il punto d'intersezione di *hc* con il quadrante occulto. Al contrario, fissando il piede del compasso in *m* e l'altro in *b*, muovo *b* verso *h*: l'arco descritto, ossia *bh*, sarà uguale al quadrante *bc*. Infatti sono descritti con lo stesso diametro e le corde degli archi sono uguali; di conseguenza avranno la stessa curvatura. Da ciò risulta che il triangolo BHC – i cui due lati curvi hanno la stessa curvatura, ossia l'arco *bc* e l'arco *bh*, e il terzo lato dritto, ossia *hc*, è eguale al semidiametro dei cerchi degli archi – è il più grande in questo genere di triangoli; infatti, il lato più piccolo coincide con quello più grande. Al contrario, poiché nel triangolo più piccolo, ossia BCD, la linea condotta dalla metà del lato curvo alla metà dell'altro lato curvo è maggiore della metà del lato dritto, allora esso sarà in assoluto il più piccolo, dato che si tratta del triangolo più piccolo. E poiché la linea condotta dalla metà del lato curvo alla metà dell'altro lato curvo nel triangolo più grande, ossia CBH, è maggiore della metà del lato dritto (e questo perché i lati curvi sono uguali), la linea tracciata sarà in assoluto la più grande, trovandosi nel triangolo più grande. Da ciò consegue che nel triangolo intermedio ed equidistante dal massimo e dal minimo, in cui cioè il massimo e il minimo coincidono, la linea condotta dalla metà del lato curvo alla metà dell'altro lato curvo non è né maggiore né minore della metà del lato dritto, e, di conseguenza, questo triangolo intermedio sarà quello cercato.

γ. Per ottenere ciò, divido l'arco *dh* in due parti uguali; indico con *k* il punto medio e traccio *kc*. Intorno al centro *h* descrivo *kc* e indico con *i* il punto d'intersezione di *kc* con il quadrante occulto. Posto il piede del compasso fisso in *i* e l'altro in *b*, muovo *b* verso *k*, e così sarà descritto l'arco *bk*, che, insieme all'arco del quadrante *bc* e alla linea *kc*, descrive il triangolo cercato. Infatti il lato più grande e curvo è il quadrante ed è concavo, ed esso, rispetto all'altro lato curvo e convesso, ossia *bk*, ha la stessa curvatura; mentre il terzo lato è dritto e eguale al semidiametro del cerchio degli archi.

δ. Poiché, infatti, il triangolo più grande CBH si muove verso quello intermedio decrescendo di continuo, e il triangolo più piccolo BDC si muove verso quello intermedio crescendo di continuo, essi coincidono nel medesimo triangolo, che non può che essere BKC, che è quello cercato. Al contrario, si divida il lato curvo *cb* in due parti uguali con il punto medio in *f* e allo stesso modo si divida il lato curvo *bk* nel punto medio *l*. Sia *kc* di lunghezza indefinita e si conduca un'altra linea dal punto *l* passando per *f*. Poiché *kc* e *fl* non sono paralleli, convergono necessariamente in un punto, *o*, che sarà il punto d'intersezione delle linee *kc* e *fl*. Da ciò *kc* starà a *fl* come *bl* a *bk* o *bf* a *bc*.

ε. Di tutte le linee che, condotte dal punto d'intersezione, tagliano i due lati curvi, quelle comprese tra questi conserveranno con il lato dritto lo stesso rapporto che le parti dei lati curvi verso l'angolo *b* hanno con i lati curvi. Come *on*, che passa per *p*, e *bp* sono due terzi di *bc*, allo stesso modo *nb* sarà due terzi di *bk* e *np* due terzi di *kc*. Al contrario nel caso di *oq*, che passa per *r*, *rb* è un terzo di *bc* e *bq* è un terzo di *bk* e allo stesso modo *qr* è un terzo di *kc*. E così, essendo il triangolo BKC equidistante da quello più grande, ossia BHC, e da quello più piccolo, ossia BDC, nei quali si realizzano il massimo e il minimo in assoluto (come si dice); di conseguenza, in quello intermedio non ci sarà né il più né il meno, dal momento che in esso coincidono il triangolo minimo e il triangolo massimo.

I complementi aritmetici

Versione originale latina a p. 73.

1. Al fisico Paolo, uomo eccellente e dottissimo, i complementi aritmetici del cardinale Niccolò da Cusa[1].

Carissimo Paolo, ho sottoposto a te, che sei instancabile, alcuni complementi sui rapporti aritmetici, affinché tu li corregga, sebbene a te e a tutti possano essere appresi da quanto ho spiegato nel trattato su *Le trasformazioni geometriche*. Allora, io sostengo che la coincidenza dell'angolo e del lato nei diversi poligoni isoperimetrici ci porta al cerchio isoperimetrico come abbiamo dimostrato nella prima premessa de *Le trasformazioni geometriche*[2]. Da ciò si apre a noi una via per calcolare in ogni modo possibile tutto ciò che riguarda un complemento di aritmetica. D'altra parte, ciò che affermo, cioè il rapporto tra corda e arco, è rimasto fondamentalmente sconosciuto fino a questo momento. Nella scoperta [di tale rapporto] consiste quel complemento, e, una volta fatta, non resterà nulla di difficile da calcolare numericamente.

2. Ci sono stati uomini di grande ingegno, primo fra tutti Archimede[3], i quali hanno dimostrato che la circonferenza del cerchio rispetto al suo diametro è maggiore di tre più dieci settantunesimi e minore di tre più dieci settantesimi[4] e che si poteva rendere sempre più precisa questa approssimazione. Ma non ci hanno tramandato dietro quale numero[5] si celasse l'esatto valore, allora inaccessibile. Infatti, sebbene non si possa calcolare numericamente la misura del lato a partire dalla misura della diagonale[6] del quadrato, si potrebbe, tuttavia, ottenere questo numero se fosse possibile calcolarne la radice; così facendo conosciamo il lato incalcolabile. Non ho trovato che gli antichi fossero a conoscenza o per lo meno ci abbiano trasmesso qualcosa di simile.

3. Se davvero tale rapporto possa essere conosciuto[7] ritengo che l'arte [matematica] possa scoprirlo da quanto ho già detto, e, per essere breve, tralascio l'ultima figura che lì

[1] *I complementi aritmetici* non sono un testo di aritmetica, come il titolo suggerirebbe, ma un breve trattato di geometria nel quale Cusano cerca un'approssimazione di π. Il termine aritmetico sta a indicare la ricerca di un numero (costante) che permetta di calcolare il rapporto tra il diametro di un cerchio e la circonferenza. Non c'è nessun riferimento alla *coincidentia oppositorum*, nessuna allusione al massimo e al minimo, nessun utilizzo del metodo indiretto impiegato negli scritti successivi. Si tratta di un testo semplicemente matematico e, se si mette da parte un cenno all'ignoranza della ragione osservata dall'intelletto (fine § 4), il testo non presenta alcuna considerazione metafisica.

[2] Cfr. Cusanus 2010b, 7.

[3] È il primo riferimento esplicito ad Archimede da parte di Cusano.

[4] Tradotto numericamente: $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$, dove $\pi = \frac{C}{d}$. Cfr. Archimedes 1910b, prop. 3.

[5] All'epoca per «numerus» s'intendevano i numeri interi o talvolta quelli razionali. Su questo punto Cusano si ispira a Bradwardine 1495b, III, 4, concl. 1. L'approssimazione di Archimede si trova in Archimedes 1910a, prop. 3, di cui Cusano era a conoscenza grazie al *De arte mensurandi* di de Muris (1998, prop. 8).

[6] Cusano utilizza il termine «diameter» per indicare la diagonale, in base a una etimologia inesatta da «δύο» e «μετρεῖν» (che divide in due) ripresa da Bradwardine (Bradwardine 1495b, II, 1, concl. 8: «linea diagonalis quae ducitur ab angulo ad angulum [...]in quadrato vocatur diameter»). Una fonte chiara è Pisanus 1862, 2. Alla fine del Quattrocento si trova ancora il termine diametro per designare la diagonale del quadrato nell'opera di Luca Pacioli: «Si ha costume di parlare di diametro anche per i quadrati: ecco (è) perché, al fine di evitare qualunque equivoco, si dice diametro del cerchio e diametro del quadrato per differenziarli» (Pacioli 1509, I, 133). Cfr. Da Novara 2005, X, 7, add.; Bradwardine 1495b, III, 4, concl. 3. Sul tema, cfr. Giusti e Maccagni 1994.

[7] Per «conosciuto» s'intende espresso numericamente.

ho posto[8](cfr. figura 1).

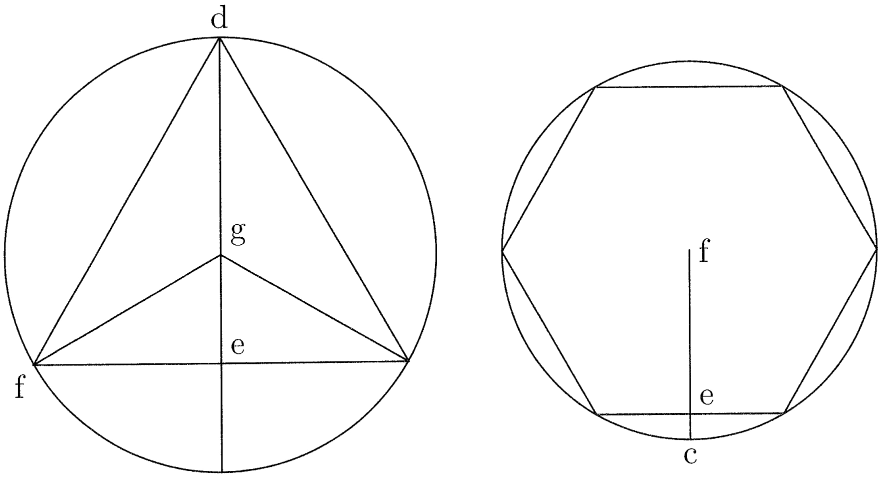


fig. 1

È evidente che il rapporto tra il lato dell'esagono e il semidiametro del cerchio circoscritto al triangolo isoperimetrico è noto mediante i quadrati, poiché, se il quadrato di *dg* è 4, allora il quadrato del lato dell'esagono isoperimetrico è 3, dato che il lato dell'esagono è uguale alla metà della corda sottesa alla terza parte della circonferenza dello stesso cerchio. È noto, di conseguenza, il quadrato di *ed*, poiché, se il quadrato di *dg* è 4, il quadrato di *ed* è 9, essendo *dg* il doppio di *ge*. Così sarà noto anche *fe*, dal momento che esso è un lato dell'esagono il cui quadrato sta a 3 come il quadrato di *dg* sta 4; allo stesso modo sarà pertanto noto *ec*. Le linee *ed* e *ef* saranno così note[9]; e poiché i triangoli EGL e ECN sono equiangoli, i loro lati hanno la stessa proporzionalità[10]; dunque *ge* sta a *el* come *ce* sta a *en*[11] (cfr. figura 2).

4. Dobbiamo quindi trovare due grandezze di cui la maggiore stia a *eg* come la minore a *ec* e, precisamente, in modo tale che, se si sottraggono la maggiore da *ed* e la minore

---

[8] La fig. 1 risulta dal trasferimento su un quadrante di due altre figure. Il seno *ef* del cerchio grande di sinistra (che è anche il semilato del triangolo inscritto) diventa il raggio *cf* del cerchio di destra, circoscritto all'esagono. A sinistra, $dg(r_3)$ è il raggio del cerchio circoscritto al triangolo; $ge(\rho_3)$ è il raggio del cerchio inscritto al triangolo; $ef(\frac{s_3}{2})$ è un semilato del triangolo. Nella seconda figura $cf(r_6)$ è il raggio del cerchio circoscritto all'esagono; $ef(\rho_6)$ è il raggio del cerchio inscritto all'esagono; *ce* è la differenza dei due raggi $(r_6 – \rho_6)$. Nella figura 2 questi elementi diversi sono riportati sul lato del quadrante. Qui Cusano inverte *c* ed *e*.

[9] $eg = r_3 – \rho_3$; $gd = r_3$; $ec = r_6 – \rho_6$; $cf = r_6$. Da ciò: $ed = 2r_3 – \rho_3$; $ef = 2r_6 – \rho_6$.

[10] Cusano usa il termine «proportio». Si è preferito qui tradurre il termine latino con «proporzionalità», nella scia di Pacioli 1494, il quale molto probabilmente aveva letto i lavori di Cusano, così come le opere di Archimede tradotte in latino, tra il 1449 e il 1453, da Iacopo da San Cassiano (Iacobus Cremonensis). Nel 1489 Pacioli si trova a Roma, e Pierleone da Spoleto lo introduce nelle corti cardinalizie. Cfr. Giusti e Maccagni 1994; Giusti e Martelli 2010 (in part. Ulivi 2010); Esteve e Martelli 2011. La scelta della traduzione adottata è dovuta al fatto che, stando alla definizione attuale di proporzione, tra due grandezze c'è rapporto («habitudo»), e non proporzione, la quale ha luogo invece tra più rapporti: date le grandezze A, B, C, D, con A, B omogenee e C, D omogenee, si dice che sono in proporzione se il rapporto tra A e B è uguale al rapporto tra C e D. Cusano utilizza i termini «habitudo» e «proportio» con una certa leggerezza. In seguito si tradurrà tale espressione con «linee proporzionali», per rendere la lettura del testo più scorrevole.

[11] Sul triangolo: $dg^2 = 4$, per cui $dg = 2$; $ge = \rho_3 [= r_3 – \rho_3] = 1$; $ef = \frac{s_3}{2} = \sqrt{3} [= s_6]$. Sull'esagono, $cf = r_6 = \sqrt{3}$; $ef = \rho_6 = \frac{3}{2} ce = r_6 – \rho_6 = \sqrt{3} – \frac{3}{2}$.

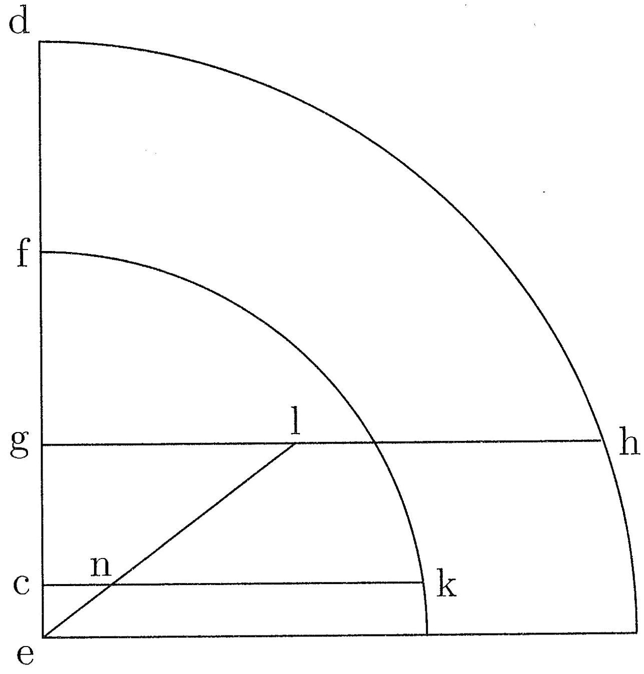


fig. 2

da *ef*, le parti restanti siano uguali. Questa parte restante è il semidiametro del cerchio isoperimetrico a un poligono esagonale o a un poligono con tre lati, entrambi isoperimetrici[12]. Ora, poiché il rapporto tra il perimetro del poligono e *de* è noto e il rapporto tra il semidiametro del cerchio isoperimetrico e *de* è noto, allora si potrà conoscere il rapporto tra il diametro e la circonferenza nel modo in cui è possibile conoscere. E cosi saprai che il numero non può cogliere ciò che cerchi, qualsiasi cosa esso sia, sicché l'intelletto comprenda l'ignoranza e il limite della ragione calcolante.

5. Risulta chiaro, da quanto detto, che è possibile cercare il rapporto tra una qualsiasi corda e l'arco e il diametro. Infatti, se al posto di un esagono si mette un qualsiasi poligono, è evidente che è possibile ricavare tutto ciò che si ricava nell'esagono. Per capirlo, descriviamo un semicerchio il cui semidiametro sia uguale al semidiametro del cerchio circoscritto al triangolo; traccia il semidiametro *dg* dal centro *g* alla metà dell'arco, e indica sull'arco che si estende da *d* [verso destra e verso sinistra] l'arco che corrisponde ai lati del poligono che sono le corde che dobbiamo cercare (cfr. figura 3). Posto che tu voglia una corda [che formi con l'arco di circonferenza] un angolo di 45 gradi, segnerai l'arco avente l'angolo di 22 gradi e mezzo. Partendo dal punto *d* e indicando i punti con *s* e *t*, traccia la semicorda da *s* verso *t* che s'interseca con il semidiametro *dg* nel punto *v*; poiché 45 gradi sono un ottavo della circonferenza, quel poligono avrà altrettanti angoli e lati. Traccia, quindi, la linea che va dal centro *g* al punto *s*, dividi la linea corrispondente al perimetro del triangolo in otto parti e fai cadere la metà di una parte parallelamente a *sv*, tra *gs* e *gd*, e sia questa *xy*. Descrivi, poi, un arco al di sopra di *g* con semidiametro *xg*

[12] Si cercano le due grandezze *el* e *en*, tali che: *el* sta a *eg* come *en* sta a *ec*. $\frac{el}{eg} = \frac{en}{ec} = \lambda$; $ed{-}el = ef{-}en = r$; si ha: $el = \lambda$; $eg = \lambda(r_3{-}\rho_3)$; $en = \lambda$; $ec = \lambda(r_6{-}\rho_6)$; $ed = eg + gd = (r_3{-}\rho_3) + r_3$; $ed{-}el = r_3{-}\rho_3 + r_3{-}\lambda(r_3{-}\rho_3)$; $ef = \rho_6$; $ef{-}en = \rho_6{-}\lambda(r_6{-}\rho_6)$; $ed{-}el = ef{-}en = r_3{-}(\lambda{-}1)(r_3{-}\rho_3) = r_6{-}(\lambda{-}1)(r_6{-}\rho_6) = r$. Risulta che $\lambda \approx \frac{4}{3}$.

fino a tagliare *dg*, nel punto *z*.

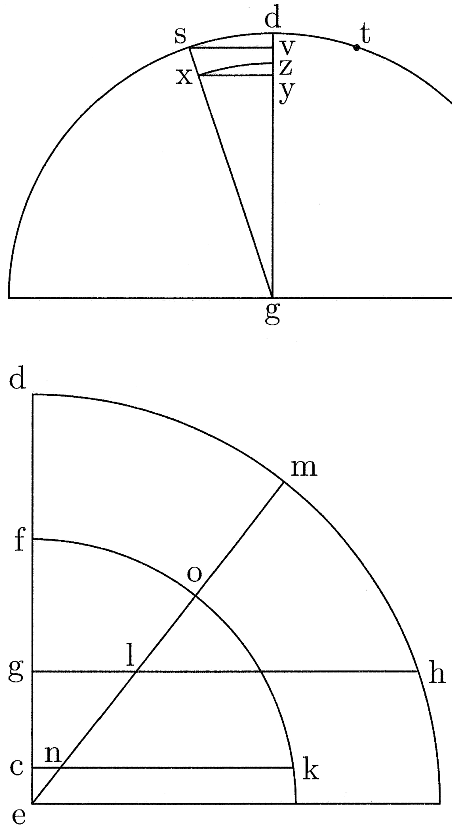


fig. 3

6. Successivamente, descrivi due quadranti, come ho appena fatto, disegnando precisamente il semidiametro *ed* uguale al semidiametro del cerchio circoscritto al triangolo e all'eccesso di questo semidiametro rispetto al semidiametro del cerchio inscritto allo stesso triangolo; segna con *ef* il semidiametro del secondo quadrante uguale alla linea *gx* o *gz*, più *zy* che è la linea del semidiametro del cerchio circoscritto all'ottagono isoperimetrico che eccede il semidiametro del cerchio inscritto allo stesso ottagono. Traccia la corda *gh* in modo che la freccia *gd* sia uguale al semidiametro del cerchio circoscritto al triangolo e un'altra corda *ck* in modo che *fc* sia uguale *xg*, cioè, il semidiametro del cerchio circoscritto all'ottagono[13].

7. Traccia, quindi, la linea da *e* fino a tagliare le circonferenze, i cui segmenti compresi tra l'arco e le sue corde siano uguali, come ho detto, e siano segnate nei punti di intersezione, come in precedenza, con *lm* e *no*. Da qui cerca di conoscere *ef*; *ed* è noto, come detto prima. Anche *lm*, che è uguale a *no*, è noto. Anche *el* ed *eg* sono note e perciò è noto anche il rapporto tra *el* e *eg* e tra *en* e *ec*. Essendo *no* noto, cerchiamo la linea *en*, supponendo che sia una lunghezza qualsiasi. Stando a questa ipotesi, secondo il rapporto noto, anche la lunghezza *ec* sarà necessariamente nota. E se [la misura de]la lunghezza *en*, che ho ipotizzato, è giusta, allora esamino *ef*. Da quanto ipotizzato, *eo* sarà noto e anche

[13] Secondo Cusano, qualunque sia il numero dei lati del poligono si ottiene sempre lo stesso rapporto di proporzionalità tra le corde e gli archi e quindi un valore preciso di r (il raggio del cerchio isoperimetrico ai poligoni). Si può dire che: $r_3-(\lambda-1)(r_3-\rho_3) = r_s-(\lambda-1)(r_s-\rho_s) = r$.

cf. Si sottrae dal quadrato di *cf* o *gx* il quadrato di *xy*, che è noto, e la radice della parte restante sarà *gy*. Così sarà noto *zy*, e, se esso è uguale a *ec*, vuol dire che l'ipotesi era corretta, altrimenti si corregge l'errore, e si ricava ciò che si cerca[14].

8. In questo modo saranno note tutte le corde che gli antichi, nonostante il massimo impegno, non sono riusciti a trovare[15]. Come sai, tutti ammettono di non essere riusciti a indicare fino a questo momento il valore preciso delle corde di un grado, due, quattro, otto, ecc. Grazie allo studio del rapporto tra gli archi e le corde si potrà determinare il rapporto dei lati e degli angoli anche di un triangolo sconosciuto e, per mezzo di tali complementi, scoprire tutto quanto è possibile sapere[16].

9. Riprendendo la figura del triangolo nella prima ipotesi, descrivo intorno al centro *a* un altro cerchio, il cui semidiametro sia uguale al semidiametro del cerchio circoscritto all'esagono isoperimetrico più l'eccesso con cui supera il semidiametro del cerchio inscritto allo stesso esagono (cfr. figura 4). Traccia i diametri che si tagliano ad angolo retto al centro e indica i punti d'intersezione [con la circonferenza] con *b, c, d, e*; traccia la corda, segnata con *fgh*, la cui freccia è uguale il semidiametro del cerchio circoscritto all'esagono. Traccia, poi, la linea *aik* che passa per il punto *a* e per la linea *gh* in modo da ottenere il semidiametro del cerchio circoscritto all'esagono isoperimetrico.

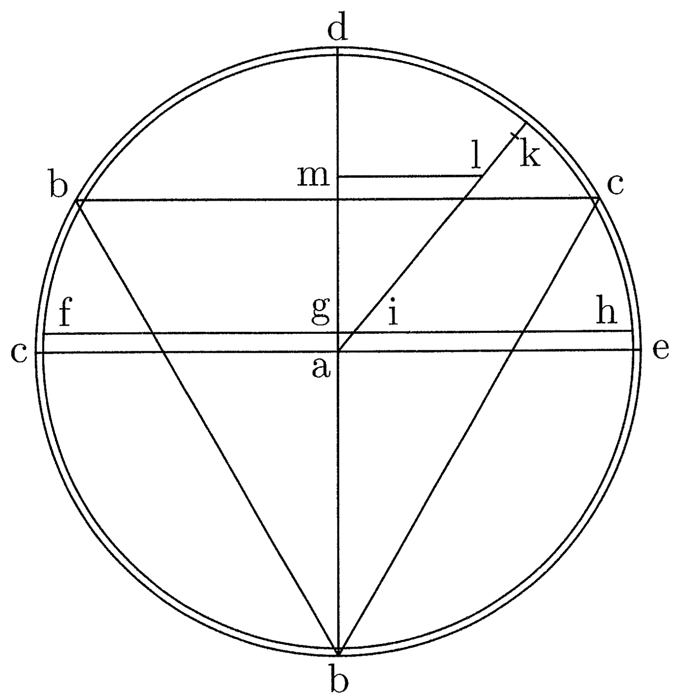


fig. 4

[14] Dato n, si tratta di determinare ρ_n e r_n da ρ_3 e r_3; si ha cioè $r = lm = no = r_3-(\lambda-1)(r_3-\rho_3) = r_n-(\lambda-1)(r_n-\rho_n)$ con $\lambda \approx \frac{4}{3}$. Inoltre, essendo $\frac{u}{2} = 3\sqrt{r_3^2-\rho_3^2} = \sqrt{r_n^2-\rho_n^2}$, si può determinare ρ_n e r_n, e quindi $r_n-\rho_n$.

[15] Cfr. Cusanus 2010j, 9–10; Cusanus 2010i, 36.

[16] Cusano crede che sia sufficiente conoscere l'angolo per determinare il seno di un triangolo qualsiasi, e, inversamente, che sia sufficiente conoscere il seno per conoscere l'angolo. Nell'ultimo paragrafo Cusano ritornerà sulla prima premessa del *De geometricis transmutationibus*.

Segna, quindi, l'eccesso di *cb* della prima figura su *ab* della seconda, indicala sulla linea tracciata per *a* – e sia questa *la* –, traccia la linea perpendicolare da *l* ad *ad*, e indica con *m* il punto di contatto [con *ad*] . Essendo *cb* noto, per la posizione del lato del triangolo inscritto nel cerchio, allo stesso modo è noto *ab*; e lo saranno anche *la* e *ag*. Inoltre, *la* sta ad *am* come *ai* ad *ag* e, allo stesso modo, *la* sta ad *ai* come *ma* a *ag*. Si trovi, quindi, un numero che si rapporti in qualche modo a *la* (noto) in modo che un altro numero stia nello stesso rapporto a *ag* (noto). In questo modo, aggiungendo *la* a questo numero trovato e sottraendo questa somma da *bc*, si otterrà lo stesso resto di quello che si ottiene sottraendo da *ab ag* aggiunto all'altro numero; con ciò hai calcolato il semidiametro del cerchio. Dunque, una volta considerato il rapporto del triplo del lato del triangolo e del doppio del semidiametro, arriverai così, con una leggera approssimazione, al rapporto tra il diametro e la circonferenza[17].

[17] Il cerchio maggiore è il cerchio circoscritto all'esagono aumentato del suo stesso eccesso sul cerchio inscritto. $ad = r_6 + r_6 – \rho_6$; $gd = r_6$; $aik = gd = r_6 = \sqrt{3}$. Cusano vuole determinare il raggio r del cerchio isoperimetrico al triangolo equilatero BBC. Egli pone $ab = r_3 = 2$; $bc = s_3 = 2\sqrt{3}\rho_3$; $ak = r_6 = \sqrt{3}$; $al = 2r_6 – r_3 = 2\sqrt{3} – 2$; $ag = r_6 – \rho_6 = \sqrt{3} – \frac{3}{2}$. Introducendo le costanti $\lambda \times al$ e $\lambda \times ag$, e ponendo $bc – (\lambda + 1)al = ab – (\lambda + 1)ag = r$; e cioè: $r = 2 – \lambda(2\sqrt{3} – 2) = \frac{7}{2} – \lambda(\sqrt{3} – \frac{3}{2})$, si ha: $\lambda = \frac{(2\sqrt{3}-3)}{(2\sqrt{3}-1)}$; $r \approx 2[\frac{(7\sqrt{3}-10)}{(2\sqrt{3}-1)}] = 1,72$ anziché 1,65 e $\pi = \frac{(3\sqrt{3})}{2}[\frac{(2\sqrt{3}-1)}{(7\sqrt{3}-10)}] = \frac{[3(39+32\sqrt{3})]}{94} = 3,01$, che risulta un valore decisamente approssimativo.

Sulla quadratura del cerchio del cardinale Nicola Cusano

Versione originale latina a p. 77.

1. Affermi di essere circondato da diversi studiosi che scrivono sulla quadratura del cerchio, e mi solleciti, ora che godo della necessaria calma, a fornirti un'esposizione soddisfacente di ciò che si può sapere su questo argomento. Apprendi ciò che penso mediante la proposizione che segue. Tuttavia sappi che, per te, ho trattato l'argomento in modo che tu, mediante la via dell'assimilazione[1], una volta messi da parte gli studi matematici, possa dedicarti più facilmente alla teologia[2].

Proposizione

2. Se si può dare una circonferenza di cerchio uguale[3] al perimetro di un dato triangolo, allora il semidiametro di questo cerchio supera della sua quinta parte la linea tracciata dal centro del triangolo al punto del lato che dista dall'angolo un quarto del lato[4].

3. Ci sono coloro che ammettono la quadratura del cerchio. Essi devono necessariamente sostenere che le circonferenze dei cerchi possono essere uguali ai perimetri dei poligoni[5], poiché il cerchio è uguale al rettangolo[6], il cui lato minore è il semidiametro del

---

[1] Il termine «adsimilatio» designa un processo per analogia o somiglianza. Sul tema, cfr. Kremer 2004.

[2] Il destinatario di questo scritto non è noto: potrebbe trattarsi del cardinale Bessarione, ma si tratta di un dato incerto, non supportato da alcuna fonte diretta o indiretta (cfr. Carratelli 1998, 201–225). Nel periodo in cui sembra sia stato concluso il *De circuli quadratura*, ossia il 12 Luglio 1450 (cfr. Liebmann 1929, 261), Cusano si trova a Rieti. Dal punto di vista della produzione letteraria, il 1450 è uno degli anni più fecondi del Cardinale: il 15 Luglio scrive il libro I del *De sapientia*, l'8 Agosto il libro II, il 23 Agosto il *De mente*, e il 13 Settembre, sempre dello stesso anno, pubblica il *De staticis experimentis*. Dall'attenta ricostruzione di Hofmann e Hofmann 1980, nota 1, 201, si può affermare che, da un punto di vista cronologico, questo testo è preceduto soltanto da due scritti: il *De geometricis transmutationibus* e il *De complementis arithmeticis*. Esso presenta un'attenta discussione sulla quadratura del cerchio e, benché non proponga alcun avanzamento di rilievo sulla questione, risulta tuttavia molto interessante per il suo contenuto filosofico: Cusano mette in opera il suo progetto di condurre il lettore alla teologia attraverso la matematica: quadrare il cerchio significa comprendere Dio, sicché l'*ars* matematica si configura un modo, anzi "il" modo più efficace per comprendere l'incomprensibile. Tale *nexus* è tuttavia realizzabile solo mediante una riflessione di natura epistemologica sull'omogeneità delle grandezze e sui limiti della nostra conoscenza, che si conclude, nella seconda parte del testo, con la ripresa delle idee già esposte nel *De docta ignorantia*, il che conferisce al trattato un tono mistico-simbolico, molto diverso dal discorso iniziale.

[3] Il termine «aequalis» è reso con «uguale», lasciando al contesto di chiarire se si tratta di un'uguaglianza di lunghezze, di superfici o di volumi. In questo caso è chiaro che si tratta di un'uguaglianza di lunghezze, ma subito più avanti Cusano utilizza lo stesso termine per intendere un'uguaglianza di superfici, ossia un'equivalenza. La proposizione che Cusano sta enunciando è la prima proposizione del *De geometricis transmutationibus*, che rappresenta l'oggetto del dibattito fra Cusano e i matematici del tempo. Subito dopo egli si serve della prima proposizione de *La misura del cerchio* di Archimede, che Cusano poteva leggere in Bradwardine 1495b, III, 6, concl. 5.

[4] Cfr. Cusanus 2010b, 9.

[5] Con poligono si traduce «figura poligonya», ossia figura costituita da più lati.

[6] Con rettangolo si traduce «quadrangulus». Va sottolineato che in questo, come negli altri scritti matematici, il termine «figura quadrangularis» è equivoco: Cusano lo riferisce tanto al quadrato quanto al rettangolo e al parallelogramma. Di volta in volta, a seconda del contesto, si renderà il termine «quadrangularis» con la figura corrispondente. Sull'utilizzo, da parte di Cusano, del termine «quadrangulus» invece di «quadratus»

cerchio e il lato maggiore è la semicirconferenza[7]. Allorché dunque si rendesse il quadrato uguale al cerchio in tale rettangolo, allora si avrebbe la linea retta uguale alla linea curva. Da ciò si arriverebbe all'uguaglianza tra la circonferenza del cerchio e il perimetro del poligono, come è evidente da sé.

4. Queste persone ammettono anche l'argomento seguente, senza il quale essi non arriverebbero a nulla, e cioè che: dove si può dare un maggiore e un minore, si può altresì dare un uguale. Poiché si può dare un quadrato maggiore di un cerchio – come è quello circoscritto – e uno minore – come è quello inscritto –, allora se ne può dare anche uno uguale, che non sarà né circoscritto, né inscritto, ma inscritto e circoscritto allo stesso tempo. Lo stesso argomento essi ammettono per le circonferenze: poiché si può dare una circonferenza di cerchio maggiore del perimetro di un triangolo – come è la circonferenza del cerchio circoscritto al triangolo –, e una minore del perimetro del triangolo – come è la circonferenza del cerchio inscritto –, si può dare anche una circonferenza uguale al perimetro di un triangolo, e questo cerchio non è né circoscritto né inscritto, ma circoscritto e inscritto allo stesso tempo.

5. Ci sono anche coloro che negano la quadratura del cerchio, e questi negano tutto ciò che è stato ora detto. Essi affermano infatti che questo argomento – dove si può dare un maggiore e un minore si può dare un uguale – non vale in matematica: infatti, si può dare un angolo di incidenza maggiore dell'angolo retto e uno minore dell'angolo retto[8] e tuttavia mai un angolo uguale[9]. Dunque, questo argomento non vale nelle grandezze incommensurabili. Se infatti si desse un angolo di incidenza maggiore di una parte aliquota[10] dell'angolo retto e minore di un parte aliquota dell'angolo retto, allora si darebbe anche un [angolo] uguale. Ma, siccome l'angolo di incidenza non ha proporzionalità[11] con l'angolo retto, esso non può essere maggiore o minore di una parte aliquota dell'angolo retto, e dunque mai uguale[12]. E poiché nessuna proporzionalità può esistere fra una su-

---

e sull'influenza dalla terminologia matematica medioevale, cfr. Hofmann 1966, 98–136, spec. 105.

[7] Cfr. Cusanus 2010b, 36, 7–16.

[8] Bisogna intendere qui «rectus» nel senso di rettilineo, più che di ortogonale: si tratta cioè dell'angolo formato dall'intersezione di due rette.

[9] Come sottolinea Nicolle 1998, nota 4, 34, Cusano si riferisce qui a una discussione sul principio di omogeneità delle grandezze, di cui tuttavia non indica i protagonisti. Tale principio è stato stabilito nell'antichità da Eudosso e da Archimede (cfr. Gardies 1988). Il rifiuto della proposizione secondo cui «se si può dare un maggiore e un minore allora si può altresì dare un uguale» si trova in Da Novara 2005, III, 15 e in Bradwardine 1495b, II, 3, concl. 7.

[10] Per «aliquota» s'intende: contenuta un numero intero di volte, ossia un sottomultiplo intero. Cfr. Bradwardine 1328, 68: «pars autem aliquota est illa quae, aliquotiens sumpta, reddit aequaliter summum suum. Pars vero non-aliquota est illa quae nullatenus, aliquotiens sumpta, reddit aequaliter summum suum» («Una parte aliquota è invero quella che, presa un determinato numero di volte, dà come risultato il suo tutto. Una parte non aliquota è quella che, presa un qualsiasi numero di volte, non dà come risultato il suo tutto»). La citazione si trova in Clagett 1964–1984b, 493.

[11] Cusano usa il termine «proportio». Si è preferito qui tradurre il termine latino con «proporzionalità», nella scia di Pacioli 1494, il quale molto probabilmente aveva letto i lavori di Cusano, così come le opere di Archimede tradotte in latino, tra il 1449 e il 1453, da Iacopo da San Cassiano (Iacobus Cremonensis). Nel 1489 Pacioli si trova a Roma, e Pierleone da Spoleto lo introduce nelle corti cardinalizie. Cfr. Giusti e Maccagni 1994; Giusti e Martelli 2010 (in part. Ulivi 2010; Esteve e Martelli 2011). La scelta della traduzione adottata è dovuta al fatto che, stando alla definizione attuale di proporzione, tra due grandezze c'è rapporto («habitudo»), e non proporzione, la quale ha luogo invece tra più rapporti: date le grandezze A, B, C, D, con A, B omogenee e C, D omogenee, si dice che sono in proporzione se il rapporto tra A e B è uguale al rapporto tra C e D. Cusano utilizza i termini «habitudo» e «proportio» con una certa leggerezza. Quando in seguito si leggerà «linee proporzionali», ciò è stato fatto solo per rendere la lettura del testo più scorrevole.

[12] Nel Medioevo per angolo di incidenza si intende l'angolo formato dall'intersezione di un arco e una retta, all'interno dell'arco, mentre per angolo di contingenza quello formato dall'intersezione di un arco e una retta, all'esterno dell'arco, ossia fra l'arco e la tangente. Un angolo retto (nel senso di ortogonale) può dun-

perficie circolare e una superficie rettilinea[13], così come non può esistere fra l'angolo di incidenza e l'angolo retto, allora anche qui l'argomento non è valido[14].

6. Ciò è chiaro da quanto segue: ogni grandezza riducibile in un'altra si comporta necessariamente in modo tale che una qualunque parte dell'una possa essere parte dell'altra[15], essendo il tutto nient'altro che la somma delle sue parti. Ma una lunula[16], che è ricavata dal cerchio tramite una linea retta, non può essere ridotta, rispetto ai suoi angoli d'incidenza, che sono parti della sua grandezza, in una figura rettilinea: dunque, neanche rispetto alla sua totalità[17]. È altrettanto evidente che se un cerchio è riducibile in un quadrato, allora necessariamente le sue lunule saranno riducibili in figure rettilinee; ma poiché la prima è impossibile, allora la seconda, da cui essa deriva, deve essere altrettanto impossibile. È dunque chiaro che il semicerchio non può essere ridotto a una figura rettilinea, e

---

que essere definito come la somma di un angolo di incidenza e di un angolo di contingenza. L'angolo di contingenza, per quanto piccolo, è considerato all'epoca come una grandezza, e, come tale, è «divisibilis in infinitum», ossia suscettibile di aumento e diminuzione continui, a seconda che il raggio dell'arco aumenti o diminuisca (cfr. Bradwardine 1495b, II, 4, concl. 6).

Ciò dà luogo a una difficoltà insormontabile: essendo l'angolo di contingenza un angolo "infinitesimale", l'angolo di contingenza è fondamentalmente incommensurabile all'angolo di incidenza e all'angolo rettilineo, e incommensurabili sono pure l'angolo di incidenza e l'angolo rettilineo (cfr. Bradwardine 1495b, II, 4, concl. 7). La questione di cui discute Cusano non è come calcolare la progressione continua verso l'infinitamente piccolo di un angolo di contingenza, bensì com'è possibile porre nella medesima proporzione grandezze curve e grandezze rettilinee. Cfr. Wertz 2001.

[13] Per «superficie rectilinea», Cusano intende una superficie delimitata da lati dritti. Cusano parla anche di «figura rectilinea» sempre per intendere una figura delimitata da linee diritte.

[14] Cfr. Da Novara 2005, III, 15.

[15] Cfr. la definizione 1 di Eudosso posto all'inizio del libro V degli *Elementi* di Euclide: «Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ», («Una grandezza è parte di una grandezza, la minore della maggiore, quando essa misuri completamente la maggiore») (Euclide 2007, 975).

[16] Per lunula Cusano non intende una porzione di cerchio delimitata da due archi di cerchio di raggio diverso (come per Ippocrate di Chio), ma una porzione di cerchio delimitata da una retta, ossia un segmento circolare. Questa concezione deriva da Bradwardine 1495b, III, 6, concl. 5: «Aliam probationem minoris tangit Aristoteles per portiones lunares, quam tamen reputat in aliis locis philosophiae insufficientem, et ideo de ea non curo ad presens». Cfr. anche De Muris 1998, VI, 25–32, 259–266. È tuttavia parimenti possibile che Cusano intenda per lunula non una superficie, bensì la lunghezza della circonferenza compresa tra la circonferenza e la linea retta. Qui, visto il contesto, sembra più plausibile la prima ipotesi, ossia che Cusano consideri la lunula come una superficie, sebbene le oscillazioni terminologiche e i presupposti cusaniani rendano problematica un'interpretazione univoca. Stessa cosa si ritrova in Cusanus 2010i, 81.

[17] Cfr. Cusanus 2010i, 71–77.

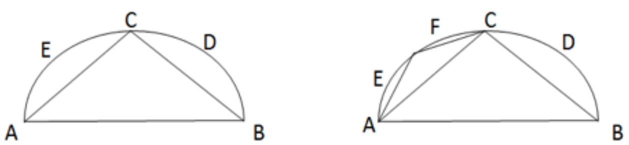
di conseguenza non possono esserlo né il cerchio né alcuna sua parte[18].

7. Ciascun angolo d'incidenza supera un altro o è superato da un altro di una quantità pari a un angolo rettilineo, con il quale non può avere alcuna proporzionalità. Da ciò deriva che tutte le porzioni di cerchio delimitate da linee rette non sono in alcun modo proporzionali al cerchio. E poiché la porzione maggiore è quella delimitata dal [semi]diametro, allora tutte le altre non sono ad esso proporzionali. Dunque, non può essere ricavata alcuna parte aliquota dal cerchio attraverso tali linee, perché questa parte non avrebbe alcuna proporzionalità con la porzione maggiore, cioè con il semicerchio. Ebbene, questo argomento non vale: si ricavino una lunula maggiore di un terzo del cerchio e un'altra minore di un terzo del cerchio, e dunque una uguale a un terzo del cerchio. Ne consegue che le porzioni che sono delimitate da una linea retta minore del diametro non sono in alcun modo riducibili a figure rettilinee, perché esse sono parti aliquote del cerchio, e perché ne deriverebbe la quadratura del cerchio, se esse potessero essere ridotte a figure rettilinee[19].

8. Da ciò deduci che tutto ciò da cui segue la quadratura del cerchio è impossibile. Il cerchio ha dunque, per la sua singolarità, la seguente proprietà: come non è possibile ridurre un angolo di incidenza in un angolo rettilineo, allo stesso modo non è possibile ridurre un cerchio in una figura rettilinea. Come si dà un angolo rettilineo maggiore dell'angolo di incidenza di una quantità pari all'angolo di contingenza, che è una quantità divisibile solamente nel suo genere, dato che per ogni angolo di contingenza si possono dare un angolo di contingenza maggiore e uno minore, così, tuttavia, dal momento che l'angolo di contingenza è minore di ogni angolo rettilineo, si può allora dare un angolo rettilineo maggiore di un angolo di contingenza dato, che tuttavia non è maggiore di una parte aliquota dell'angolo rettilineo. Ugualmente, si può dare un angolo di incidenza minore di un angolo rettilineo dato, ossia minore di una quantità pari all'angolo di contingenza, che, tuttavia, non è una parte aliquota dell'angolo di incidenza, ma è minore di ogni parte aliquota di questo.

9. In questo modo si può dire che, dato un cerchio, si può dare un quadrato che, anche se fosse maggiore del cerchio, non lo sarebbe tuttavia di una parte aliquota di questi, cioè del quadrato. E, dato un quadrato, si può dare un cerchio minore del quadrato, che non sarà

[18]Qui si tratta dell'impossibilità della quadratura del cerchio per approssimazione attraverso le lunule, metodo ripreso più tardi nel Cusanus 2010i, 71–77. Sul procedimento cusaniano della quadratura «per lunulas», cfr. Böhlandt 2002, 72ss, Müller 2005.



Sia ACB un arco di cerchio; $AC = CB$; (angolo di incidenza EAB– angolo rettilineo CAB) $<$ angolo di incidenza EAB; $AF = FC$; (angolo di incidenza EAB– angolo rettilineo FAB) $<$ angolo di incidenza EAB– angolo rettilineo CAB. Se si continua il procedimento, si diminuisce sempre più il resto dell'angolo di incidenza, e tuttavia non si esaurisce mai, poiché un angolo di incidenza non può essere trasformato in un angolo rettilineo. Infatti: $\frac{\text{angolo di incidenza } EAB}{\text{angolo rettilineo } CAB}$ e $\frac{\text{angolo di incidenza } EAC}{\text{angolo rettilineo } CAB}$ è «per definitionem» irrazionale. Ma poiché angolo di incidenza EAB– angolo di incidenza EAC $=$ angolo rettilineo CAB, allora $\frac{\text{angolo di incidenza } EAB}{\text{angolo di incidenza } EAC}$ deve essere irrazionale, e così il rapporto delle superfici dei segmenti circolari è inesprimibile. Su questo punto, cfr. Hofmann e Hofmann 1980, nota 9, 203.

[19] È interessante notare questa inversione – errata – del ragionamento di Cusano: se finora Cusano aveva sostenuto che la quadratura del cerchio è impossibile per l'impossibilità di trasformare porzioni di cerchio in figure rettilinee, ora invece afferma che è impossibile trasformare le porzioni di cerchio in figure rettilinee perché ne conseguirebbe la quadratura del cerchio, il che è impossibile. Tradotto: (non$P \implies$ non$Q$) $\implies$ (non$Q \implies$ non$P$) = Falso.

tuttavia minore di una parte aliquota del cerchio. Di conseguenza, da ciò si avrebbe che si potrebbe dare un quadrato maggiore, ma non di una parte aliquota di esso; e che, dato un qualsiasi quadrato, se ne potrebbe [sempre] dare un altro che si avvicini al cerchio in modo sempre più preciso, sebbene nessuno si avvicinerà ad esso in modo assolutamente preciso e nessuno sarà minore di esso di una parte aliquota del cerchio, e viceversa.

10. Ritengo questa posizione come la più vera. Ora, poiché i poligoni non sono grandezze dello stesso genere del cerchio, anche se si trova un solo poligono più simile, in termini di grandezza, a un cerchio dato rispetto a un altro, varrà tuttavia la regola: nelle cose che ammettono il più e il meno, non si arriva al massimo assoluto nell'essere e nella potenza. Infatti l'ampiezza[20] del cerchio è ciò che è il massimo assoluto in rapporto alle ampiezze dei poligoni, che ammettono il più e il meno, e che, per questo, non raggiungono l'ampiezza del cerchio, come i numeri non raggiungono l'ampiezza dell'unità, e le molteplicità non raggiungono la potenza di ciò che è semplice.

11. I sostenitori della prima opinione credono che sia sufficiente che, dato un cerchio, si possa dare un quadrato che non sia né maggiore, né minore del cerchio. Ogni grandezza è infatti maggiore di una parte aliquota di essa o di un'altra, alla quale è rapportata. Stessa cosa, se essa fosse minore. Ma, se un dato quadrato non è maggiore o minore del cerchio della più piccola parte assegnabile del quadrato o del cerchio, allora lo definiscono come uguale. È così, infatti, che essi hanno concepito l'uguale, ossia come ciò che è uguale a un altro, che non supera un altro, né è superato da un altro, di nessuna parte aliquota, per piccola che sia. Se si concepisce in questo modo l'uguale, penso che sia vero che si possa dare una circonferenza di cerchio uguale al perimetro di un poligono dato, e viceversa. Ma se si concepisce l'uguaglianza in maniera assoluta, per quel che spetta a una grandezza, senza tenere conto delle parti aliquote, allora i secondi avranno ragione nel dire che non si può assegnare una grandezza non circolare perfettamente uguale a una grandezza circolare; e questo per la spiegazione del principio [che è alla base] della proposizione, ossia: se al perimetro dato di un triangolo, etc.[21] Sia sufficiente quanto detto. Grazie a ciò puoi comprendere quanto ho scritto su questo argomento in modo diverso in alcuni altri miei libri[22].

Spiegazione della proposizione

12. Per spiegare la proposizione si consideri il triangolo ABC nel quale è inscritto il cerchio EFG attorno al centro *d* e al quale è circoscritto il cerchio HI (cfr. figura 1). Si tracci la linea *de* in modo che *e* sia il centro fra *a* e *b*; poi si tracci la linea *db*. Si tracci una linea da *d* al centro fra *e* e *b*, e sia essa *dk*. Dico che *dk* è minore del semidiametro del cerchio isoperimetrico al triangolo di un quarto dello stesso *dk*.

13. Si aggiunga quindi un quarto a *dk*; e sia *dl* maggiore di *dk* di un quarto di *dk*. Dico che *dl* è il semidiametro del cerchio isoperimetrico al triangolo. Si descriva quindi il cerchio LMN. Dico che la circonferenza LMN è uguale al perimetro [del triangolo] ABC,

[20] Per rispettare al meglio lo spirito del linguaggio cusaniano, a differenza sia di J. E. Hofmann che traduce «capacitas» con «Fläche» (Hofmann e Hofmann 1980, 40), sia di J.M. Nicolle che traduce il termine latino con «Surface» (Nicolle 1998, 26), si è preferito differenziare i due termini (*capacitas* e *superficies*), utilizzati entrambi da Cusano, rendendo il latino *capacitas* a volte con ampiezza, altre volte, a seconda del contesto, con estensione o superficie.
[21] Cfr. Cusanus 2010j, 2.
[22] Cusano si riferisce qui agli unici due testi che precedeno questo scritto: il *De geometricis transmutationibus* e il *De complementis arithmeticis*.

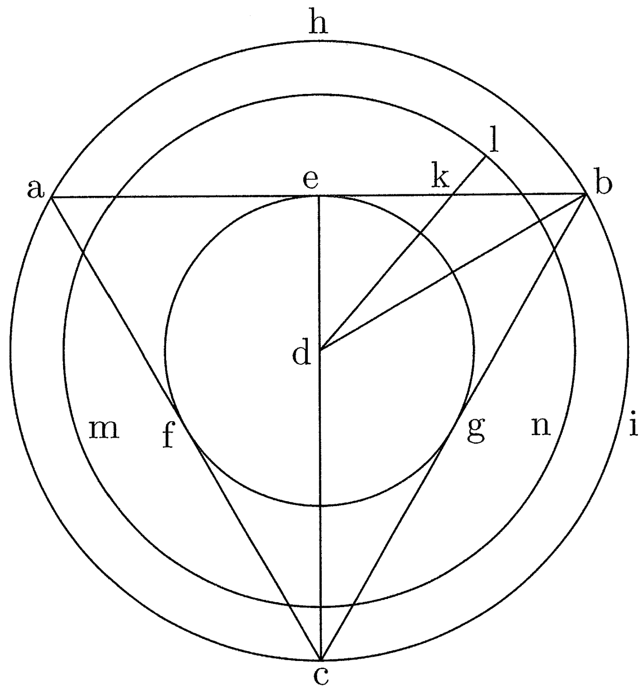


fig. 1

cioè che [la circonferenza] LMN non è né maggiore, né minore della più piccola parte aliquota, qualunque essa sia, del perimetro [del triangolo] ABC.

14. Per dimostrarlo procedo così e dico che, se si deve tracciare una linea da *d* verso *eb*, che è il semidiametro del cerchio isoperimetrico al triangolo, è necessario che essa si rapporti alla somma dei lati del triangolo come il semidiametro del cerchio [si rapporta] alla circonferenza. Ma, poiché il semidiametro non ha alcuna proporzionalità con la circonferenza, né in lunghezza né in potenza, cioè, poiché l'area del quadrato del diametro, che è la [seconda] potenza[23] del semidiametro, non ha alcuna proporzionalità con l'area del cerchio, allora essa non dovrebbe avere neanche alcuna proporzionalità con l'area del quadrato uguale al quadrato della linea della circonferenza, se potesse essere dato. È chiaro che né la linea cercata, né il suo quadrato possono essere proporzionali alla linea *de* o *db*, i cui quadrati sono proporzionali al quadrato di *eb*. Pertanto, non si può tracciare questa linea da *d* a una parte aliquota di *eb* o di *db*, così come la sua estremità [*k*], posta tra *e* e *b*, non potrà distare da *e* di una linea che sia proporzionale a *eb* o *db*; poiché, se così fosse, allora il quadrato sarebbe sempre proporzionale a *eb*, come è evidente[24]. Di conseguenza, non si può assegnare alcun punto su *eb* verso cui si possa tracciare una linea che sia esattamente quella che si sta cercando. Ma sicuramente su *eb* esiste un punto verso cui si può tracciare una linea che non sarà né maggiore né minore di alcuna parte aliquota, per quanto piccola sia, di quella cercata. Di conseguenza dico che, come non è possibile tracciare alcuna linea – che può essere quella che si sta cercando – da *d* a *eb*, verso una parte aliquota di *eb*, allo stesso modo non può esistere una linea tale che sia proporzionale alla linea cercata, come è evidente, visto che i quadrati di tutte queste linee

[23] Poiché Cusano riferisce il termine «potentia» sempre alla seconda potenza, da questo momento si tradurrà «potentia» con «quadrato».
[24] Cfr. Da Novara 2005, X, def. ii; Bradwardine 1495b, III.

sono proporzionali al quadrato della linea *eb*[25].

15. Dico inoltre che, se è vero che nessuna linea è perfettamente proporzionale alla linea cercata, una tuttavia sarà più proporzionale delle altre. E questo è evidente; infatti, anche se tutte non fossero proporzionali a *de* e *eb*, tuttavia, malgrado tutto, una sarà più proporzionale a *eb* e *db* rispetto alle altre, e dunque meno proporzionale alla linea cercata. Perciò, questa, fra tutte, è la più non–proporzionale a *eb, de* e *db*, e la meno non–proporzionale alla linea cercata. Esiste quindi una linea, fra tutte quelle che si possono tracciare da *d* verso le parti di *eb*, che sarà quella meno non–proporzionale alla linea cercata

La ricerca della proporzionale

16. Tuttavia, per cercare la proporzionale, si deve considerare che, fra le linee non–proporzionali, alcune si rapportano come il lato e la diagonale [del quadrato][26], e [in questo caso] non si può mai trovare una proporzionalità così esatta che l'eccesso non sia maggiore di una parte aliquota: per esempio, un decimo della diagonale è minore di un settimo del lato, e l'eccesso è maggiore di una parte aliquota della diagonale e del lato; allo stesso modo in qualsiasi parte minore[27].

17. Un'altra non–proporzionalità è quella fra l'angolo di incidenza e l'angolo rettilineo. Infatti, la linea che corrisponde all'angolo di incidenza non è proporzionale alla linea che corrisponde all'angolo rettilineo, e la metà dell'angolo rettilineo è maggiore della metà dell'angolo di incidenza, e precisamente della metà dell'angolo di contingenza. Questa metà è pertanto minore di ogni parte aliquota, sia dell'angolo rettilineo, sia dell'angolo di incidenza[28].

---

[25] Il ragionamento di Cusano è il seguente:

dl non è proporzionale a *de* o *db*, poiché il diametro non è proporzionale alla circonferenza, benché $de^2 + eb^2 = db^2$.

dl è proporzionale a *dk*, secondo la costruzione ($\frac{dl}{dk} = \frac{5}{4}$). Cerchiamo quindi una proporzione per *dk*.

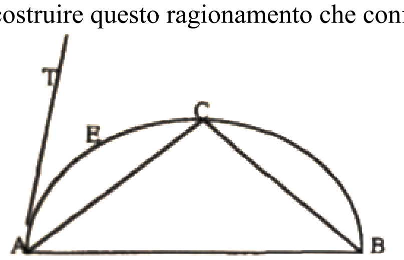
dk non è proporzionale a *eb* o *db*; *ek* non è proporzionale a *eb* o *db*.

fra le possibili linee proporzionali a *eb* o *db*, *dk* non è il segmento cercato o proporzionale al segmento cercato.

[26] Cusano utilizza il termine «diameter» per indicare la diagonale, in base a una etimologia inesatta da «δύο» e «μετρεῖν» (che divide in due) ripresa da Bradwardine (Bradwardine 1495b, II, 1, concl. 8: «linea diagonalis quae ducitur ab angulo ad angulum […]in quadrato vocatur diameter»). Una fonte chiara è Pisanus 1862, 2. Alla fine del Quattrocento si trova ancora il termine diametro per designare la diagonale del quadrato nell'opera di Luca Pacioli: «Si ha costume di parlare di diametro anche per i quadrati: ecco (è) perché, al fine di evitare qualunque equivoco, si dice diametro del cerchio e diametro del quadrato per differenziarli» (Pacioli 1509, I, 71, 133). Cfr. anche Cusanus 2010g, 4 e Cusanus 2010d, 26. Cfr. Da Novara 2005, X, 7, add; Bradwardine 1495b, III, 4, concl. 3.

[27] Riguardo all'incommensurabilità tra il lato e la diagonale del quadrato Cusano si ispira a Da Novara 2005, X, 7, add e a Bradwardine 1495b, III, 5, concl. 3: «Se esistono tre linee proporzionali, la seconda è più potente della prima». Da ciò si evince che la linea media proporzionale fra il lato e il diametro è incommensurabile a ciascuno in lunghezza così come in potenza. Se indichiamo la diagonale D con 10*d* e il lato S con 7*s*, allora $100d^2 = 98s^2 < 100s^2$, e così $d < s$, o $\frac{D}{10} < \frac{S}{7}$, come affermato.

[28] Che la metà dell'angolo rettilineo sia più grande dell'angolo di incidenza della metà dell'angolo di contingenza corrispondente è un'affermazione che non risulta presente in alcun tetso del tempo. Si può quindi ricostruire questo ragionamento che confronta angoli rettilinei e angoli curvilinei:



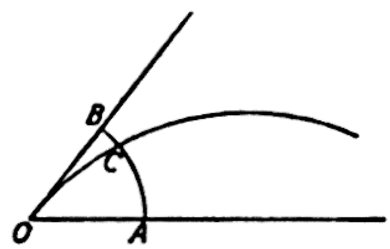
18. Che tuttavia sia possibile trovare un tale rapporto fra le linee risulta chiaramente da quanto segue: infatti, essendo l'angolo una superficie e la linea il limite della superficie[29], è chiaro che, come l'angolo di contingenza è una superficie divisibile, anche il suo limite, ossia la linea che delimita questo angolo in quanto superficie, è divisibile allo stesso modo. Ugualmente, la linea che delimita la superficie dell'angolo rettilineo è divisibile a seconda della divisibilità della superficie. Si può dunque sottrarre dalla linea che delimita la superficie dell'angolo rettilineo la linea che delimita l'angolo di contingenza, e così la linea che delimita l'angolo di incidenza non è proporzionale alla linea che delimita l'angolo rettilineo secondo la linea che delimita l'angolo di contingenza. Pertanto, poiché questa linea che delimita l'angolo di contingenza è minore di qualsiasi parte aliquota della linea che delimita un angolo rettilineo o un angolo di incidenza, la proposizione risulta evidente[30].

19. E in ciò potrai osservare come, prima di qualsiasi divisibilità di una linea retta, la linea non è sottoponibile ad alcuna divisibilità, grazie alla quale una linea retta può tagliare un'altra. Tuttavia, anche se questa linea non è divisibile mediante quel tipo di divisione, con cui una retta è divisa da una retta —e, da questo punto di vista, essa è come un punto estremo irraggiungibile —, essa, tuttavia, è, a suo modo, divisibile mediante una curva. Perciò, quella linea, poiché delimita una superficie, è detta linea divisibile, sebbene possa apparire indivisibile in rapporto a una linea delimitata da un punto. Come, infatti, la divisibilità di una superficie termina nella linea che, rispetto alla superficie, è indivisibile, poiché essa non è divisibile nel modo in cui lo è una superficie, tuttavia la linea che delimita una superficie, considerata in sé stessa, è una grandezza divisibile; allo stesso modo, la divisibilità della linea retta attraverso un'altra retta termina nel punto limite della divisione e della linea, e, in quanto estremità della linea, è indivisibile nel modo in

---

TAB = angolo rettilineo
EAB = angolo di incidenza
TAE = angolo di contingenza
$TAC = \frac{TAB}{2}$
$EAC = \frac{EAB}{2}$
TAC > EAC, poiché TAC = EAC + TAE.

[29] Cusano trae questa definizione dell'angolo come superficie da una fonte che non è né Da Novara 2005, I, né Bradwardine 1495b, I, 1. Una simile concezione si ritrova nell'XI sec., in un testo *De Geometra* che va sotto il nome di Gerbert di Aurillac, il futuro papa Silvestro II (ca. 945–1003): «Angulus est spatium, quod sub duabus lineis se invicem tangentibus continetur» («l'angolo è uno spazio contenuto tra due linee tangenti l'uno all'altra» (Gerbertus 1899, 66). Cusano, qui e altrove, non sembra avere una concezione chiara della superficie, attraverso cui egli vorrebbe rappresentare l'angolo. Riprendiamo la figura posta da Hofmann e Hofmann (1980, nota 18, 205):



Verosimilmente Cusano pensa l'angolo rettilineo AOB intorno al punto O delimitato dall'arco AB e pone OC come tangente a OB. AC sarebbe, per così dire, l'unità di misura per l'angolo di incidenza, CB per il corrispondente angolo di contingenza, a condizione che il raggio dell'arco ACB sia considerato come una grandezza infinitesimale. Cfr. Gerbertus 1899, 4, 3; 2, 2.

[30] Inizia qui una discussione sulla divisibilità di una grandezza di un genere per un'altra di un genere diverso (una linea per una superficie, un punto per una linea, una linea retta per una linea curva, ecc.), in cui Cusano espone un procedimento piuttosto farraginoso.

cui lo è una retta; tuttavia, considerato in sé stesso, è una grandezza divisibile[31]. È dunque possibile che una linea sia minore o maggiore di un'altra, non tuttavia di una qualsiasi parte aliquota o di una parte aliquota maggiore, ma di una parte aliquota minore. Da ciò, puoi ricavare che cosa si debba intendere per linee e punti indivisibili.

20. Dico, dunque, che, anche se si può tracciare da *d* verso *eb* una linea proporzionale a quella cercata, in modo che l'eccesso non sia maggiore di una parte aliquota, tuttavia nessuna linea può essere tracciata in modo che l'eccesso sia minore di una parte aliquota. Dico, inoltre, che, anche se si potessero tracciare innumerevoli linee siffatte, una sarà più precisa dell'altra, ma nessuna sarà in assoluto la più precisa.

21. Vediamo, dunque, quale fra tutte queste linee siffatte l'intelletto umano riesce a cogliere. È chiaro che se la linea, che deve essere proporzionale a quella cercata, è prolungata di una qualsiasi parte aliquota di essa, per esempio di un terzo, un quarto o altro, allora resta sempre proporzionale. Se dunque questa linea è prolungata di una lunghezza pari al rapporto della linea compresa tra la sua estremità su *eb* ed *e* e la linea *ab*, o pari al rapporto della linea compresa tra la sua estremità su *eb* e *b* e la linea *ab*, allora essa resta sempre proporzionale. Dunque, i rapporti o sono tali che per mezzo di uno di essi si giunge alla linea cercata, oppure non lo sono. Se non lo sono, allora, attraverso quella linea che noi presupponiamo come proporzionale alla linea cercata non nota, non potremo sapere nulla di quella cercata. Infatti, poiché la linea cercata non è nota e il prolungamento non ci conduce a essa, ma a una linea maggiore o minore, che non conosciamo, non potremo conoscere l'eccesso della linea cercata completamente ignota.

22. Se dicessi di essere arrivato alla linea cercata attraverso un altro prolungamento e non attraverso entrambi, sarebbe la stessa cosa, poiché noi non conosciamo attraverso quale prolungamento ciò accade e dove questa linea cade, visto che possono cadere infinite [linee] fra *e* e *b*. Se dicessi che i prolungamenti sono uguali e tuttavia minori o maggiori della linea cercata non nota, di nuovo non si potrebbe mai arrivare alla linea cercata.

23. La [linea] proporzionale, di cui l'intelletto umano può servirsi in questo genere di procedimenti per arrivare alla linea cercata, deve essere dunque necessariamente quella che, attraverso entrambi i prolungamenti uguali, che sia l'una o che sia l'altra, si presenta come la linea cercata, e questa è la linea tracciata da *d* al punto medio tra *e* e *b*, cioè a *f*. Ed essa è la sola per la quale il rapporto della distanza da *e* alla linea *ab* è lo stesso del rapporto della distanza da *b* alla linea *ab*[32]; prolungata di questo rapporto, cioè di un quarto della sua lunghezza, essa ci conduce alla linea cercata, e, procedendo in questo modo, è possibile per noi trovare ciò che si cerca, anche se si potrebbe trovare un'altra più precisa attraverso altri procedimenti[33].

---

[31] Si vede qui una difficoltà del ragionamento di Cusano, conseguente dal suo procedimento di annullamento progressivo dell'angolo concepito come superficie: se una superficie si divide in linee, la linea si divide in punti, e il punto stesso sarà divisibile, sebbene sia indivisibile «rectilinealiter». Quest'idea di punto contraddice la definizione euclidea del punto «Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν» (Euclide 2007, I, 1), che si ritrova anche in Da Novara 2005 («punctus est, cuius pars non est») e che pure Cusano sosteneva. Cfr. Cusanus 2010g, 14: «Quantitas autem, quae non potest esse minor, non est quantitas, sed punctus». Nel *De mathematica perfectione* parla di un «continuum […]semper divisibile» (Cusanus 2010j, 4).

[32] La soluzione arriva come una *visio*: il segmento cercato passerà per *f*, la metà di *eb*, perché $\frac{ef}{ab} = \frac{fb}{ab} = \frac{1}{4}$. Questa rivelazione fa da corollario all'ambiguità generale del discorso di Cusano: egli afferma che l'esatta quadratura del cerchio è impossibile da conoscere, ma, allo stesso tempo, tenta una soluzione che fa leva sulla nozione di mediana. Cfr. Cusanus 2010b, 7–16.

[33] Cusano si rende conto che non esiste un numero intero che esprima il rapporto tra la metà del lato *eb* o il raggio della circonferenza circoscritta *db* (o di quella inscritta *de*) al triangolo equilatero iniziale e il raggio *dl* del cerchiò isoperimetrico, così come non esiste un numero intero che esprima il rapporto tra *dl* e *eb* o tra *dk* e *eb*.

24. Ma non pensare affatto che questa sia una pura congettura, così che per nessun'altra ragione l'intelletto umano sarebbe condotto ad asserire ciò; potrai fare tu un sillogismo che, in questo caso, tranne l'estrema precisione e nei limiti della differenza, è ammesso per la più piccola parte aliquota (cfr. figura 2).

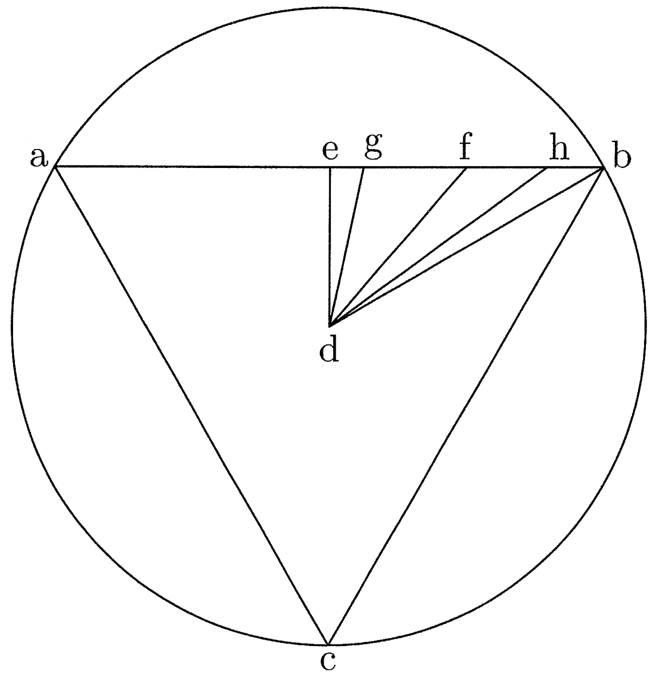
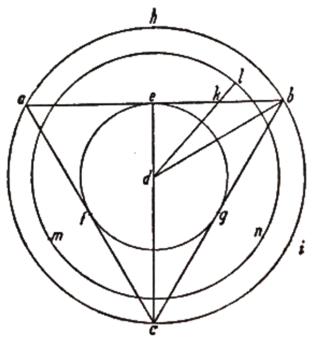


fig. 2

Infatti, se si traccia una linea da *d* a un punto vicino a *e*, per esempio *g*, e la si prolunga secondo il rapporto tra *eg* e *ab*, essa è minore di quella cercata; e se la si prolunga secondo il rapporto tra *gb* e *ab*, essa è altresì minore di quella cercata; e se si traccia un'altra linea da *d* a un punto vicino a *b*, per esempio *h*, e la si prolunga secondo il rapporto tra *eh* e *ab*, essa è maggiore di quella cercata, e, allo stesso modo, secondo il rapporto tra *hb* e *ab*, essa è maggiore di quella cercata, come si mostra qui [dai due lati]. Dunque, si può tracciare un'altra [linea] da *d* ad *eb*, che, prolungata secondo il rapporto tra la linea compresa fra la sua estremità ed *e* e *ab*, non è né più grande né più piccola di quella cercata. Allo stesso



Cusano tuttavia sa che si possono approssimare attraverso numeri razionali questi rapporti tra linee. E pensa che ciò si possa realizzare con la stessa «praecisio» con la quale l'angolo rettilineo si rapporta all'angolo di contingenza, ossia fino alla conformità tra le grandezze infinitesimali. Cusano sa di muoversi su un terreno pericoloso, perciò si serve di una *visio* capace di andare in soccorso alla ragione.

modo, se ne può tracciare un'altra da *d* ad *eb*, che, prolungata secondo il rapporto della linea compresa fra l'estremità e *b* e *ab*, non è né più grande né più piccola di quella cercata. Ma poiché queste due linee, dai cui prolungamenti deve risultare la linea cercata, non possono essere diverse, visto che le linee diverse che si estendono da *d* ad *eb* non possono essere proporzionali con la stessa precisione a quella cercata, ma l'una sarà sempre più precisa dell'altra, allora, essendo prolungate secondo diversi rapporti tra le loro parti ed esse stesse, non possono pervenire ugualmente alla medesima linea cercata. Sarà quindi necessario che una sola sia la linea e uno solo il suo prolungamento, il che è possibile solo nel punto *f*. Di conseguenza, una spiegazione sufficiente di tutto ciò che si può sapere su questo modo di procedere è quella data nella proposizione così spiegata.

25. Tuttavia, poiché ti ho dimostrato tutto ciò che si può sapere sull'uguaglianza dei perimetri delle figure curvilinee e di quelle rettilinee —e cioè in che modo la cosa più vera che si sa è che l'uguaglianza non può essere conosciuta, e che ciò che al massimo si può sapere in questo ambito è rivelato in una breve proposizione —, ho così soddisfatto, per quanto ho potuto, il tuo desiderio. Ebbene sappi questo: tu possiedi il mezzo per cercare tutto ciò che si può sapere in ambito matematico. Nelle matematiche ogni proposizione attraverso cui si consegue l'uguaglianza precisa tra cerchio e quadrato è impossibile, e ogni proposizione, dal cui contrario si inferisce tale precisione, è necessaria. Affermo anzi che chi, nelle matematiche, sa ricondurre ogni ricerca a ciò, ha raggiunto la perfezione di quest'arte. Infatti, non c'è niente di vero in quelle proposizioni dal cui opposto non consegue l'uguaglianza tra il cerchio e il quadrato, e questa è la soluzione più soddisfacente di ogni ricerca matematica.

26. Da quanto ora esposto, ho tuttavia già spiegato ciò che, nella trasformazione delle figure [geometriche] e nei rapporti irriducibili a numeri [interi], si può sapere senza la massima precisione, e tuttavia al di qua di ogni errore, percepibile o ipotizzabile, anche della più piccola parte aliquota. In base a quanto detto sai che il diametro del cerchio sta alla sua circonferenza come due volte e mezzo la radice del numero 1575 sta a sei volte la radice del numero 2700. E, per quanto non sia precisissimo, [tale rapporto] non è tuttavia né maggiore né minore di un minuto o di una qualsiasi parte che si può dare di un minuto. Pertanto, non si può sapere quanto esso manchi della massima precisione, non potendo essere determinato mediante un numero comune[34]. Perciò, questo difetto non è emendabile, poiché può essere colto solamente da un intelletto superiore e in nessun caso attraverso l'esperienza dei sensi. Ora, già solo da ciò puoi capire che il valore più preciso si coglie in un ambito inaccessibile al nostro sapere, la cui conoscenza non ho letto sia stata finora trasmessa.

27. Oltre a ciò, sembra tuttavia utile osservare che, come vedi in questo caso, una figura, come il cerchio, non può essere colta attraverso un'altra, per esempio il quadrato, o viceversa, in modo così preciso da non poter essere colta in maniera ancora più precisa, anche se il difetto non è affatto percettibile. Allo stesso modo, in ogni ricerca del vero dove cerchiamo di conoscere qualcosa attraverso un'altra cosa, ossia ciò che è ignoto attraverso ciò che è noto, bisogna tener conto della stessa cosa, e cioè che si raggiunge il vero in modi vari e diversi, [restando, tuttavia] al di qua della massima precisione; infatti,

[34] Per «comune» Cusano qui intende un numero intero. Cusano dà come valore approssimativo $\frac{(2\frac{1}{2}\sqrt{1575})}{(6\sqrt{2700})}$. Secondo J. E. Hofmann (Hofmann e Hofmann 1980, nota 23, 207) ci sarebbe qui un'ottima approssimazione di π. Nel sistema di numerazione sessagesimale, $\frac{\text{raggio}}{\text{circonferenza}} = \frac{1}{\pi} = \frac{19}{60} + \frac{5}{(60)^2} + \frac{56}{(60)^3} + \cdots$. I due limiti di Archimede sono: $\frac{7}{22} = \frac{19}{60} + \frac{5}{(60)^2} + \frac{27}{(60)^3} + \cdots$ e $\frac{71}{223} = \frac{19}{60} + \frac{5}{(60)^2} + \frac{11}{(60)^3} + \cdots$. Il valore proposto da Cusano è: $\frac{19}{60} + \frac{5}{(60)^2} + \frac{38}{(60)^3}$.

si può raggiungere una maggiore precisione con un procedimento piuttosto che con un altro, ma non c'è nessun procedimento con cui si possa raggiungere la massima precisione, anche se l'errore non è manifesto; questo perché la misura con la quale l'uomo si mette alla ricerca del vero non è in alcun modo proporzionale [al vero], per cui chi si acquieta, accontentandosi di restare al di qua della precisione, non coglie l'errore. E in ciò sta la differenza tra gli uomini, poiché alcuni si vantano di essere pervenuti alla precisione, che i più sapienti riconoscono come irraggiungibile, così che risultano più dotti quelli che hanno conoscenza della loro ignoranza[35].

28. All'inizio ti ho invitato a passare da queste matematiche alla teologia attraverso la via dell'assimilazione; questo, infatti, è il modo più adatto di elevarsi. Le dottrine matematiche, infatti, trattano di ciò che viene colto con le vere forze della mente, in quanto considerano le figure nella loro verità, prive della materia mutevole[36]. Per questo motivo, una volta che si sia lasciata la molteplicità delle figure dietro di sé, ci si eleva più facilmente, attraverso una sorta di assimilazione, alla prima forma, cioè alla forma delle forme del tutto assoluta. Tutti i teologi, infatti, cercano una qualche precisione, in modo da poter raggiungere con essa l'eternità del cerchio, che è semplicissima e assolutamente una. Ma la forza infinita è incommensurabile rispetto a tutto ciò che non è infinito, come l'ampiezza del cerchio resta incommensurabile rispetto a tutto ciò che non è circolare[37].

29. Dunque, come il cerchio è la figura geometrica perfetta[38], che complica in sé tutte le perfezioni delle figure, e la sua ampiezza [complica] l'ampiezza di tutte le figure[39] e non ha nulla in comune con ogni altra figura, dal momento che è assolutamente una e semplice in sé, così l'eternità assoluta è la forma di tutte le forme, che complica in sé ogni perfezione, e la sua forza onnipotente abbraccia tutte le forze delle forme, tutte le specie, senza tuttavia avere niente in comune con tutte le altre forme. E come il cerchio, per il fatto di non avere né inizio né fine, ha una certa somiglianza con l'eternità[40], e nella sua ampiezza, che racchiude le ampiezze di tutte le figure, rappresenta una qualche immagine dell'onnipotenza, e nella sua connessione, mediante la quale la circonferenza è unita all'ampiezza, rappresenta una qualche immagine del nesso infinito e pieno d'amore[41], così noi intuiamo nell'essenza divina l'eternità che ha in sé l'onnipotenza, e in queste il nesso infinito. Nell'eternità intuiamo il principio senza principio[42] e diciamo che esso è il principio paterno. Nell'onnipotenza, che è dal principio senza principio[43], intuiamo il principio illimitato che procede dal principio. Nel nesso infinito intuiamo il nesso pieno d'amore del principio senza principio e del principio che procede dal principio. Per il fatto che nell'essenza divina intuiamo l'eternità, intuiamo il Padre[44]. Per il fatto che intuiamo in questa stessa essenza la potenza dell'eternità, che non può che essere infinita, essendo la potenza dell'eternità, ossia del principio senza principio, intuiamo l'uguaglianza dell'unità eterna, cioè il Figlio del Padre. Per il fatto che intuiamo il nesso pieno d'amore dell'unità eterna e

---

35 Cfr. Cusanus 1972b, I, 10, 51, 1–6. Dopo questo punto inizia una seconda parte di carattere metafisico, cui la trattazione matematica fin qui condotta è in qualche modo propedeutica.
36 Cfr. Cusanus 1983a, 7, 103ss. Cusanus 1988b, 52, 1–7; 63, 6ss. Cusanus 1972a, I, 2, 8, 1; I, 10, 27; I, 12, 33; Cusanus 1994, 3, 75ss.; 5, 23–29.
37 Cfr. Cusanus 1972a, I, 3, 9.
38 Cusanus 1972a, I, 21, 63.
39 Cfr. Cusanus 1994, 5, 23–30.
40 Cfr. Cusanus 1972a, I, 21, 64.
41 Cfr. Cusanus 1972a, II, 10, 154.
42 Cfr. Cusanus 1972a, I, 10, 29; I, 26, 87.
43 Cfr. Cusanus 1988c, 13, 1–10.
44 Cfr. Cusanus 1972a, I, 7, 19; I, 8, 22; I, 26, 88; Cusanus 1982, 24, 71, 4–14; Cusanus 1988a, II, 82, 15–17; 28–33.

della sua uguaglianza, intuiamo lo Spirito. Dunque, nell'unità semplicissima dell'eternità intuiamo l'uguaglianza, fortissima e potentissima, e viceversa, nell'uguaglianza l'unità, e, allo stesso modo, intuiamo nel nesso l'unità e l'uguaglianza. Senza l'unità dell'essere eterno niente può essere. Senza l'uguaglianza di questa unità, niente può essere così com'è. Senza il nesso dell'essere e dell'essere così, niente può essere così com'è. Dunque, senza il principio unitrino, niente può essere[45].

30. Tutto ciò è rappresentato [sotto forma di immagine] nel cerchio: attraverso la sua ampiezza e il nesso strettissimo attraverso cui il cerchio si congiunge massimamente con se stesso, vediamo che esso è coerente e unito per natura. Dopo di che notiamo che tutti i poligoni sono costituiti da un perimetro, da un'ampiezza, e da un nesso [dell'uno e dell'altro] con l'immagine del cerchio, e che tutti i perimetri dei poligoni derivano dalla circonferenza del cerchio, e tutte le ampiezze dei poligoni si allontanano in maniera non–proporzionale dall'ampiezza del cerchio, e la stessa cosa accade per tutti i nessi [degli uni e degli altri]; in questo modo, notiamo che analogo è anche il rapporto tra le [diverse] specie delle cose sensibili e la forma delle forme, così che le specie di queste cose sensibili sono in rapporto a Dio pressappoco come il triangolo, il quadrato, il pentagono, ecc. sono rapportati al cerchio.

31. Tuttavia, ciascuno di questi poligoni ha una perfezione circoscritta, al di fuori della quale non è, né può essere. L'essere del triangolo non può in alcun modo esistere al di fuori della triangolarità. E la stessa cosa vale per il quadrato, ecc. Dunque, ogni specie riposa all'interno del suo ambito, che è racchiuso nel suo perimetro, al di fuori del quale né può, né desidera essere. Infatti, come è ben noto, il triangolo cesserebbe tutto [il suo] essere, se passasse a quadrato. Dunque, dalla propria natura, attraverso la quale ha l'essere e l'essere così, nessuna specie può essere condotta alla distruzione, poiché essa riposa all'interno dei limiti della sua natura specifica. E questa quiete è proprio sua, poiché, entro il perimetro della sua perfezione, ha a suo modo la forza divina, nella quale gode del nesso pieno d'amore[46].

32. Dunque, ogni specie sensibile ha, nel modo che le è proprio, una certa misura in comune con l'eternità, con la potenza e con il nesso d'amore infinito, sebbene in questa misura non vi sia nulla di proporzionale; la stessa cosa vale per ogni poligono che ha una potenza e un'ampiezza limitate, ha un nesso e un'unione deboli, e non può avere alcuna proporzionalità con l'unità circolare dell'eternità[47], con la sua ampiezza inesauribile e la sua unione infinita, anche se tutto ciò che un poligono ha, lo ha in modo tale che, nella natura del triangolo e del quadrato, può partecipare della potenza del cerchio. Il rapporto fra le specie sensibili e la forma delle forme è dunque lo stesso che intercorre fra i poligoni e il cerchio. Inoltre, poiché esistono molti modi d'essere del triangolo, visto che una cosa è il triangolo rettangolo, un'altra è il triangolo acutangolo, e un'altra è il triangolo ottusangolo, e all'interno di ciascuno di questi tipi di triangolo rientrano diversi modi d'essere a seconda della varietà della materia, tutti questi modi sono delle contrazioni individuali[48]. Infatti le specie, considerate veramente in se stesse, rientrano in vari modi a seconda della varietà della materia. Infatti il triangolo è rappresentato meglio e più perfettamente in oro che in acqua o in qualsiasi altra materia labile[49], e inoltre è colto più adeguatamente con

---

[45] Cfr. Cusanus 1972a, I, 9, 10 e II, 7; Cusanus 1959a, 8; Cusanus 1983b, I, 22, 15ss. Cusanus 1988c, I, 34, 1–3; Cusanus 1972b, 1, 6, 2ss. Cusanus 1988b, 33; 37, 14–18.
[46] Cfr. Cusanus 1972a, I, 5, 120.
[47] Cfr. Cusanus 1972a, I, 21, 64.
[48] Cfr. Cusanus 1972b, I, 109, 8–9.
[49] Cfr. Cusanus 1988b, 55, 8–10. Visto il contesto, si è preferito tradurre il termine «labilis» con «fragile», a differenza sia di J. E. Hofmann che traduce con «veränderlich» (Hofmann e Hofmann 1980, 54), sia di J.M.

l'intelletto di come è raffigurato in una qualsiasi materia.

33. Da ciò osserviamo come tutti i poligoni possono essere inscritti a un cerchio, e come, nel cerchio, tutti sono contenuti meglio di come sono nella materia, poiché là essi sono il cerchio. E in ciò vediamo che, se tutti i poligoni possono essere inscritti a un cerchio percepito attraverso i sensi e se il cerchio dell'eternità è l'atto di tutte le possibilità, allora, come tutti i poligoni possono essere inscritti in modo sensibile al cerchio, così, nella specie o forma dell'eternità tutte le specie sono in atto la stessa forma eterna. E come la forma del triangolo ha l'essere più vero nella nostra mente che nella materia variabile, così nella mente eterna o Verbo, dove sono la verità stessa, tutte le specie delle cose hanno l'essere più vero rispetto a quello che possiedono nella diversità individuale[50].

34. Andando ancora oltre, osserviamo che i cerchi sono vari, e che non può che esservi un solo cerchio massimo, verissimo, sussistente in sé, eterno e infinito[51], al quale non ci si eleva attraverso gli altri cerchi, per quanto grandi, poiché, nelle cose che ammettono un più e un meno, non si perviene al limite massimo assoluto[52]. E di questo cerchio infinito consideriamo cose meravigliose e inesprimibili, che altrove ho trattato più diffusamente.[53]

35. Diciamo, dunque, che esistono nature circolari che non possono essere principio di se stesse, poiché esse non sono come il cerchio massimo assoluto, l'unico che è l'eternità stessa[54]. Gli altri cerchi, sebbene non sembrino avere un inizio e una fine, in quanto sono considerati per astrazione dal cerchio percepito attraverso i sensi, sono tuttavia cerchi il cui essere proviene dal primo cerchio infinito eterno, non essendo essi l'eternità infinita stessa, e questi cerchi, in paragone con ii poligoni ad essi inscritti, sono per così dire una specie d'eternità e di perfetta semplicità. Essi hanno, infatti, un'ampiezza che eccede l'ampiezza di tutti i poligoni in modo non proporzionale[55], e sono la prima immagine del primo cerchio infinito, anche se, a causa dell'infinità del primo, non sono ad esso paragonabili. E ci sono nature che hanno un certo movimento circolare e senza fine intorno all'essenza del cerchio infinito, che complicano in loro la forza di tutte le altre specie, che, dalla loro forza complicativa, esplicano, mediante assimilazione, tutte le altre specie, che intuiscono tutto in loro, che si contemplano come immagine del cerchio infinito e che, attraverso questa stessa immagine, cioè attraverso se stesse, si elevano alla verità dell'eternità o all'esemplare stesso: queste sono le nature intellettuali che abbracciano tutto tramite la loro forza intellettuale[56].

36. Ora, tutte le figure cercano, per quanto possono, di misurare l'ampiezza della verità eterna. Ma come tra il finito e l'infinito non esiste alcuna proporzionalità, così Dio resta una precisione sconosciuta[57], al di sopra di ogni ricerca, e così è non soltanto sconosciuto, ma è anche quella stessa precisione sconosciuta che non può essere conosciuta in nessuna cosa conoscibile. Ogni creatura, infatti, si sforza di definire il proprio Dio nei limiti della propria natura. Come un triangolo vorrebbe [per così dire] «triangolare» un cerchio, un quadrato «quadrarlo», e così via per tutti gli altri poligoni, così anche l'intelletto vorrebbe intendere [Dio][58]. Ma, sebbene Dio – che non ha parti, dal momento che è la semplicità

Nicolle che rende il termine latino con «variable» (Nicolle 1998, 32).

[50] Cfr. Cusanus 1988b, 56, 21ss.; 57, 4–8; Cusanus 1973, 13, 4–8; Cusanus 1972a, I, 1, 31.

[51] Cfr. Cusanus 1972a, I, 21, 64; Cusanus 1983b, II, 42, 6–8.

[52] Cfr. Cusanus 1972a, I, 3, 9; I, 6, 15 e 16.

[53] Cfr. Cusanus 1972a, I, 21 e Cusanus 1972b, I, 12.

[54] Cfr. Cusanus 1988a, I, 46, 7ss.

[55] Cfr. Cusanus 1994, 9, 1–4.

[56] Cfr. Cusanus 1988a, II, 80, 6ss.; II, 101; I, 28, 13–17; Cusanus 1972b, I, 4, 12 ss.

[57] Cusanus 1972a, I, 3, 9; I, 2, 8; II, 90.

[58] Cfr. Cusanus 1959b, V, 185, 2–186, 6.

infinita – non ecceda di alcuna parte aliquota nessuno dei vari modi di misurare in maniera specifica, egli eccede tuttavia ogni misura propria della grandezza, dal momento che egli è superiore a qualsiasi modo in cui si possa ricercare. E così eccede tutte le misure più accurate, le frazioni più piccole, poiché è la più sottile di tutte queste frazioni, cosicché non si può raggiungere la sua precisione, né crescendo né decrescendo[59].

37. Tuttavia, a ogni natura è sufficiente raggiungere Dio nella sua specie e nel modo in cui può. Così, infatti, essa [ogni natura] è in quiete, perché, al di fuori della sua specie, non lo ricerca, né ne coglie l'esistenza. Dunque, questa sufficiente comprensione, con la quale essa lo raggiunge nella sua specie e nel modo in cui può, è la sua quiete[60], perché è ciò che sazia il movimento della sua natura.

38. Questo è quanto ci illustra, mediante l'assimilazione, l'indagine che abbiamo condotto sul triangolo nel tentativo di elevarlo fino a eguagliare [il suo perimetro] alla circonferenza del cerchio. E abbiamo raggiunto la quiete mediante l'unico procedimento che, sebbene abbia dei difetti, abbiamo riconosciuto come il più preciso, ossia elevando il triangolo fino a renderlo uguale al cerchio. Questo procedimento non converrebbe alla specie dei quadrati. Se, tuttavia, un quadrato si elevasse, nel modo che gli è proprio, fino a eguagliare il cerchio, potrebbe rallegrarsi di aver raggiunto la quiete, anche se non ci fosse precisione, purché un altro quadrato non fosse più perfetto nella sua specie. Lo stesso vale per le altre figure.

39. Allo stesso modo, ogni intelletto giungerà alla quiete se, nel modo in cui è dato alla sua specie, avrà sentito di essersi elevato fino a uguagliare l'infinito, pur restando la precisione divina sempre inaccessibile[61]. Queste e infinite altre cose potrai ricavare da te. È sufficiente averle trattate in questo modo. Così sia.

[59] Cusanus 1972a, I, 23, 72; Cusanus 2000, 10, 38, 8; Cusanus 1982, 34, 102, 8–14.
[60] Cfr. Cusanus 1988a, II, 74, 2–4; Cusanus 1982, 35, 105, 25; Cusanus 1983b, II, 31, 12–18.
[61] Cfr. Cusanus 1972b, 2, 55, 18.

La quadratura del cerchio
di Niccolò Cusano, cardinale, legato e vescovo di Bressanone

Versione originale latina a p. 87.

1. Sebbene già da molto tempo dallo studio della geometria abbiamo tratto una speculazione più elevata e un'utilità generale, tuttavia, fra le innumerevoli e serie preoccupazioni che ha la legazione apostolica, si è piacevolmente insinuata, tra le conversazioni degli studiosi, l'affermazione secondo la quale è possibile conoscere la quadratura del cerchio, che [tuttavia] non è stata [ancora] trovata. Recentemente, andando a cavallo, abbiamo risolto la questione, e abbiamo messo per iscritto ciò a cui siamo pervenuti[1].

2. Leggiamo che nessuno più di Archimede[2] si è avvicinato a una tale conoscenza. Egli per primo ha mostrato che un rettangolo[3] è uguale a un cerchio in cui il semidiametro è moltiplicato per la semicirconferenza[4]: è necessario che ciò sia proprio così, se si tiene conto che esso è proprio uguale, ossia né maggiore né minore[5]. Infatti, in tutti i poligoni equiangoli[6] e isoperimetrici – e in questo scritto parliamo soltanto di questi –, se si moltiplica il semidiametro del cerchio inscritto per la semicirconferenza, risulterà un rettangolo uguale[7]. Euclide ha mostrato che è anche possibile stabilire facilmente il medio proporzionale fra il semidiametro e la semicirconferenza[8]. Di conseguenza, una volta conosciuto tale medio, che è il lato del quadrato equivalente, si conosce la linea retta uguale

[1] Cusano scrive questo trattato nel 1453 per risolvere il problema della quadratura del cerchio mediante la coincidenza degli opposti. Non disponendo né del simbolismo algebrico, né dell'analisi geometrica, né del calcolo funzionale, la sua dimostrazione poggia unicamente su rapporti proporzionali stabiliti attraverso il metodo degli isoperimetri. Dopo aver esposto rapidamente la questione, Cusano anticipa il principio della sua dimostrazione (ripresa anche nel §5): nei poligoni regolari e isoperimetrici, dal triangolo al quadrato, ecc. … fino al cerchio, la differenza di superficie fra il cerchio inscritto e il cerchio circoscritto è massima nel triangolo, diminuisce nel quadrato, ecc. fino al cerchio, dove essa è *minima sempliciter*. Nel cerchio, infatti, l'inscritto e il circoscritto coincidono. Secondo Cusano basta determinare il rapporto fra questi cerchi, tramite i loro semidiametri, per trovare il rapporto fra la superficie di un cerchio e quella di un quadrato. Egli procede in tre tempi: all'inizio, mostra che le variazioni delle linee esprimono le variazioni delle superfici (fig. 1); poi mostra la regolarità delle variazioni (fig. 2); infine, dopo aver ricapitolato i rapporti fra cerchio, rettangolo e quadrato (fig. 3), riprende la dimostrazione della regolarità delle variazioni (fig. 4). La fine del testo enuncia una generalizzazione trigonometrica del suo principio, e procede a un calcolo approssimativo di π, prima di concludere con un elogio della coincidenza degli opposti.

[2] Cfr. Archimedes 1910b, Prop. 1.

[3] Con rettangolo si traduce «quadrangulus». In questo, come negli altri scritti matematici, il termine «figura quadrangularis» è equivoco: Cusano lo riferisce tanto al quadrato quanto al rettangolo e al parallelogramma. Di volta in volta, a seconda del contesto, si renderà il termine «quadrangularis» con la figura corrispondente. Sull'utilizzo, da parte di Cusano, del termine «quadrangulus» invece di «quadratus» e sull'influenza dalla terminologia matematica medioevale, cfr. Hofmann 1966, 98–136, spec. 105.Cfr. Cusanus 2010c, 3, 5.

[4] Cfr. Cusanus 2010b, 36, 7–9; Cusanus 2010i, 8, 17.

[5] Cfr. Cusanus 2010b, 36, 15, Cusanus 2010c, 11; Cusanus 1994, 12, 26ss.

[6] Si è tradotto qui «isopleura» con «equiangoli» ossia, nel linguaggio attuale, «regolare»; Cusano riprende il metodo degli isoperimetrici attraverso la *Geometria speculativa* di Bradwardine o il *De Ysoperimetris* di Zénodoros tradotta dal greco (cfr. Busard 1980, 1, 6). L'utilizzo di tale metodo è stato oggetto di un'aspra critica da parte di Jean Borrel (Cfr. Buteus 1559). Cfr. Cusanus 2010b, 4, nota 6 e 8. Sul tema, cfr. Gericke 1982, 160–187; Di Meglio 2010, 15–21; Heath 1921, II, 2019–211; Porter 1933.

[7] Cfr. Cusanus 2010i, 10.

[8] Cfr. Euclides 1883–1888, VI, 9; Da Novara 2005, VI, 13; Bradwardine 1495b, III, 4, concl. 4. Cfr. anche Cusanus 2010j, fig. 3; Cusanus 2010i, 8, 4–7.

alla circonferenza del cerchio e la sua quadratura. Questa è una dimostrazione più che certa. Tuttavia, Archimede, credendo di aver trovato quest'ultima parte per mezzo della spirale, si è allontanato dal vero. Infatti, la spirale non si può descrivere se non attraverso un punto che si muove dal centro sul semidiametro nello stesso tempo in cui il semidiametro ruota per descrivere il cerchio[9]. La definizione della spirale presuppone dunque questi movimenti, il cui rapporto è uguale a quello tra il semidiametro e la circonferenza. Si presuppone dunque ciò che si cerca[10]. Sarà allora più facile rendere una linea retta uguale a una linea curva che rappresentare correttamente la spirale.

3. Consideriamo il triangolo[11] e il cerchio aventi la massima ampiezza[12]. Nel triangolo, i semidiametri dei cerchi, inscritto e circoscritto, si rapportano in modo contrario al semidiametro del cerchio, nel quale l'inscritto e il circoscritto coincidono. Essi infatti differiscono massimamente nel triangolo, dove il semidiametro del circoscritto è il massimo e quello dell'inscritto è il minimo, e la loro somma è la minima. Accade esattamente il contrario nel cerchio, dove la loro somma, uguale al diametro del cerchio, è la massima[13]. Per questo sappiamo che tutti i poligoni intermedi, isoperimetrici ed equiangoli, a seconda della loro superficie, si avvicinano in quelle linee per eguagliare il semidiametro del cerchio. Se dunque si segnassero la lunghezza dell'eccesso del semidiametro del cerchio rispetto al semidiametro del cerchio inscritto al triangolo e la lunghezza della quale il semidiametro del cerchio è minore del semidiametro del cerchio circoscritto al triangolo, allora ogni poligono intermedio, a seconda della sua superficie, si comporterà in maniera proporzionale con l'aumento del semidiametro del cerchio inscritto a sé rispetto al semidiametro dell'inscritto al triangolo, e con la diminuzione del semidiametro del cerchio circoscritto a sé dal semidiametro del cerchio circoscritto al triangolo[14]. Infatti, poiché queste lunghezze variano a seconda della diversa superficie, il rapporto di quelle non può essere diverso dal rapporto delle loro superfici. Inoltre è sempre necessario che, come l'eccesso si rapporta all'eccesso, così la differenza si rapporta alla differenza, dal momento che la superficie segue una variazione così come un'altra, e segue questa né più né meno di quella. In tutti i poligoni, dunque, l'eccesso e la differenza si rapporteranno tra di loro in maniera inversa nella stessa proporzione. Di conseguenza, se è dato un unico rapporto e si conoscono queste lunghezze in un determinato poligono noto, si può fare

[9] È verosimile che Cusano non conoscesse il *De spiralibus* di Archimede, ma soltanto l'ottavo capitolo del libro *De arte mensurandi* di de Muris. Cfr. Clagett 1964–1984a, III, 45–88, 309ss. Clagett 1964–1984a, IV, 308–310.

[10] Cusano accusa l'Archimede delle *Spirali* di *petitio principii*, perchè, a suo parere, la determinazione meccanica delle proprietà del movimento generatore della curva spirale esigeva la conoscenza del rapporto fra le diverse unità di misura spaziale del moto rettilineo e del moto circolare, cioè esigeva quella commensurabilità aritmetica fra raggio e circonferenza che doveva essere il risultato e non il presupposto della costruzione stessa. Sul tema, cfr. De Bernart 2002a, 339–382, spec. 370–374.

[11] Cusano non utilizza «triangulum», ma «trigonum». Infatti, la figura che egli costruisce è composta da tre lati; in nessun momento egli considera il valore degli angoli.

[12] Il termine «capacitas» è qui tradotto con ampiezza; tuttavia, per rispettare al meglio lo spirito del linguaggio cusaniano, a differenza sia di Hofmann che traduce «capacitas» con «Fläche» (cfr. Hofmann e Hofmann 1980, 59) sia di Nicolle che traduce il termine latino con «Surface» (cfr. Nicolle 1998, 38), si è preferito differenziare, laddove è possibile, i due termini (*capacitas* e *superficies*), utilizzati entrambi da Cusano, rendendo il latino *capacitas* a volte con ampiezza, altre volte, a seconda del contesto, con estensione o superficie.

[13] Cfr. Cusanus 2010b, 8; Cusanus 2010i, 4–5.

[14] Cfr. Cusanus 2010i, 4–8. Per meglio comprendere il testo, utilizziamo il simbolismo al quale siamo oggi abituati. Se si chiama n il numero dei lati di un poligono, r il semidiametro del cerchio circoscritto, ρ il semidiametro del cerchio inscritto, si trova che se n cresce, allora $r_n - \rho_n$ decresce. Da cui si può ricavare il rapporto seguente fra il triangolo e un qualsiasi altro poligono isoperimetrico e regolare: $\frac{n_3}{n} = \frac{(r_3 - \rho_3)}{(r_n - \rho_n)}$.

lo stesso anche nel cerchio. E poiché nel cerchio l'eccesso e la differenza, insieme, sono uguali al semidiametro [del cerchio] inscritto al triangolo, come si capisce da sé, allora, se, conformemente al rapporto trovato, si dividesse il semidiametro del cerchio inscritto nel triangolo e si aggiungesse il segmento maggiore allo stesso semidiametro del cerchio inscritto al triangolo, si avrebbe il semidiametro del cerchio isoperimetrico e tutto ciò che si cerca.

4. Ti renderemo questa parte più chiara nel modo seguente (cfr. figura 1). Partendo dalla linea *ab* divisa in tre parti, si disegni il triangolo CDE. Sul suo lato *cd* si riporti un quarto di *ab*, ossia *ik*, e da questo si costruisca il quadrato IKLM. Si disegnino il cerchio inscritto e circoscritto; sia *fg* il semidiametro del cerchio inscritto nel triangolo, *fh* quello del circoscritto; sia *ng* quello dell'inscritto al quadrato, *no* quello del circoscritto; si tracci poi la linea *fh* e si segni il suo punto medio con *g*. Si traccino, a partire da *f, g, h*, linee di lunghezza a piacere, e, parallelamente a *fh*, la linea *tn*, il cui punto medio è *aa*; in seguito, si segni con *np* il semidiametro del cerchio inscritto in un poligono isoperimetrico qualunque, per esempio un quadrato, e con *no* il semidiametro del circoscritto. Traccia una linea all'infinito da *g* attraverso *p*, un'altra allo stesso modo da *h* attraverso *o*, e segna con *q* il loro punto d'intersezione. Traccia la linea *sr*, che passi per *q*, parallelamente a *fh*, e segna con *bb* il suo punto medio. Diciamo che *rq* è il semidiametro del cerchio cercato, la cui circonferenza è uguale alla linea retta *ab*[15].

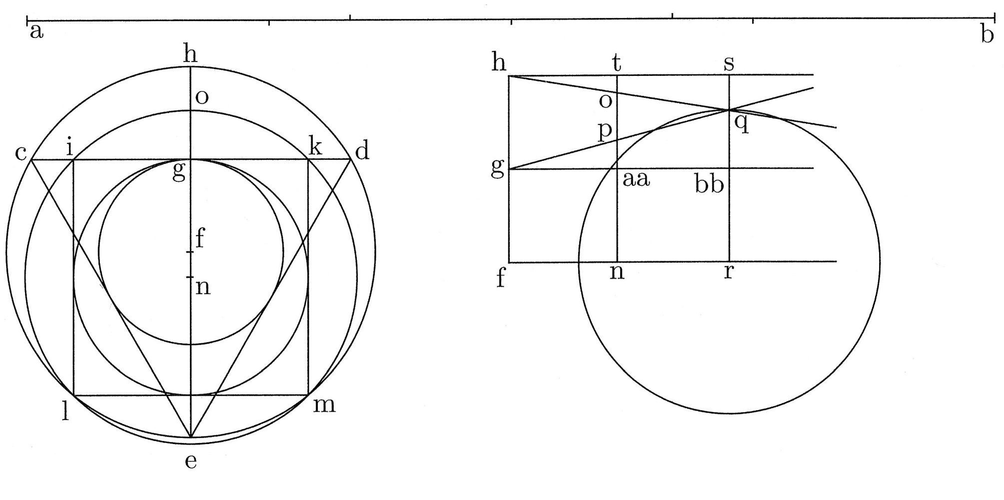


fig. 1

5. Ciò si prova facilmente e in vari modi. Dunque, prendendo la figura precedente, si ponga la linea *g bb* come la differenza tra la superficie del triangolo e quella del cerchio

[15] Nella prima figura, con la linea *ab* divisa in tre parti, si disegna il triangolo CDE. Sul suo lato *cd* si riporta tracciando *ik*, un quarto di *ab*; da là, si costruisce il quadrato IKLM. Si disegnano i cerchi inscritti e circoscritti; siano essi *fg*,ρ_3,*fh*, r_3 per il triangolo e *ng*, ρ_4 *no*, r_4 per il quadrato; si traccia in seguito la linea *fh* e si segni il punto medio con *g*. La seconda figura, accanto alla fig. 1 e da essa tratta, è destinata, con una nuova «tavola delle proporzioni», a mostrare sulla linea *tn* (= *fh*) la regolarità delle variazioni di lunghezza dei semidiametri, seguendo la proporzione sopra definita. Si tracci a partire da *f,g,h* delle linee di lunghezza qualunque, poi, parallelamente a *fh*, si tracci *tn* il cui punto medio è *aa*; in seguito, si tracci ρ_4 il raggio del cerchio inscritto in un poligono isoperimetrico qualunque, per esempio un quadrato, *np*, e r_4, *no*. Si tracci da *g* attraverso *p* una retta all'infinito, e, nello stesso modo, da *h* attraverso *o* una retta all'infinito. Si indichi con *q* il punto d'intersenzione. Poi si tracci attraverso *q*, parallelamemnte a *fh*, la linea *sr*, il cui punto medio *bb*. Si afferma che *rq* è r, il raggio del cerchio cercato la cui circonferenza è uguale ad *ab*.

isoperimetrico; e che da *rs* si muova una linea parallelamente al lato *fh*; è evidente che le linee *hq* e *gq* tagliano tutte le [linee corrispondenti alle] differenze fra i semidiametri dei cerchi inscritti e circoscritti di tutti i poligoni, dal triangolo fino al cerchio, dove [inscritto e circoscritto] coincidono. È evidente anche che quella linea in movimento taglia sulla linea *bb g* contemporaneamente tutte le [linee corrispondenti alle] differenze di superficie fra il triangolo e il cerchio. Infatti, quanto minore è la differenza fra i detti semidiametri, tanto più estesa è la figura; perciò, il cerchio è, fra tutte le figure, quella con la massima superficie, poiché qui [i semidiametri] coincidono, e il triangolo è la figura con la minima superficie, poiché qui [i semidiametri] differiscono al massimo. Sia dunque *tn* la linea in movimento, che taglia la linea *g bb* nel punto *aa*, e sia *po* la differenza dei semidiametri nel quadrato; di conseguenza, se *g bb* è uguale alla differenza della superficie del triangolo e quella del cerchio isoperimetrico, allora *g aa* è uguale alla differenza della superficie del triangolo e quella del quadrato. E poiché *np* è, per quanto premesso, il semidiametro del cerchio inscritto al quadrato, e *aa p* è il suo eccesso rispetto al semidiametro *fg* del cerchio inscritto al triangolo, da ciò, *bb q* sarà l'eccesso del semidiametro del cerchio isoperimetrico rispetto al semidiametro del cerchio inscritto al triangolo. Infatti, come si sa, *bb g* sta a *aa g* come *bb q* sta a *aa p*. Inoltre, le differenze fra i semidiametri dei cerchi inscritti nei poligoni isoperimetrici corrispondono alle differenze delle superfici. Infatti, la differenza delle superfici nei poligoni equiangoli e isoperimetrici non può derivare che dalla differenza dei semidiametri dei cerchi inscritti, poiché, si sa che la superficie risulta dal prodotto del semidiametro in questione – che varia in queste diverse figure – per la semicirconferenza, che resta sempre la stessa. Così, se ponessi la linea *bb s*, cioè [la somma dei] due eccessi dei semidiametri, corrispondente all'eccesso della superficie del cerchio sul triangolo, allora nel quadrato un tale eccesso di superficie corrisponderà alla linea uguale alle due linee *to* e *p aa*, poiché il rapporto fra questa linea e *s bb* è lo stesso di quello fra *p aa* e *bb q*, come sopra. Oppure, se dicessi che la superficie del triangolo è minore di quella del cerchio, come la linea *hg*, allora quella del quadrato sarà minore, come *po*[16].

6. Ma, se ora tu negassi e sostenessi che il semidiametro del cerchio è minore, per esempio che la sua estremità fosse a metà fra *s* e *v*, che è il punto in cui termina la linea *g*, così che *rv* sia il semidiametro del cerchio isoperimetrico, allora, se si prolunga *vs* fino a diventare uguale a *rv* – che è *rx* – e, similmente, si prolunga *fh* fino a diventare uguale a *rx*, cosicché *fz* risulti uguale a *rx*, traccia la linea *zx*, e da *u* le linee su *g* e su *h*, e, laddove intersecano la linea *tn*, segna *2* e *9* (cfr. figura 2). Prolunga *tn* fino a *zx*, e sia *cc n* uguale *rx*. Dico che se il diametro dell'inscritto nel cerchio isoperimetrico aggiunge al semidiametro del cerchio inscritto nel triangolo una linea pari a *bb v*, allora il semidiametro del cerchio inscritto nel quadrato aggiunge *aa 2*. Dunque, se il semidiametro del cerchio inscritto nel quadrato aggiunge una linea pari a *aa p*, allora il semidiametro del cerchio isoperimetrico aggiunge una linea pari a *bb q*. Questo è evidente da sé, se il rapporto fra le linee aggiunte è uguale a quello fra *bb v* e *aa 2* e si conosce la linea aggiunta nel quadrato, che è uguale a *a ap*. Dunque, essa sarà nel cerchio uguale a *bb q*, essendo il rapporto fra *aa p* e *bb q*, uguale a quello fra *aa 2* e *bb v*[17].

---

[16] Secondo la posizione di *q*, i rapporti fra i lati dei triangoli rettangoli simili esprimono sempre la medesima proporzione: $\frac{(r-\rho_3)}{(r_3-\rho_3)} = \frac{(r-\rho_4)}{(r_4-\rho_4)} = \frac{(r-\rho_n)}{(r_n-\rho_n)}$.

[17] Rispondendo a un'obiezione, Cusano riprende la dimostrazione della medesima proporzione sulla figura 2 che non è che una variante della precedente: si tratta in pratica di mostrare che la lunghezza *r* si rapporta alla lunghezza ρ_3 e ρ_4 secondo un rapporto costante. Se si nega e si sostiene che *r* è più piccolo, la sua estremità è al centro fra *s* e *v*, e coincide con il punto finale della linea *g*, in modo tale che *rv* è *r*. Allora, se *vs* si estende in modo tale che esso diventa uguale a *rv* e a *rx*, e se, ugualmente a *rx*, esso si estende tanto

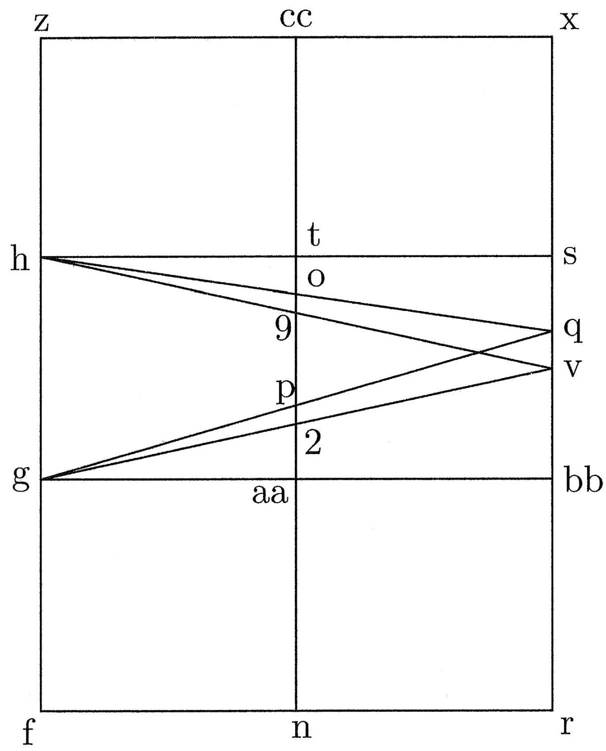


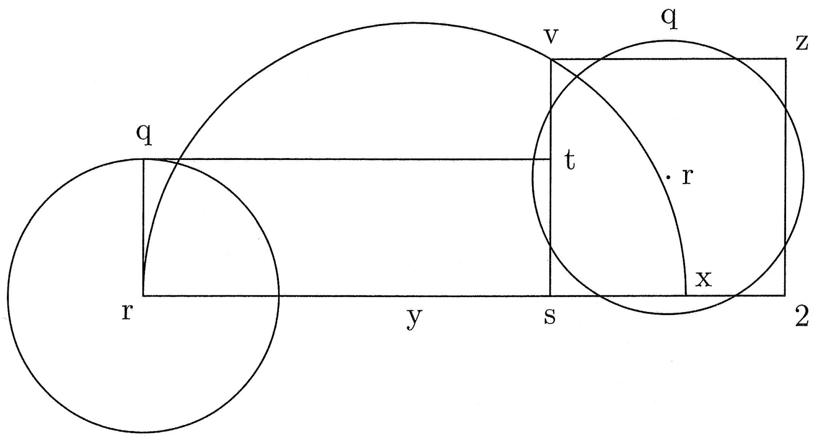
fig. 2

7. Che proprio questo è il rapporto è ciò che si dimostrerà. Infatti, se si pone che *rv* è il semidiametro del cerchio inscritto nel cerchio, allora *vx* sarà il semidiametro del circoscritto. Queste due linee coincidono nel cerchio isoperimetrico. È evidente che *rx* è la linea formata da quei due semidiametri, allo stesso modo *fz* è uguale ad essa ed è formata dai due semidiametri dell'inscritto e del circoscritto al triangolo. Dunque, in tutti i poligoni compresi fra il triangolo e il cerchio, questi due semidiametri sono tali che non saranno né minori di *fz*, né maggiori di *rx*, e quindi saranno sempre uguali. Nel quadrato, *n cc* sarà dunque uguale a questi due semidiametri. E poiché *2 9* è necessariamente uguale a *po*, essendo il triangolo GHQ uguale al triangolo GHV – *qv* infatti è parallelo a *gh* – e allo stesso modo *o 2* e *gh* paralleli, allora *9 2* sarà uguale a *po*, come tu sai da Euclide, prop. 37 del Libro I, e prop. 4 del libro VI[18]. Ma *po* è l'eccesso del semidiametro del circoscritto al triangolo rispetto al semidiametro dell'inscritto al medesimo triangolo, dunque [è uguale a] *2 9*; e, essendo *n 2* uguale a *cc 9*, allora *n 2* sarà uguale al semidiametro dell'inscritto al quadrato, e *2 cc* [sarà uguale] al semidiametro del circoscritto al medesimo quadrato.

quanto *fh*, reso *fh* uguale *rx*, *fz* uguale a *rx*, si traccia la linea *zx* e dopo *v* le linee su *g* e *h*. Laddove esse intersecano la linea *tn*, si segnano *2* e *9*. Si prolunga *tn* fino a *zx*, cosicchè *cc n* risulti uguale a *rx*. Dico che se 2r si aggiunge a ρ_3, l'eccesso è pari a *bbv* $(bbv = 2r\text{–}\rho_3)$ e allora ρ_4 eccede ρ_3 della lunghezza *aa 2*. Dunque, se a ρ_4 si aggiunge *aa p*, allora a *r* si aggiunge a *bb q*. Da ciò, appare che il rapporto della somma è come quella fra *bb u* e *aa 2*. Si conosce la somma nel quadrato, si sa che essa è uguale ad *aa p*. Dunque, essa sarà nel cerchio uguale a *bb q*, e il rapporto fra *aa p* e *bbq* è lo stesso di quello fra *aa 2* e *bb v*.

[18] Da Euclides 1883–1888, I, 37 (*I triangoli costruiti sulla stessa base e fra le medesime parallele sono uguali)*, l'uguaglianza delle superfici dei triangoli dipende dalla medesima base fra le medesime parallele. Da Euclides 1883–1888, VI, 4 (*Fra i triangoli equiangoli, i lati attorno agli angoli uguali sono proporzionali; e i lati che sottendono gli angoli uguali sono omologhi)*, la proporzione delle rette corrisponde ai triangoli dai medesimi angoli.

Se dunque si pone che il semidiametro del cerchio aggiunge una linea pari a *bb v* al semidiametro dell'inscritto nel triangolo, allora aggiunge necessariamente al semidiametro dell'inscritto nel quadrato una linea pari a *aa 2*. Queste linee aggiunte possono essere segnate come gli eccessi delle superficie rispetto alla superficie del triangolo, poiché nei poligoni equiangoli e isoperimetrici l'eccesso delle superfici deriva unicamente da questi [eccessi delle linee]. Il rapporto tra queste linee aggiunte sarà uguale a quello tra *aa 2* e *bb v*, il che è ciò che si doveva provare. E si potrà procedere in tutti i poligoni così come nel quadrato. Da ciò risulta la tesi (cfr. figura 3).



rq il semidiametro del cerchio
rs la metà di *ab*, cioè della circonferenza del cerchio
rqts il quadrangolo uguale al cerchio
sx uguale a *rq*
y il punto medio fra *r* e *x* e centro del cerchio *ryx*
sv il medio proporzionale fra *rs* e *sx*, da VI, 9
svz2 il quadrato che è uguale al cerchio di semidiametro *rq*

fig. 3

8. Altrimenti detto: la superficie del cerchio è massima rispetto alla superficie del triangolo e la differenza fra i semidiametri del cerchio inscritto e di quello circoscritto è nulla, ossia la minima in assoluto, poiché non può esserci una minore. Ma la differenza fra i semidiametri del cerchio inscritto e di quello circoscritto al triangolo è massima e l'eccesso della superficie del triangolo rispetto a se stesso è nullo o il minimo in assoluto. Sia dunque *ab* una qualsiasi linea uguale alla differenza fra i semidiametri nel triangolo nonché all'eccesso della superficie del cerchio rispetto alla superficie del triangolo (cfr. figura 4); si faccia di questa linea il lato del quadrato ABCD, e sia *ab* uguale alla differenza fra i semidiametri più quella differenza minima della superficie del triangolo con la sua propria superficie, sia *cd* l'eccesso della superficie del cerchio rispetto alla superficie del triangolo più la differenza minima in assoluto dei semidiametri. Si tracci la diagonale[19]

[19] Letteralmente «linea diametrale». In tutti gli scritti Cusano utilizza diamentro per indicare la diagonale. Cusano utilizza il termine «diameter» per indicare la diagonale, in base a una etimologia inesatta da «δύο» e «μετρεῖν» (che divide in due) ripresa da Bradwardine (1495b, II, 1, concl. 8: «linea diagonalis quae ducitur ab angulo ad angulum [...]in quadrato vocatur diameter»). Una fonte chiara è Pisanus 1862, 2. Alla fine del Quattrocento si trova ancora il termine diametro per designare la diagonale del quadrato nell'opera di Luca Pacioli: «Si ha costume di parlare di diametro anche per i quadrati: ecco (è) perché, al fine di evitare

bc. Dico che in tutti i poligoni intermedi fra il triangolo e il cerchio, le linee corrispondenti agli eccessi della superficie rispetto alla superficie del triangolo, aggiunti alla differenza fra i semidiametri, non possono essere né maggiori né minori di *ab* o *cd*, come è evidente.

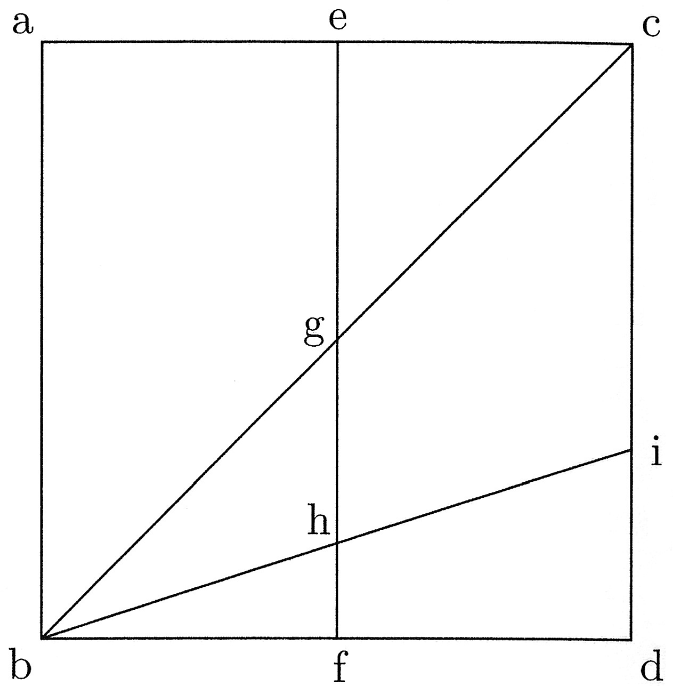


fig. 4

Si tracci dunque la linea *ef*, uguale e parallela ad *ab* e a *cd*, sia essa tagliata da *bc* nel punto *g*; sia *ge* uguale alla differenza fra tali semidiametri nel quadrato; è chiaro che *gf* sarà uguale all'eccesso della superficie del quadrato rispetto alla superficie del triangolo. Il rapporto fra la superficie del quadrato rispetto alla superficie del triangolo sarà dunque uguale all'eccesso della superficie del cerchio rispetto alla superficie del triangolo, cioè come quello fra *gf* e *cd*. Si segni su *fg* l'eccesso[20] del semidiametro dell'inscritto nel quadrato rispetto al semidiametro dell'inscritto nel triangolo, e sia esso *fh*; si tracci una linea da *b* attraverso *h* fino alla linea *cd*, e sia *i* il punto di intersezione. Dico che *di* è l'eccesso del semidiametro del cerchio isoperimetrico rispetto al semidiametro del cerchio inscritto nel triangolo; infatti, il rapporto fra *fg* e *dc* è uguale a quello fra *fh* e *di*. Tuttavia la differenza di superficie fra i poligoni equiangoli e isoperimetrici rispetto alla superficie del triangolo non risulta se non dalla differenza dei semidiametri dei cerchi inscritti [al poligono] rispetto al semidiametro del cerchio inscritto nel triangolo. Il rapporto fra gli eccessi di superficie rispetto alla superficie del triangolo è dunque uguale al rapporto fra la

qualunque equivoco, si dice diametro del cerchio e diametro del quadrato per differenziarli» (Pacioli 1509, I, 71, 133). Cfr. Da Novara 2005, X, 7, add. Bradwardine 1495b, III, 4, concl. 3. Sul tema, cfr. Giusti e Maccagni 1994.

[20] A partire da questo passaggio, Cusano utilizza l'espressione ambigua «additio super» che designa non l'operazione di aggiungere, ma il risultato di questa operazione, in qualche modo il «surplus»; si ritrova l'idea di eccesso, con cui si preferisce tradurre.

differenza tra i semidiametri dei cerchi inscritti [al poligono] e il semidiametro del cerchio inscritto nel triangolo. Da ciò risulta quanto si cercava[21].

Seni e corde

9. Da ciò si potrà ora ricavare la conoscenza perfetta delle corde e degli archi[22]. Se infatti il rapporto tra l'eccesso del semidiametro del cerchio inscritto a un poligono equiangolo e isoperimetrico dopo il triangolo, rispetto al semidiametro del cerchio inscritto al triangolo, e l'eccesso del semidiametro del cerchio circoscritto al triangolo rispetto al semidiametro del circoscritto a questo poligono, è sempre lo stesso, e se questi eccessi, uniti contemporaneamente alla loro differenza, cioè alla freccia[23], sono uguali alla freccia del lato del triangolo, come risulta da quanto detto sopra, allora, una volta conosciuto il rapporto fra questi eccessi, che tuttavia non può essere colto numericamente come non si può determinare la metà della doppia proporzionale[24], l'arte di ogni sapere sulle corde e sugli archi è trovata.

10. Si può trovare tuttavia il rapporto fra gli eccessi per approssimazione numerica in questo modo: sia il semidiametro del cerchio circoscritto al triangolo uguale 14. Il semidiametro del cerchio inscritto sarà 7, il cui quadrato è 49; il quadrato del semilato del triangolo sarà tre volte tanto, ossia 147 e il quadrato del semidiametro del cerchio circoscritto sarà quattro volte tanto, ossia 196. Il semilato del quadrato sarà dunque la radice[25] di $\frac{9}{16}$ [e] del quadrato del semilato del triangolo, ossia la radice di 82 più $\frac{11}{16}$; il semidiametro del cerchio inscritto sarà altrettanto; il semidiametro del cerchio circoscritto sarà la radice del doppio, ossia 165 più $\frac{6}{16}$. Sottrai dunque la radice di 49 dalla radice di 82 più $\frac{11}{16}$. La differenza ottenuta è l'eccesso del semidiametro del cerchio inscritto al quadrato rispetto al semidiametro del cerchio inscritto nel triangolo, che farà poco più di 2. Sot-

---

[21] La proporzione fra la superficie del quadrato rispetto alla superficie del triangolo sarà come l'eccesso della superficie del cerchio rispetto alla superficie del triangolo, cioè come *gf* rispetto a *cd*: $\frac{gf}{cd} = \frac{(f_4 - f_3)}{(f - f_3)}$. Si ha dunque: $ab = ef = cd$; $(f_3 - f_3) + (r_3 - \rho_3) = (f_4 - f_3) + (r_4 - \rho_4) = (f - f_3) + (r_n - \rho_n)$. Si segni su *fg* l'eccesso $\rho_4 - \rho_3$ ossia *fh*; e si segni una linea da *b* attraverso *h* fino alla linea *cd*, e il punto di contatto sia *i*. *di* è l'eccesso di $r - \rho_3$. Il rapporto tra *fg* e *dc* è uguale a quello tra *fh* e *di*: $\frac{(f_4 - f_3)}{(f - f_3)} = \frac{(\rho_4 - \rho_3)}{(r - \rho_3)}$. La differenza di superficie fra i poligoni regolari e isoperimetrici e la superficie del triangolo $(f - f_3)$ non risulta che la differenza $(\rho_n - \rho_3)$.

[22] Il titolo latino *De sinibus et chordis* somiglia al titolo dell'opera di Peurbach, *Tractatus super propositiones Ptolemaei de sinubus et chordis* (prima del 1461) che, secondo Taton 1957–1958, II, 15 è uno dei primi trattati di trigonometria scritti in Europa.

[23] È necessario prendere il concetto di freccia nel senso più ordinario di retta perpendicolare al centro della corda dell'arco. Luca Pacioli la definisce così: «Si chiama freccia questa linea retta che parte dal punto mediano dell'arco di qualche porzione di cerchio per cadere in squadra nel mezzo della sua corda. Essa è detta freccia in relazione con la parte della circonferenza che si chiama arco, per somiglianza con l'arco materiale per il quale sono anch'esso usuali questi tre termini: corda, arco e freccia» (Pacioli 1509, 134).

[24] «medietas duplae». Si tratta di un'espressione idiomatica intraducibile in sè, utilizzata anche ne *Le trasformazioni geometriche* e ne *I complementi matematici* (cfr. Cusanus 2010j, 9–8; Cusanus 2010i, 36). Vescovini 1972, nota10 sottolinea che si tratta di un termine della tradizione matematica medievale con cui Cusano allude alla dimostrazione dell'irrazionalità della $\sqrt{2}$, spesso citata in Aristotele e menzionata anche in Oresme 1966, 160 e in Bradwardine 1495b, III, 1. Oresme chiama il rapporto $\frac{a^2}{b^2}$ la metà di $\frac{a}{b}$ (cfr. Oresme 1966, 454). La *proportio proportionum*, cioè la proporzione tra due rapporti $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ e $\frac{a}{b}$ è espressa dal rapporto $\frac{1}{2}$. Se la *proportio dupla* è il quadrato, la metà, ossia la *medietas duplae*, è la radice. Cusano si riferisce a questa terminologia matematica di Bradwardine, di Oresme e di altri studiosi interessati agli incommensurabili e ai rapporti irrazionali. Cfr. Rommevaux 2003, 401–418; Pedersen 1953, 134ss.

[25] Essendo il simbolo della radice quadrata un'invenzione posteriore a Cusano (Stifel 1544, f–225v), si è preferito non utilizzare tale simbolo nella traduzione.

traendo la radice di 165 più $\frac{6}{16}$ dalla radice di 196, si otterrà poco più di 1. In questo modo otterrai gli eccessi e il loro rapporto è ciò attraverso cui si può ricercare qualsiasi cosa. Se infatti sottraessi questi eccessi dalla freccia del lato del triangolo, cioè 7, allora resterebbe la freccia [del lato] del quadrato. Se dunque dividessi 7 secondo il suddetto rapporto di eccessi, e aggiungessi la parte più grande al semidiametro del cerchio inscritto al triangolo, avrai il semidiametro del cerchio isoperimetrico[26].

11. In questo modo, dal quadrato del lato del triangolo o del quadrato, potrai trovare anche il quadrato del lato di qualsiasi poligono; e, da questa conoscenza e dal rapporto fra gli eccessi si giunge alla freccia e al semidiametro del cerchio inscritto, e da ciò, alla corda. È la massima perfezione dell'arte geometrica, alla quale finora non ci risulta che gli antichi siano pervenuti. L'arte delle trasformazioni geometriche è ora compiuta, un'arte che poco fa, se pure non in maniera esaustiva, abbiamo descritto sufficientemente, dato che ha portato alla quadratura del cerchio[27].

12. E pensiamo che nulla più di ciò che c'è da sapere nelle geometrie resterà nascosto a colui che vuole ricercare con diligenza in questo campo. Ho scritto soprattutto queste cose per mostrare la potenza dell'arte delle coincidenze, attraverso la quale si svela tutto ciò che è nascosto in ogni questione. Infatti, solo e soltanto dalla coincidenza dei semidiametri del cerchio inscritto e di quello circoscritto, diversi in ogni poligono, e coincidenti soltanto nel cerchio, questa ricerca ci ha condotto alla meta.

Gloria a Dio.

[26] Il calcolo finale sul valore di π può comprendersi così: siano S_3, il lato del triangolo e S_4, il lato del quadrato; $r_3 = 14$; $\rho_3 = 7$; il quadrato del semilato del triangolo è $3 \times 49 = 147$; e $\frac{1}{2}S_3 = \sqrt{147}$; S_4, essendo il lato del quadrato, $\frac{1}{2}S_4 = \rho_4 = \frac{(6\times\sqrt{147})}{8} = \sqrt{(82 + \frac{11}{16})}$; $r_4 = 2\sqrt{(82 + \frac{11}{16})}$. Si sottrae $\rho_4 – \rho_3 = [\sqrt{(82 + \frac{11}{16})}] – \sqrt{49} = 9,093 – 7 = 2,093$ (il semidiametro dell'inscritto nel quadrato meno il semidiametro dell'inscritto nel triangolo). Si sottrae $r_3 – r_4 = \sqrt{196} – \sqrt{(165 + \frac{6}{16})} = 14 – 12,830 = 1,170$ (il semidiametro del cerchio circoscritto al triangolo meno il semidiametro del cerchio circoscritto al quadrato). $\frac{(\rho_4 – \rho_3)}{[(\rho_4 – \rho_3)+(r_3 – r_4)]} = \frac{2,093}{(2,093+1,170)} \approx \frac{2}{3}$; $r = [\frac{5}{3}]\rho_3 = 1 + \frac{(\rho_4 – \rho_3)}{[(\rho_4 – \rho_3)+(r_3 – r_4)]}\rho_3 = [1 + \frac{2,093}{(2,093+1,170)}]\rho_3 = (\frac{5,356}{3,263})\rho_3 = 1,647\rho_3$; $ab = 6\sqrt{147} = 6 \times 12,124 = 72,746 = 10,393\rho_3$; $2r = 3,294$; $\pi = \frac{ab}{2r} = \frac{10,393}{3,294} = 3,154$.

[27] Cfr. Cusanus 2010i, 36–38.

I complementi matematici.
Al santissimo Papa Niccolò V. Niccolò Cusano, cardinale di San Pietro in Vincoli

Versione originale latina a p. 93.

1. È talmente grande la potenza del Tuo pontificato, Niccolò V, beatissimo padre[1], che coloro che hanno considerato attentamente la sua forza l'hanno paragonata al potere di rendere quadrato ciò che è tondo e di rendere circolare ciò che è quadrato, quasi che non si potesse dare una [forza] più grande. E poiché tu non solo possiedi la chiave e la potenza del sapere e della suprema gerarchia ecclesiastica, ma, grazie alla tua acutissima intelligenza, sei un eccellente maestro di impareggiabile fama in tutti i campi del sapere, sarai tu a giudicare tra tutti. Grazie alla tua straordinaria diligenza hai fatto moltissimo affinché gli scritti di tutti gli autori che possono essere reperiti, sia latini sia greci, pervenissero a noi tutti con la massima cura, così come non hai trascurato le opere di geometria, che erano state considerate dai nostri antenati degne di ogni onore[2].

2. E, infatti, nei giorni scorsi mi hai dato gli scritti di geometria del grande Archimede, presentati a te in greco e tradotti, grazie al tuo sostegno, in latino[3]; ho ritenuto che fossero

---

[1] Niccolò V (ca. 1397–1455), il cui vero nome era Tommaso Parentucelli, nacque nel 1397 a Sarzana. Egli studiò a Bologna e giunse nel 1426 a Roma. Sotto Cosimo dei Medici prese la direzione della Biblioteca Fiorentina, nel 1444 fu nominato cardinale e vescovo di Bologna, e nel 1447 divenne papa. Umanista e amante delle scienze, il pontefice stipendiò traduttori per realizzare la versione latina di opere greche, fece lavorare filologi alla migliore definizione di testi classici, fece trascrivere e comprare manoscritti. Raccolse oltre milleduecento manoscritti greci e latini, alcuni di eccezionale importanza, che spaziano in molti campi della cultura umanistica, arricchendo così la Biblioteca Vaticana di molti manoscritti. Cfr. Vasoli 1968, 69–121; Meuthen 1989, 421–499; Manfredi 1994.

[2] Il *De mathematicis complementis* è l'opera scientifica principale di Cusano sia per lunghezza sia per contenuto. Di essa si conoscono due versioni: la prima comprende un solo libro, scritto nei primi giorni del settembre 1453; la seconda comprende un secondo libro scritto il 24 novembre 1454. Il primo libro fu redatto in parte a Roma, da cui Cusano si era allontanato alla fine del maggio 1453, in parte a Bressanone, dove il cardinale si recò a fine giugno con la missione di riformare la vita spirituale nella sua diocesi. Il primo libro suscitò le perplessità del suo amico Toscanelli, perplessità che si trovano nella lettera *De quadratura circuli* e si focalizzano sull'ipotesi di una proporzionalità regolare nei poligoni intermedi tra il triangolo inscritto e il cerchio isoperimetrico: «Da ciò, quindi, è chiaro che se il triangolo ha l'ampiezza minima, la prima linea si differenzia al massimo dalla seconda, e se il cerchio ha l'ampiezza massima, la prima e la seconda linea coincidono, e così sarà, con le debite proporzioni, nei poligoni intermedi» (Cusanus 2010i, 7, 1–4). Pare che Toscanelli avesse scosso la certezza di Cusano, tanto che questi decise di inviare la lettera a Peurbach per avere il suo parere. Nel frattempo, egli trovò nuove dimostrazioni, che espose in un secondo libro, in aggiunta al primo. Tuttavia, neanche questi nuovi tentativi soddisfarono gli "specialisti" del tempo, perciò Cusano fece un ennesimo tentativo di rettificazione nella *Declaratio rectilineationis curvae*. Regiomontano, che all'epoca studiava la quadratura del cerchio e conosceva bene quella del cardinale, fu molto critico riguardo a *I complementi matematici*. Il titolo *I complementi matematici* non deve lasciar pensare che si tratti di un'opera integrativa, di rifinura o di completamento. L'intento di Cusano è quello di dare compiutezza e di perfezionare tutta la geometria, risolvendo definitivamente la questione in cui anche il grande Archimede si era imbattutto e aveva fallito, ossia la quadratura del cerchio: «a colui che vorrà applicare ancor di più la propria mente, ciò che non era conoscibile né conosciuto in geometria si paleserà chiaramente. È per questa ragione che tale scoperta merita di portare il nome di complemento» (Cusanus 2010i, 40, 8–10).

[3] La traduzione delle opere di Archimede fu ordinata da Niccolò V a Iacopo Cassiano, detto Iacopo da Cremona (ca. 1395–ca. 1454): questi era un ecclesiastico e per 14 anni fu allievo di Vittorino da Feltre (ca. 1378–1446) e suo successore come educatore dei figli di Ludovico Gonzaga di Mantova (1412–1478).

così degni di stima che soltanto applicandomi molto avrei potuto dedicarmi ad essi con lo stesso impegno [che tu hai profuso]. È così che, studiando e impegnandomi, ho aggiunto ad essi qualche complemento che mi sono permesso di presentare alla Tua santità. Ritengo, infatti, che soltanto Tu sia degno di rendere note a tutti ciò che da tantissimo tempo è rimasto sconosciuto. E credo che da ciò si possa ricavare perfettamente non soltanto ciò che si può sapere e che sempre è stato detto intorno al problema della quadratura del cerchio, ma anche ciò che dà completezza a ogni perfezione matematica.

[LIBRO PRIMO]

3. Secondo tutti coloro che si sono dedicati allo studio della geometria, nessuno più di Archimede si è avvicinato alla quadratura del cerchio. Questi, vedendo che ciò non poteva essere realizzato se non risolvendo una linea curva circolare in una retta[4], cercò di dimostrare il procedimento mediante la spirale[5]. Ma, poiché il rapporto[6] tra il moto di un punto dal centro lungo il semidiametro e il moto di un altro punto che, nello stesso tempo, si muove lungo la circonferenza —rapporto senza cui non potrebbe essere descritta la spirale —è uguale al rapporto tra il semidiametro e la circonferenza, [rapporto] che non è noto, ma che anzi è proprio ciò che si vuole trovare, da ciò si capisce perché [Archimede] non sia riuscito a conseguire tale risultato. Infatti, sarà più facile quadrare un cerchio che descrivere una spirale e tracciarne la tangente alla fine della rotazione. Resta dunque il fatto che, dagli scritti che ci ha lasciato Archimede, questa procedura rimane, ad oggi, ancora completamente oscura. Io, d'altra parte, nonostante abbia letto che molti si sono prodigati invano in questa ricerca, ho iniziato a fare dei tentativi per vedere se per caso questa difficoltà potesse essere superata per mezzo delle coincidenze, di cui ho scoperto la massima potenza in altri campi del sapere. E mi è sembrato che, data la sua possibilità [d'applicazione], che ovunque tutti riconoscono, si potesse conseguire facilmente questa conoscenza nello stesso modo, facendo praticamente ciò che segue.

Dal 1449, a Roma, Iacopo tradusse manoscritti greci su commissione di Niccolò V e nel 1451 fu convocato come esperto per valutare la traduzione dell'Almagesto di Tolomeo procurata da Giorgio di Trebisonda (1395–ca. 1473) e dichiarata inadeguata soprattutto da Bessarione (1403–1472). Anche Iacopo espresse parere negativo e per questo si inimicò Giorgio. Morì tra il 1451 e il 1454. La traduzione di Archimede fu conclusa sicuramente verso la fine dell'estate del 1450, fu condotta sul codice A, che andò nelle mani di Lorenzo Valla (ca. 1407–1457) e sparì nel corso del sec. XVI. I contemporanei, che ignoravano la traduzione duecentesca, senz'altro peggiore, del domenicano Guglielmo di Moerbeke (1215–ca. 1286), accolsero con interesse la versione del Cassiano. Oltre a Cusano, se ne servì Regiomontano, il quale la trascrisse in vista di una propria più accurata traduzione. Servendosi appunto di questa copia (oggi codice Cent. V 15 della Stadtbibliothek di Norimberga), portata da Regiomontano in Germania intorno al 1468, Thomas Gechauff, detto Venatorius (ca.1488–1551) pubblicò la traduzione nell'*editio princeps* del *corpus* di Archimede (Archimedes 1544). L'opera denuncia comunque – specie nella resa dei passi più complessi – limiti evidenti, dovuti probabilmente più all'approssimativa preparazione tecnica del traduttore che a un'imperfetta conoscenza del greco. È anche possibile che alla morte di Cassiano la traduzione non avesse ancora raggiunto la versione definitiva. Come evidenzia Nicolle 1998, nota 1, 82, stando alla ricostruzione di Marshall Clagett (1964–1984a, III, 321–342), Cusano ebbe accesso a questa traduzione e alle sue fonti solo a partire dall'anno 1453; cfr. anche D'Alessandro e Napolitani 2012.

[4] Per «recta» si intende qua, come in tutti gli scritti matematici, la linea dritta.

[5] Cfr. Cusanus 2010j, 1, 2.

[6] Cusano usa il termine «proportio». Si è preferito qui tradurre con «proporzionalità», nella scia di Luca Pacioli, che molto probabilmente aveva letto i lavori di Cusano, così come le opere di Archimede tradotte in latino, tra il 1449 e il 1453, da Iacopo da San Cassiano (Iacobus Cremonensis). Nel 1489, Pacioli si trovava a Roma, e Pierleone da Spoleto lo introdusse nelle corti cardinalizie (cfr. Pacioli 1494; Giusti e Maccagni 1994; Giusti e Martelli 2010 (in part. Ulivi, 19–58); Esteve e Martelli 2011). Cfr. Cusanus 2010j, nota12. Sul procedimento archimedeo tramite la spirale, cfr. Cusanus 2010c, 2, 11–18; Cusanus 2010d, 16, 6–12.

4. Innanzitutto bisogna dire che, in una figura avente più angoli, cioè in un poligono che ha lati uguali[7], il punto equidistante dalla metà e dall'estremità dei lati si chiama centro, e la linea condotta da questo centro al punto medio del lato è il semidiametro del cerchio ad esso inscritto, ed è detta prima linea. E l'altra linea condotta dallo stesso centro fino all'estremità di un lato, cioè, a un angolo qualsiasi, è il semidiametro del cerchio circoscritto in essa ed è detta seconda linea. In ogni poligono queste due linee sono di diversa lunghezza e lo sono tanto più quanto più lungo è il lato. Infatti, il quadrato[8] della seconda linea include il quadrato della prima e con ciò il quadrato della metà del secondo lato, e questo perché il lato del triangolo rettangolo è opposto all'angolo retto, come dimostra Euclide[9].

5. E poiché la prima delle figure rettilinee[10] è il triangolo, in esso la prima e la seconda linea hanno lunghezze massimamente diverse. Tuttavia nel cerchio coincidono, poiché qui il centro si trova a uguale distanza dalla circonferenza; e infatti, la metà e l'estremità del lato coincidono, e c'è un angolo ovunque[11]. Tuttavia, nel triangolo la prima linea è la più corta, la seconda la più lunga. Nel quadrato[12] avente lo stesso perimetro[13], la prima linea è la più corta dopo la prima del triangolo e la seconda è la più lunga dopo la seconda del triangolo e così via. E poiché in tale quadrato la prima è più lunga della prima nel triangolo, se si moltiplica la prima nel quadrato per la metà del perimetro e, similmente, la prima nel triangolo per la stessa metà [del perimetro], è evidente che si ottengono diverse superfici che sono uguali ai poligoni[14](cfr. figura 1).

6. Perciò l'eccesso di quella superficie, che risulta dal prodotto della prima del quadrato per la metà del perimetro, sulla superficie che risulta dal prodotto della prima del triangolo per la stessa metà del perimetro, è [uguale] all'eccesso dell'ampiezza[15] del quadrato sull'ampiezza del triangolo, e così, in tutti i poligoni, dall'eccesso della prima linea di un qualsiasi poligono sulla prima del triangolo isoperimetrico si trova l'eccesso del-

[7] Si è tradotto «figura multiangula» con il termine poligono. Cusano intende qui non soltanto poligoni di più lati, bensì poligoni regolari e precisamente poligoni isoperimetrici, aventi cioè lo stesso perimetro. Cfr. Cusanus 2010b. Anche nel caso di «figura (o superficies) poligoniae», «multiangulae», o «figura quadrata» o «figura circolare» si tradurrà semplicemente con poligono, quadrato, cerchio ecc. a meno che il contesto non richieda diversamente.

[8] Dal momento che è chiaro che Cusano intende per «potentia» la seconda potenza, si tradurrà semplicemente con «quadrato».

[9] Si suppone implicitamente che i poligoni siano tutti dello stesso perimetro (isoperimetrici). Il riferimento è a Euclide, che riguarda in realtà soltanto il pentagono: «Intorno a un cerchio dato circoscrivere un pentagono sia equiangolo che equilatero» (Euclide 2007, IV, 12, 963) e non tutti i poligoni regolari.

[10] Per «figura rectilinea» si intende una figura delimitata da lati dritti. Il termine «figura» è reso a volte alla lettera, a volte con «poligono», a seconda del contesto.

[11] Cfr. Cusanus 2010b, 5, 5–8; Bradwardine 1495b, II, 5, concl. 5 («circulus autem totus est angulus»). Il ragionamento di Cusano s'incentra sull'idea che il cerchio ha ovunque angoli, per cui è come un poligono regolare con un numero infinito di angoli.

[12] Come si è tradotto «trigonus», «triangulus» con «triangolo», così si è tradotto «tetragonus» con «quadrato». Qui si afferma per la prima volta che si tratta di poligoni regolari di ugual perimetro. Il fatto che ρ_n cresce con n crescente mentre r decresce, viene utilizzato infra, I. 4 e in I. 10 ciò viene espresso con delle modifiche.

[13] Per «peripheria» s'intende la linea di contorno. A seconda della figura, si tradurrà con perimetro o circonferenza.

[14] Cfr. Cusanus 2010i, 21 e 10.

[15] Per rispettare al meglio lo spirito del linguaggio cusaniano, a differenza sia di Hoffmann che traduce «capacitas» con «Fläche» (Hofmann e Hofmann 1980, 71), sia di Nicolle che traduce il termine latino con «Surface» (Nicolle 1998, 54), si è preferito in questo caso differenziare i due termini (*capacitas* e *superficies*), utilizzati entrambi da Cusano, rendendo il latino *capacitas* con ampiezza. In altri passi si è tradotto con estensione o superficie.

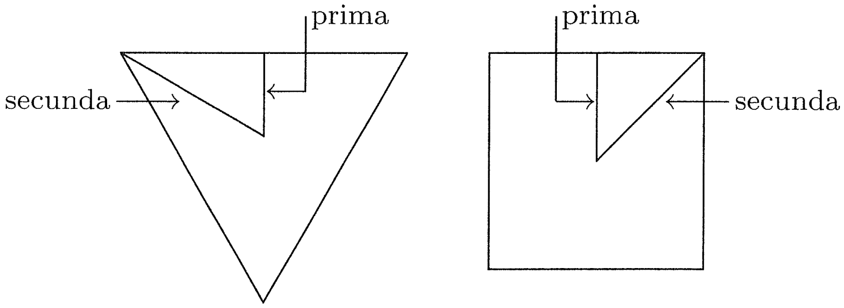


fig. 1

l'ampiezza di questo stesso poligono sull'ampiezza del triangolo. Inoltre, quanto minore è la differenza tra la prima e la seconda linea, tanto maggiore sarà l'eccesso della prima linea del poligono sulla prima del triangolo. E poiché nel cerchio la prima e la seconda coincidono, l'eccesso del semidiametro del cerchio isoperimetrico sulla prima del triangolo è massimo, e perciò l'ampiezza del cerchio è massima rispetto all'ampiezza del triangolo[16]. Perciò, la stessa linea retta, che nel triangolo è estesa lungo i tre lati per formare il perimetro di questa superficie, nel quadrato si estende lungo i quattro lati, formando il perimetro del quadrato, e [si estende] ancora di più nel pentagono. Se tuttavia si estende al massimo, tanto da non potersi estendersi ulteriormente, allora sarà la circonferenza del cerchio[17].

7. Da quanto detto è chiaro che se il triangolo ha l'ampiezza minima, la prima linea si differenzia al massimo dalla seconda, e se il cerchio ha l'ampiezza massima, la prima e la seconda linea coincidono, e così sarà, con le debite proporzioni, nei poligoni intermedi[18]. Di conseguenza, se si pone che l'eccesso dell' ampliezza del cerchio sul triangolo è uguale alla differenza tra la prima e la seconda linea nel triangolo, l'eccesso dell'ampliezza del cerchio sul quadrato sarà uguale alla differenza tra la prima e la seconda linea nel quadrato e così via di conseguenza: a un maggiore eccesso della prima linea dell'uno sulla prima linea dell'altro consegue infatti nel [poligono] maggiore una differenza tra la prima e la seconda [che è] minore rispetto alla differenza tra la prima e la seconda nel [poligono] minore. Da ciò, dati l'eccesso della prima di un qualsiasi [poligono] sulla prima del triangolo e la differenza tra la differenza della prima e la seconda del [poligono] più ampio e quella della prima e la seconda del triangolo, si può facilmente ottenere il semidiametro del cerchio isoperimetrico, la cui circonferenza cioè è uguale alla somma dei tre lati del triangolo o a quella dei quattro lati del quadrato.

8. Compreso ciò, la quadratura del cerchio risulta evidente. Infatti, se si moltiplica il semidiametro di questo cerchio isoperimetrico per la metà della circonferenza risulta un rettangolo[19] che non può essere né maggiore né minore della superficie del cerchio,

[16] Cfr. Cusanus 2010j, 3, 1–7; Cusanus 2010i, 18.

[17] Si trova qui l'idea del cerchio come poligono regolare di un numero infinito di lati.

[18] «erit sic proportionabiliter in mediis polygoniis»: è questa la proposizione più discutibile, oggetto di critica da parte di Toscanelli. In una nota a margine scritta di proprio pugno nel manoscritto *Cu* (Gestrich 1992, 219, 52r), si fa riferimento all'obiezione sollevata da Toscanelli, che mette in dubbio l'esattezza di tale proporzionalità. Si tratta di uno scritto indirizzato al cardinale e più tardi inoltrato a Peurbach (Cusanus 2010a). Da ciò l'esigenza da parte di Cusano di aggiungere il secondo libro dei *Complementi matematici* (cfr. Cusanus 2010i, nota1; Cusanus 2010j, 3, 9–15; Cusanus 2010i, 22).

[19] Cusano scrive «superficies quadrangularis». A differenza del termine «tetragononus», l'espressione «figura quadrangularis» – come anche «quadrangulus» – è equivoca: Cusano la riferisce tanto al quadrato

come Archimede dimostra facilmente[20]. Si trasforma il rettangolo in quadrato, il cui lato sarà il medio proporzionale tra il semidiametro del cerchio e la semicirconferenza, come si legge in Euclide, VI, 9[21]. Sebbene tutte queste nozioni siano palesi, voglio tuttavia renderle perfettamente chiare anche a coloro che non sono esperti di matematica. Invece le figure aventi lati simili e perimetri uguali, di cui parlerò, da alcuni sono definite poligoni equiangoli e isoperimetrici, conformemente alla terminologia greca[22].

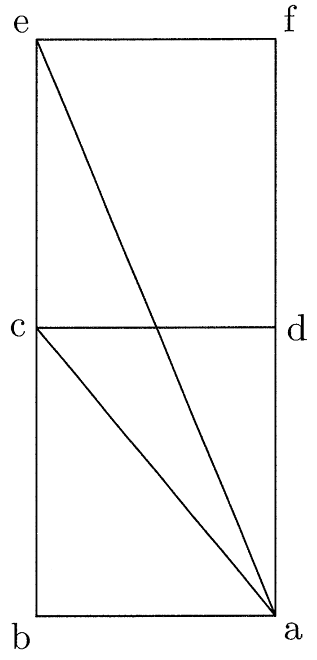


fig. 2

9. Se si moltiplica una linea retta per una linea retta, si ottiene una figura di quattro angoli retti e se la si moltiplica per una doppia linea, si ottiene una figura doppia, e così di seguito. Se si traccia una linea retta da un angolo all'altro, questa sarà la diagonale[23] perché li divide in due (cfr. figura 2).

quanto al rettangolo e al parallelogramma. Di volta in volta, a seconda del contesto, si renderà «quadrangularis» con la figura corrispondente. Sull'utilizzo, da parte di Cusano, del termine «quadrangulus» invece di «quadratus» e sull'influenza dalla terminologia matematica medioevale, cfr. Hofmann 1966, 98–136, spec. 105.

[20] Cfr. Cusanus 2010b, 38 e Cusanus 2010j, 2, 1–3; una versione più precisa si trova in Cusanus 2010i, 17. Cusano poteva leggere la prop. 1 de *La misura del cerchio* di Archimede in Bradwardine 1495b, III, 6, concl. 5e in Da Novara 2005, VI, 13.

[21] Cfr. Cusanus 2010j, 2, 8–11; una versione più precisa si trova in: Cusanus 2010i, 33. È il riferimento più frequente di Cusano agli *Elementi* di Euclide: «Sottrarre dalla retta data la parte prescritta» (Euclide 2007, VI, prop. 9, 1041).

[22] L'allusione è a Bradwardine 1495b, II, 5, concl. 1 (*hysoperimetrum*); II,4,concl.2 (*poligonium*); II,1 (*isopleurus*); Gerbertus 1899, V, 3 (*hysopleuros*); cfr. anche Cusanus 2010b, 4, 1–3; Cusanus 2010j, 2, 5–8. Nel manoscritto di Bruxelles si fa inoltre riferimento alle argomentazioni di Roger Bacon sulle figure isoperimetriche (specie nella formulazione della Prop. 13), soprattutto alla proprietà isoperimetrica della sfera, di cui si parla anche in Bradwardine 1495b, II, 5, concl. 5, e si legge la spiegazione dal greco del termine *isoperimeter* fornita nella concl. 1 di Bradwardine 1495b, II, 5. Sul tema degli isoperimetrici, cfr. Cusanus 2010b.

[23] Come in tutti gli scritti matematici, Cusano utilizza il termine «diameter» per indicare la diagonale in base a una etimologia inesatta da «δύο» e «μετρεῖν» (che divide in due) ripresa da Bradwardine (1495b, II,

Se si moltiplica *ab* per *bc*, si ottiene il quadrato ABCD avente quattro angoli retti. Se si moltiplica *ab* per *be*, che è il doppio di *bc*, si ottiene il rettangolo ABEF che è il doppio di ABCD. E senza dubbio *ac* è la diagonale, così come lo è anche *ae*.

Prima proposizione

10. Il prodotto della prima linea per la metà del perimetro è uguale a due poligoni[24].

Sia ABCD un quadrato di quattro angoli retti e quattro lati uguali. In esso è inscritto un cerchio attorno al centro *e* in modo che tocchi i quattro lati del quadrato nel punto medio. Si tracci da *e* fino al punto in cui il cerchio tocca *ab* la linea *ef*, che è la prima poiché è il semidiametro del [cerchio] inscritto, si tracci la linea *eb* e anche la linea da *e* fino al punto in cui il cerchio tocca il lato *bd* e sia questa *eg*. Si raddoppi *fb* in modo da ottenere *fh*, e, allo stesso modo, si raddoppi *eg* così da ottenere *ei*. Si chiuda il rettangolo con la linea *hi* e si tracci la diagonale *eh*. Da quanto premesso è chiaro che i triangoli EFB e EBH sono uguali. Il primo, infatti, è la metà del primo quadrato, poiché *eb* è la diagonale, e il triangolo EFH è la metà del secondo rettangolo – che è il doppio del primo [rettangolo] – poiché *eh* è la diagonale (cfr. figura 3).

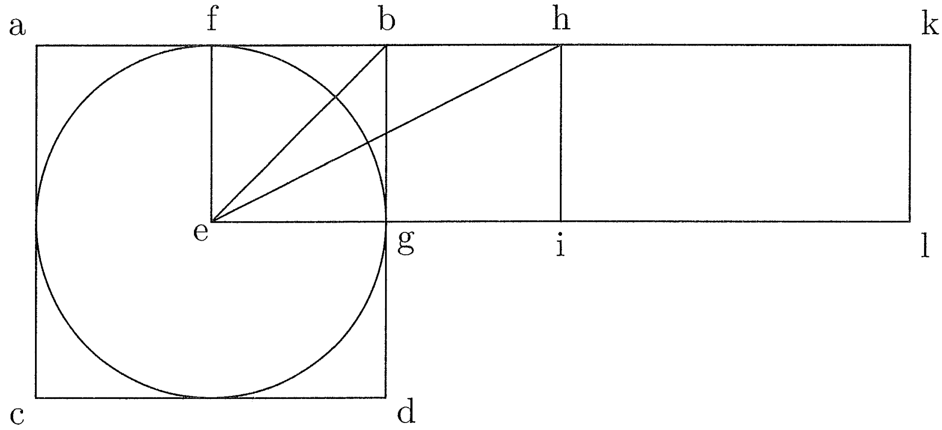


fig. 3

11. Il triangolo EBH sarà, dunque, uguale a EFB. Si raddoppino le linee *fh* e *ei*, e sia *fk* il doppio di *fh* ed *el* il doppio di *ei*; si chiuda il rettangolo con la linea *lk*. Poiché il triangolo EFB è l'ottava parte del quadrato ABCD, il rettangolo EFKL sarà uguale al quadrato ABCD. Ma *fk* è uguale alla metà del perimetro del [quadrato] ABCD, ossia è uguale alla [somma di] due lati del quadrato, e la prima linea *ef* è moltiplicata per la metà del perimetro, di conseguenza la proposizione è valida. Come nel quadrato, ciò è evidente nello stesso modo in tutti i poligoni: tutti, infatti, si risolvono in tanti doppi triangoli rettangoli quanti sono i lati; e così si procede nello stesso modo come sopra detto.

1, concl. 8: «linea diagonalis quae ducitur ab angulo ad angulum […] in quadrato vocatur diameter»). Una fonte chiara è Pisanus 1862, 2. Alla fine del Quattrocento si trova ancora il termine diametro per designare la diagonale del quadrato nell'opera di Luca Pacioli: «Si ha costume di parlare di diametro anche per i quadrati: ecco (è) perché, al fine di evitare qualunque equivoco, si dice diametro del cerchio e diametro del quadrato per differenziarli» (Pacioli 1509, I, 71, 133). Cfr. anche Cusanus 2010g, 4 e Cusanus 2010d, 26.

[24] Cfr. Cusanus 2010i, 5, 7–10; Cusanus 2010b, 36, 9–11; e Cusanus 2010j, 2, 5–8.

Seconda proposizione

12. Il perimetro di un poligono circoscritto a un cerchio è maggiore della circonferenza del cerchio, e lo è tanto più quanto meno lati esso avrà; accadrà il contrario se [il poligono] sarà inscritto nel cerchio (cfr. figura 4).

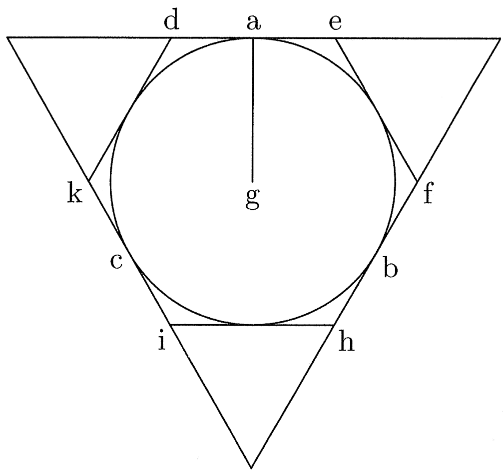


fig. 4

Siano circoscritti al cerchio il triangolo ABC e l'esagono DEFHIK e dal centro *g* si tracci il semidiametro del cerchio *ga* che sarà la prima [linea] del triangolo e dell'esagono. Se dunque si moltiplica *ag* per la metà del perimetro del triangolo si ottiene un rettangolo uguale al triangolo. La superficie, ossia l'area[25] del triangolo, include l'area del cerchio inscritto.

13. L'area del cerchio sarà quindi minore, perché la circonferenza del cerchio è minore del perimetro del triangolo, e così anche il perimetro dell'esagono è minore del perimetro del triangolo e la circonferenza del cerchio è minore del perimetro dell'esagono; di conseguenza la proposizione è valida. Nei poligoni inscritti accade il contrario, giacché l'area del cerchio è maggiore. Di conseguenza il rettangolo uguale[26] ad esso si genera moltiplicando il semidiametro per una linea, che sarà più lunga della metà del perimetro di qualsiasi poligono inscrivibile. L'area del cerchio, quindi, include l'area dell'esagono inscritto e quella dell'esagono l'area del triangolo. La circonferenza del cerchio sarà dunque quella maggiore, poi verrà il perimetro dell'esagono, quindi quello del triangolo, e così via in tutti gli altri poligoni.

Terza proposizione

14. Tra linee rette e linee circolari la minore è quella che è sottesa all'altra, e tra linee diverse, la linea sottesa, che è minore, è quella che meno è superata da quella alla quale è

[25] Cusano scrive «embadum», termine che si ritrova in Bradwardine 1495b, 75r–81v: «In trigono ortogonio cuius podismus est pedum xxv embadum»; in Oresme 1966, f. 240r: «In trigono ortogonio cuius podismus est pedum xxv embadum». Cfr. anche la *Practica geometriae* di Leonardo Pisano: «ad quam mensuram colligere embada, hoc est areas camporum, monstrabo» (Pisanus 1862, II, 3).

[26] Il termine «aequalis» è reso con «uguale» lasciando al contesto di chiarire se si tratta di uguaglianza di lunghezze, di superfici o di volumi. In questo caso è chiaro che si tratta di una equivalenza.

sottesa[27].

La terza parte della circonferenza del cerchio, che è sottesa al lato del triangolo, è minore del lato e, allo stesso modo, la sesta parte della stessa circonferenza che è sottesa al lato dell'esagono è minore [del lato]. Poiché in questo caso il perimetro dell'esagono è minore del perimetro del triangolo, di conseguenza la sesta parte della circonferenza del cerchio è superata, in proporzione, dal lato dell'esagono meno di quanto la terza parte [della circonferenza del cerchio] è superata dal lato del triangolo. Così, la terza parte della circonferenza del cerchio supera, in modo proporzionale, il lato del triangolo inscritto più di quanto la sesta parte superi il lato dell'esagono inscritto.

Quarta proposizione

15. Il cerchio avente la circonferenza uguale al perimetro di un poligono è maggiore del cerchio inscritto in esso e minore di quello circoscritto, ed è tanto più simile[28] ad essi quanto più sono i lati del poligono.

È evidente. Infatti, il lato del poligono è minore dell'arco al quale è sotteso, che è l'arco [della circonferenza] del cerchio circoscritto, e maggiore dell'arco che lo sottende, che è l'arco [della circonferenza] del cerchio inscritto. E poiché [il cerchio] inscritto e quello circoscritto sono tanto più simili quanto più sono i lati del poligono, allora saranno così anche più simili al cerchio isoperimetrico.

Quinta proposizione

16. Tra un qualsiasi poligono inscritto e un cerchio può cadere un numero infinito di poligoni maggiori del poligono [dato] e minori del cerchio. Allo stesso modo, tra un poligono circoscritto e un cerchio, [può cadere un numero infinito di poligoni] minori del poligono e maggiori del cerchio.

Ciò è evidente dalla divisione all'infinito di ciò che è continuo mediante parti proporzionali[29]. Data, infatti, la corda di un qualsiasi arco, la corda del semiarco sarà minore. Così all'infinito. Le corde sono i lati dei poligoni [inscritti]. Lo stesso vale per i lati dei poligoni circoscritti, perché, se si dà il lato di un poligono circoscritto a cui è sotteso l'arco, si darà il lato minore al quale è sotteso il semiarco e così all'infinito.

Sesta proposizione

17. [L'area del] rettangolo che si ottiene moltiplicando il semidiametro per la semicirconferenza del cerchio non è né maggiore né minore dell'area del cerchio[30].

È evidente da quanto detto sopra. Infatti, il perimetro di un poligono circoscrivibile è maggiore della circonferenza del cerchio, così anche la sua area è maggiore dell'area del cerchio. Il perimetro di un poligono inscrivibile è minore della circonferenza del cerchio, e lo stesso accade per l'area. Quindi, il prodotto del semidiametro del cerchio per la metà della sua circonferenza è maggiore dell'area di ogni poligono inscrivibile e minore

---

[27] Per una dimostrazione, cfr. Hofmann e Hofmann 1980, nota 21, 217. Qui il riferimento è al libro I del *De sphera et de cilindro* di Archimede (Archimedes 1910a; Archimede 1974, 69–180).

[28] Il termine «similis» è reso con «simile», lasciando al contesto di chiarire se si tratta di uguaglianza, di somiglianza, di corrispondenza. Cfr. Cusanus 1994, 5, 6ss.

[29] Come nota Hofmann e Hofmann 1980, nota 23, 218, con la divisibilità illimitata del *continuum* si tocca un argomento discusso con fervore da molto tempo nella scuola nominalistica di Parigi.

[30] Cfr. Cusanus 2010b, 36, 7–9; Cusanus 2010i, 8, 1–4; Archimedes 1910b, prop. 1 in Bradwardine 1495b, III, 6, concl. 5.

dell'area di ogni poligono circoscrivibile. E, poiché, data un'area maggiore di [quella di] un poligono inscritto e minore di [quella del] del cerchio, si può sempre dare un poligono inscrivibile [avente un'area] maggiore, allo stesso modo, data un'area maggiore di [quella del] cerchio, si può sempre dare un poligono circoscrivibile [avente un'area] minore. Quindi la proposizione è evidente.

Settima proposizione

18. L'ampiezza del cerchio supera quella di tutti i poligoni isoperimetrici[31].

È evidente. Infatti, in tutti i poligoni la prima linea è minore della prima linea del cerchio e il perimetro è lo stesso in tutti. Quindi, moltiplicando la prima linea del cerchio per la metà del perimetro, risulterà [un'ampiezza] maggiore di quella di qualsiasi poligono isoperimetrico.

Ottava proposizione

19. L'ampiezza del triangolo isoperimetrico è l'ampiezza minima.

È evidente, dal momento che ha il lato maggiore. Dunque, esso supera la circonferenza [del cerchio] inscritto più di qualsiasi altro poligono. Di conseguenza, il cerchio inscritto in esso è minore di tutti gli inscritti; la sua prima linea è la linea minima e, quindi anche l'ampiezza è l'ampiezza minima.

Nona proposizione

20. Più lati ha un poligono, più esso è esteso[32].

È evidente, perché, avendo i lati più corti ed essendo il quadrato della seconda linea uguale alla somma del quadrato della prima più quello della metà del suo lato, allora la prima e la seconda linea differiscono meno l'una dall'altra e sono più simili alla prima del cerchio isoperimetrico. Infatti, il lato corto è superato di meno dall'arco.

Decima proposizione

21. Nel poligono più esteso è necessario che la prima linea sia più lunga e la seconda più corta.

Si deduce da quanto premesso; infatti, essendo il cerchio inscritto in esso più simile al cerchio isoperimetrico, perché è più esteso e il cerchio isoperimetrico è il più esteso, allora la prima linea di quel poligono è più lunga e il suo lato è minore. Infatti, minore è il lato, meno è superato dall'arco, e, di conseguenza, più si avvicina al cerchio isoperimetrico. E poiché il lato è minore, allora la seconda linea differisce meno dalla prima e quindi è più simile alla prima linea del cerchio isoperimetrico; sarà, dunque, più corta [nel poligono] più esteso. Questa è la proposizione principale per scoprire ciò che cerchiamo.

---

[31] Cfr. Cusanus 2010i, 6, 6–II. Questa è la tesi principale dei trattati più antichi sulle figure di ugual perimetro; cfr. Busard 1980, prop. 6, 80; Bradwardine 1495b, II, 4, concl. 5; De Muris 1998, 315ss. Sul tema, cfr. Gericke 1982, 160–187; Di Meglio 2010, 15–21; Heath 1921, II, 211; Porter 1933.

[32] Cfr. Bradwardine 1495b, II, 4, concl. 1; II, 4, concl.2; II, 4, concl.5, dove si dà la seguente dimostrazione: «Se *abc* è un triangolo equilatero e *adce* un rettangolo con superficie e altezza uguali ad esso, il perimetro del triangolo è maggiore del perimetro del rettangolo. Se dunque il rettangolo ADGF viene trasformato in triangolo di ugual perimetro, la sua superficie è maggiore di quella del triangolo ecc.». Bradwardine sostiene che questo procedimento si può generalizzare, ma tralascia la singola esposizione. Cfr. anche Busard 1980, prop. 1, 69.

Undicesima proposizione

22. Se si pone l'eccesso della superficie del cerchio sulla superficie del triangolo uguale alla differenza tra la prima e la seconda linea del triangolo, allora l'eccesso della superficie del cerchio sulla superficie del poligono intermedio tra il triangolo e il cerchio sarà uguale alla differenza tra la prima e la seconda linea di esso; e se si pone l'eccesso uguale alla metà (o a un'altra parte) della differenza tra la prima e la seconda linea nel triangolo, allora sarà così anche nei [poligoni] intermedi[33].

Si ponga, per esempio, che l'eccesso della superficie del cerchio sulla superficie del triangolo sia uguale alla differenza tra la prima e la seconda [linea][34] e, numericamente parlando, siano la prima [linea] del triangolo [uguale a] 7, e la seconda [uguale a] 14. La differenza sarà 7. La prima [linea] del cerchio isoperimetrico sarà 14, dato che essa è maggiore della prima del triangolo della differenza, che è 7. Dico che la prima [linea] del cerchio sarà maggiore della prima [linea] di qualsiasi poligono intermedio di una quantità pari alla differenza tra la prima e la seconda [linea] di esso. Come nel quadrato, in cui la differenza è 4, la prima [linea] del cerchio eccede la prima del quadrato di 4. La prima [linea] del quadrato sarà, quindi, 10. Se dirai che il quadrato è più esteso del cerchio, allora la sua prima [linea] sarà più lunga. Sia essa uguale a 11; aggiungendo ad essa la differenza, otterrai 15. E poiché 15 supera 14, [il quadrato] sarà, da quanto premesso, meno ampio e dunque contemporaneamente più esteso e meno esteso. Accadrà la stessa cosa, se dirai che il quadrato è meno esteso. Se per esempio [la prima linea] è pari a 9, la seconda sarà 13, minore di 14, e di conseguenza, da quanto premesso, il quadrato sarà più esteso. Così risulterà contemporaneamente più esteso e meno esteso, il che è contraddittorio. Questa dimostrazione vale per tutti [i poligoni].

23. Considera che, se un poligono [alla prima linea] aggiunge una qualche parte[35] di freccia, affinché risulti la prima [linea] del cerchio, tutti [i poligoni] aggiungono una [lunghezza] simile[36]. Per capirlo chiaramente, procedi così. È evidente, dalle premesse, che se la prima [linea] del poligono più esteso è maggiore di quella di uno meno esteso, essa sarà sempre minore della prima [linea] di qualche altro poligono, poiché tra un qualsiasi poligono, che è minore del cerchio, [e il cerchio], se ne possono dare infiniti altri più grandi. E così la prima [linea del poligono] è sempre minore della prima [linea] del cerchio. Allo stesso modo, se la prima [linea] di un poligono più esteso è minore della prima [linea]

[33] Cfr. Cusanus 2010j, 3, 9–15; Cusanus 2010i, 7, 1–3. Se si indica con f la superficie del cerchio, con n il numero dei lati del poligono, con f_n la sua superficie, con σ_n il semidiametro del cerchio iscritto (la linea "prima") e con r_n il semidiametro del cerchio circoscritto (la linea "seconda"), allora: $f-f_n$ diminuisce al diminuire di $r_n–\sigma_n$. Dunque, s'intende la decrescita "regolare" di $f-f_n$ con $r_n–\sigma_n$ decrescente. Il carattere puramente ipotetico dell'impostazione viene ulteriormente sottolineato dalla formulazione iniziale "se si pone".

[34] Questa prima ipotesi significherebbe, come risulta dal calcolo successivo, che $r = \sigma_3 + (r_3–\sigma_3) = \sigma_n + (r_n–\sigma_n)$. Cusano ipotizza dapprima $\sigma_3 = 7$ quindi $r_3 = 14$, come era già accaduto in Cusanus 2010g, 10; ne risulta $r = 14$. Cusano parte dunque da $\sigma_4 = 10$, quindi $r_3 = 14$ che è approssimativamente esatto perché $r_4^2 = 2\sigma_4^2$. Anche in questo caso ottiene $r = 14$. Nel suo calcolo la questione viene gestita all'esatto contrario. Se qui σ_n non avesse il valore esatto, bensì maggiore, $f_n = (\frac{u}{2})\sigma_n$ ad esso appartenente, sarebbe troppo grande come pure il secondo che risulta da $r_n = \sigma_n + (r_n–\sigma_n)$; ne consegue che f_n appartenente alla seconda sarebbe troppo piccolo ecc.

[35] In questo caso si è reso il termine «portio» con «parte»; si è preferito utilizzare il termine «parte» in riferimento alle porzioni di linea retta, ossia ai segmenti, o di linea curva, mentre si è utilizzato il termine «porzione» per esprimere la parte di una superficie, in genere riferita a un segmento circolare o a un settore circolare.

[36] Questa seconda ipotesi significherebbe: $r = \sigma_3 + \lambda(r_3–\sigma_3) = \sigma_n + \lambda(r_n–\sigma_n)$; dove per λ s'intende una frazione. Questo paragrafo e il successivo mancano in 7 dei manoscritti più antichi a noi noti de *I Complementi matematici*.

di uno meno esteso, essa sarà maggiore della seconda linea di qualche altro poligono e, in questo modo, maggiore della prima [linea] del cerchio. Dunque, se porrai che dalla somma di una parte di freccia con la prima [linea] del poligono risulta la prima [linea] del cerchio isoperimetrico, allora sarà necessario che ciò accada in qualsiasi poligono intermedio, aggiungendo alla prima [linea] la parte avente con la freccia un rapporto simile.

24. Per esempio, se aggiungendo due terzi della freccia del triangolo alla prima [linea] di questo si ottiene la prima [linea] del cerchio [isoperimetrico], lo stesso accadrà nel pentagono, nell'esagono e in tutti gli altri poligoni. Infatti, se dicessi che in qualche poligono la somma risultante è di più o di meno, ciò accadrà necessariamente perché è più esteso [rispetto al triangolo]. Quindi, se dicessi che è maggiore, ciò non è possibile; infatti, sarebbe necessario che fosse minore della prima [linea] del cerchio, e poiché la prima [linea] del cerchio è uguale alla somma della prima [linea] del triangolo e della suddetta parte di freccia, la somma sarebbe contemporaneamente maggiore e minore. Similmente, se dicessi che è meno esteso, sarebbe necessario dire che essa è contemporaneamente minore e maggiore.

25. Da ciò si evince pure chiaramente che, se due poligoni si rapportano in modo che la somma tra la parte simile di freccia e la prima [linea] di ciascuna dia lo stesso risultato, ciò accadrà necessariamente in tutti [i poligoni][37]. Infatti, [poni il caso in cui] tra questi due poligoni ce ne siano altri, come tra il triangolo e il pentagono c'è il quadrato: in tal caso, è necessario che ciò che vale nel triangolo e nel pentagono valga anche nel quadrato. Infatti, se dicessi che la linea risultante [dalla somma] è maggiore [di quella nel triangolo] per la maggiore estensione del quadrato rispetto al triangolo, allora essa sarebbe anche minore [di quella nel pentagono], perché l'estensione del quadrato è minore di quella del pentagono. Dunque, se dicessi che, per la minore estensione [del quadrato rispetto al triangolo] la linea risultante [dalla somma] è minore, allora essa sarebbe anche maggiore e questo è impossibile. Lo stesso accadrebbe nel caso in cui i due poligoni si susseguissero senza che tra loro ci sia un poligono intermedio, come nel caso del triangolo e il quadrato, e nel caso in cui lo negassi nel pentagono. Allora, se dicessi che [la linea risultante] è maggiore a causa della maggiore estensione del pentagono, ciò non si potrebbe dire; infatti, il quadrato risulta più esteso dove [la linea risultante] non è maggiore; a maggior ragione, essa non sarà maggiore nel pentagono, ma piuttosto minore. Se dicessi che essa è minore sarebbe [ugualmente] sbagliato, dal momento che nel quadrato non è minore. È dunque evidente che ci sarebbe una contraddizione se negli altri poligoni non si ottenesse lo stesso risultato.

26. Da ciò segue che, se in due poligoni [dalla somma] tra una parte simile [di freccia] e la prima [linea] di ciascuno risulta la stessa linea nel suddetto modo, essa sarà il semidiametro del cerchio isoperimetrico. Infatti, poiché nel cerchio isoperimetrico la prima e la seconda linea sono un'unica linea, allora, se alle prime [linee] dei poligoni si aggiunge una qualche parte di freccia —sia che le linee aumentino sia che diminuiscano, sia che restino le stesse —l'ultima sarà sempre la prima del cerchio isoperimetrico. Per esempio, se aggiungo alle prime un quarto di freccia, allora esse saranno sempre maggiori e la massima sarà l'ultima e la prima del cerchio. Se aggiungo i tre quarti, saranno sempre minori e l'ultima sarà la minima e la prima del cerchio. E se aggiungo una parte tale che in due poligoni risulti la stessa linea, allora sarà così in tutti gli altri. Così, essendo l'ultima uguale alla prima, sarà una prima [linea] qualsiasi del cerchio. Da qui, è anche evidente che la superficie del cerchio supera la superficie di un qualsiasi poligono di una [lunghezza pari

[37] Ciò che qui è interessante, al di là dei casi particolari usati da Cusano, è l'intuizione di una funzione di $f_n = \sigma_n + \lambda(r_n - \sigma_n)$ per $n > 3$ che cresce in modo monotono o decresce in modo monotono. Se qui $f_m = f_n$, allora la funzione è costante. Il valore della funzione ad esso appartenente può essere determinato mediante $n \to \infty$ come r.

alla] linea che in quel [poligono] mantiene lo stesso rapporto con la propria freccia. E così, un qualsiasi poligono più esteso supera tutti i poligoni meno estesi di una [lunghezza pari alla] linea che, in un qualsiasi poligono, ha lo stesso rapporto con la propria freccia.

27. Si potrebbe dimostrare anche in un altro modo (cfr. figura 5).

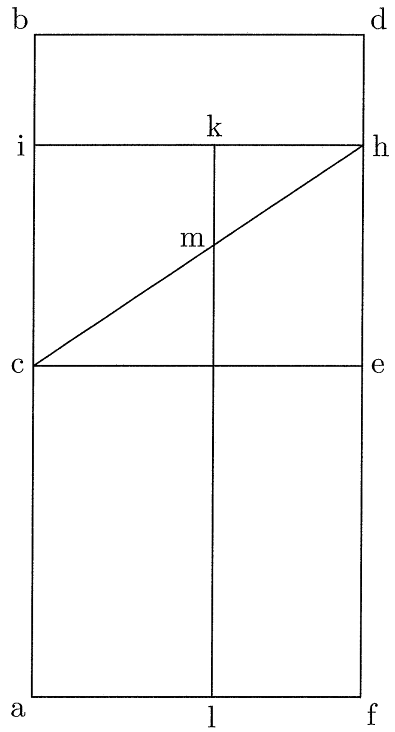


fig. 5

Sia *ab* la seconda linea del triangolo e sia essa divisa [in due] da *c*; traccia da *a, b* e *c* le perpendicolari uguali a *bc* e chiudi la figura con la linea *def.* Poiché la prima linea del triangolo è *ac*, la prima del cerchio isoperimetrico sarà maggiore di *fe*: sia essa uguale a *fh* e sia *eh* due terzi di *ed.* Da *h* traccia la parallela a *bd* e sia questa *hi*; traccia ora la linea *ch*. È chiaro che se *fh* è la prima [linea] del cerchio isoperimetrico, allora le prime [linee] dei poligoni intermedi saranno maggiori di *ac* e minori di *fh* e che la prima [linea] del poligono più esteso sarà più simile a *fh*. È anche chiaro che, come la somma di *ai* e *ih* è uguale alla somma della prima [linea] del triangolo più la differenza tra la prima e la seconda di esso, che è la freccia del suo lato, e i due terzi della freccia, così, nello stesso modo, nei poligoni intermedi possono essere tracciate linee parallele ad *ai*, che terminano su *ih* e *af.* Queste, unite alla linea restante *ih*, sono uguali alla [somma] tra la prima linea del poligono intermedio, la freccia e i due terzi della freccia di ognuna, come è stato detto nel triangolo. Ed è cosa nota che meno esteso è il poligono, più lunga sarà la linea risultante da queste linee prese insieme, dal momento che il [poligono] meno esteso ha il lato maggiore e, quindi, la freccia, maggiore. Così queste due linee saranno le più lunghe nel triangolo, e le più corte nel cerchio isoperimetrico, giacché il cerchio non ha lati e, quindi, neppure frecce, per cui le due linee nei poligoni saranno un'unica linea nel cerchio.

28. Pertanto, dico che se tracci da *h* verso *i* la freccia di un poligono intermedio e dall'estremità della freccia tiri la linea parallela ad *ai*, allora la linea *ch* la taglierà in due parti, di cui la minore sarà una parte della freccia, e la maggiore la prima [linea] del poligono. Per esempio, sia *hk* la freccia del quadrato, si tracci da *k* la linea parallela a *hf*, e sia questa *kl*, e, nel punto in cui *ch* la taglia, poni *m*. Dico che *km* sarà due terzi di *hk*, il che è cosa nota da sé: infatti *mh* sta a *kh* come *ci* a *ih*. E dico che *ml* sarà la prima linea del quadrato. Se lo negassi, dicendo che il quadrato è o più esteso o meno esteso, per esempio più esteso, allora la sua prima [linea] deve essere maggiore di *lm* e dunque la somma di *lk* e *kh* è minore della somma della prima linea del quadrato, della sua freccia e dei due terzi della freccia, il che implica contraddizione. Infatti, se il quadrato deve essere più esteso, come tu dici, è necessario che la somma di *lk* e *hk* superi la somma della prima [linea] del quadrato, della freccia e dei due terzi di essa. Sarebbe altrettanto contraddittorio se dicessi che il quadrato è meno esteso. Infatti, in tal caso, è necessario che *lm* sia minore e che la somma di *lk* e *kh* sia maggiore della somma della prima [linea] del quadrato, della freccia e dei due terzi di essa. Lo stesso accade negli altri poligoni. Di conseguenza, è evidente che, se la prima [linea] del cerchio isoperimetrico supera la prima del triangolo di una parte aliquota[38] della freccia del triangolo, essa supera anche la prima linea di qualsiasi poligono intermedio della parte aliquota simile della freccia di questo poligono, e dire qualcosa di diverso implica contraddizione.

Dodicesima proposizione

29. Il rapporto tra l'eccesso della superficie di un cerchio sulla superficie di un triangolo isoperimetrico e l'eccesso della superficie di un poligono intermedio sulla superficie dello stesso triangolo è uguale a quello tra la freccia del triangolo e la linea risultante dalla differenza tra la freccia del triangolo e la freccia del poligono intermedio[39].

Se si pone l'eccesso della superficie del cerchio sulla superficie del triangolo pari a 7, [l'eccesso del]la superficie del quadrato sulla superficie del triangolo corrisponderà alla linea risultante dalla differenza tra la freccia del triangolo e la freccia del quadrato. Per esempio, se la freccia fosse uguale a 4, la superficie del quadrato sarà pari a 3. Questo corollario è evidente da quanto detto.

Tredicesima proposizione

30. Conoscendo l'eccesso della superficie di un qualsiasi poligono intermedio sulla superficie del triangolo isoperimetrico si conosce la superficie del cerchio isoperimetrico.

È chiaro che, se si conosce il rapporto, allora, una volta conosciuto un eccesso, si conoscerà anche l'altro. Ma poiché l'eccesso nel quadrato, nel pentagono, nell'esagono e in ogni altro poligono intermedio può essere conosciuto per mezzo della prima linea del triangolo e del poligono intermedio, allo stesso modo si conoscerà anche l'eccesso del cerchio isoperimetrico.

31. Trovare una [linea] curva circolare uguale[40] a una [linea] retta data[41](cfr. figura 6).

[38] Per «aliquota» s'intende: contenuta un numero intero di volte, ossia un sottomultiplo intero. Cfr. Bradwardine 1495b, 68: «pars autem aliquota est illa quae, aliquotiens sumpta, reddit aequaliter summum suum. Pars vero non-aliquota est illa quae nullatenus, aliquotiens sumpta, reddit aequaliter summum suum» («Una parte aliquota è invero quella che, presa un determinato numero di volte, dà come risultato il suo tutto. Una parte non aliquota è quella che, presa un qualsiasi numero di volte, non dà come risultato il suo tutto» (in Clagett 1964–1984a, 493. trad. nostra).

[39] Si veda la formulazione, leggermente diversa, in Cusanus 2010j, 3, 9–15.

[40] Per «aequalem» si intende qui «della stessa lunghezza».

[41] Ciò si richiama al procedimento desunto in Cusanus 2010j, 4–5, ma vi è un' abbreviazione del testo e una lieve modifica della figura.

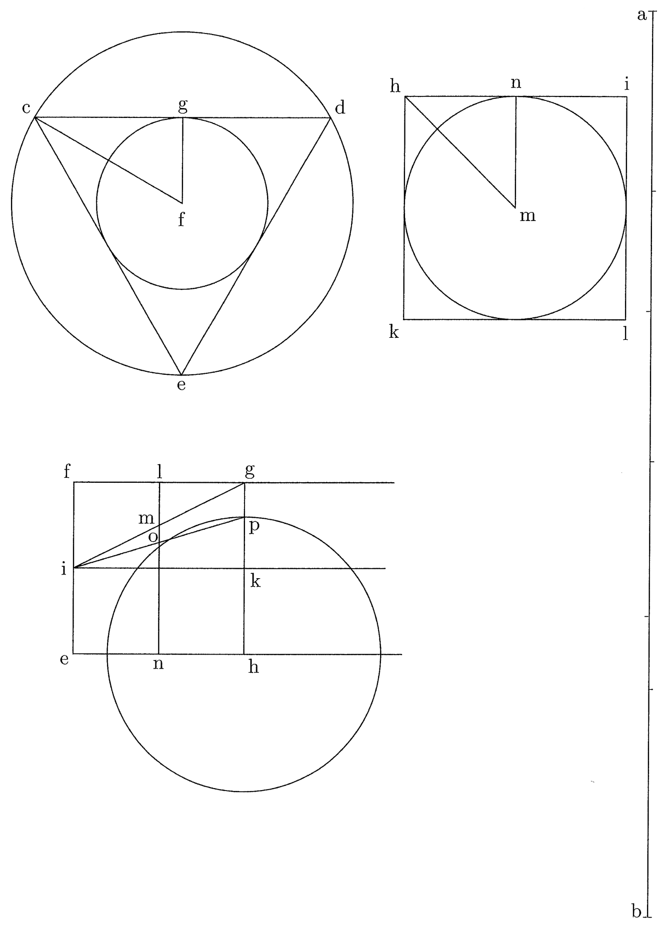


fig. 6

Sia *ab* la linea retta, e, a partire da essa, siano costruiti un triangolo e un quadrato, come premesso; sia *ef* la seconda linea del triangolo e il lato del quadrato EFGH. Dividi [*ef*] a metà attraverso la linea *ik*, traccia la linea *ig* e cerca il punto in cui *ig* e *fg* abbiano una distanza [l'una dall'altra] pari alla differenza tra la prima e la seconda [linea] del quadrato, e traccia [per questo punto] la linea parallela a *ef*, ossia *ln* e sia *lm* la suddetta differenza. Segna su *nl* la prima del quadrato, ossia *no*, traccia da *i* attraverso *o* la linea verso *gh* e, dove essa la taglia, poni *p*. È chiaro, da quanto detto prima, che *hp* è il semidiametro del cerchio la cui circonferenza è uguale al perimetro del triangolo e del quadrato, cioè, della linea retta *ab*, che è quanto si voleva trovare[42].

32. Trovare una linea retta uguale a una [linea] curva circolare data (cfr. figura 7).

Se vuoi ottenere ciò in breve tempo, disegna un angolo attraverso il quale troverai [ciò che cerchi] in questo modo: al semidiametro *hp* del suddetto cerchio unisci, al centro, la perpendicolare *ab* e, alla sua metà *q*, traccia *pq*. Otterrai così l'angolo *hpq*. Costruiscilo in metallo o in legno, e dal momento che vuoi risolvere una linea circolare in una linea retta, traccia una linea di lunghezza indefinita perpendicolare al semidiametro passante per il centro, e considera l'angolo compreso tra il semidiametro e la circonferenza, in modo che il lato minore si trovi sul semidiametro e il lato maggiore dell'angolo tagli sulla linea di lunghezza indefinita una parte uguale alla semicirconferenza.

[42] Cfr. Cusanus 2010j, 4–5.

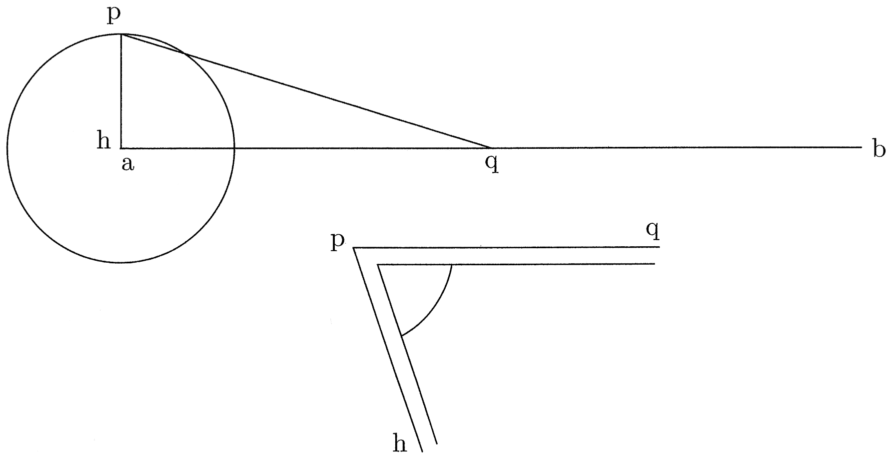


fig. 7

33. Trovare un quadrato uguale a un cerchio dato (cfr. figura 8).

Procedi nel seguente modo[43]: per mezzo di Euclide, VI, 9, calcola il medio proporzionale tra *hp* e la metà di *ab*, e questo è il lato del quadrato; traccia la metà di questo lato sulla perpendicolare a *hp* che passa per il centro e sia questa *hr:* tracciando *pr*, otterrai l'angolo *hpr*. Costruiscilo in metallo o in legno e, nel modo suddetto, potrai quadrare velocemente tutti i cerchi.

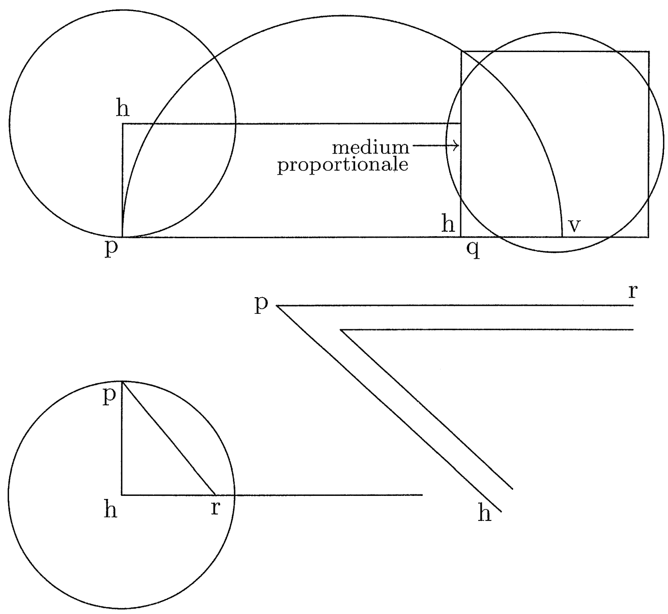


fig. 8

[43] Cfr. Cusanus 2010j, fig. 3; Da Novara 2005, IV, 9. Questa figura ha portato John Wallis (1616–1703) a credere, a torto, che Cusano avesse avuto l'intuizione della costruzione e delle proprietà della cicloice. Cfr. lo scambio epistolare tra Wallis e Leibniz, in: Leibniz 1849–1863, IV, 5–82, spec: Wallis–Leibniz, 4/5/1697 e 11/12/1697 (9–10); Leibniz–Wallis, 29/3/1697 (13); Leibniz–Wallis, 7/6/1697 (27).

34. Trovare un cerchio uguale a un quadrato dato.

Dalla metà del lato traccia la perpendicolare e riporta su di essa l'angolo appena descritto; alzala fino al punto in cui il lato più lungo dell'angolo cade sull'estremità del lato del quadrato; la linea tracciata [dal piede della perpendicolare] fino al vertice dell'angolo sarà il semidiametro del cerchio uguale al quadrato. Tutto ciò è evidente, perché in tutti i cerchi il rapporto tra i semidiametri e la circonferenza è lo stesso di quello [tra i semidiametri] e i lati del quadrato.

35. Senza questi due angoli, potrai [trovare un cerchio uguale a un quadrato dato] da quanto premesso, essendo il rapporto tra l'eccesso del semidiametro del cerchio sul semidiametro [dell'inscritto] nel triangolo uguale a quello. Per esempio, se vuoi trasformare la circonferenza di un cerchio dato S in una linea retta, prendi una linea qualsiasi, per esempio *ab*, e trova, in base a quanto premesso, una circonferenza della stessa lunghezza. Poi, traccia una linea, *hp*, perpendicolare a un'altra, *tv*, e sia *hp* il semidiametro del cerchio; riporta su di essa *hk*, il semidiametro del cerchio inscritto nel triangolo isoperimetrico, tracciando le linee rette da *t* attraverso *h* e *k*. Traccia, poi, il semidiametro del cerchio dato S parallelo a *hp*, compreso tra la linea *tv* e quella che da *t* r passa per *p*, e sia esso *xy*. Segna con *z* il punto in cui *xy* è tagliata dalla linea che parte da *t* e passa per *k*. È chiaro che *yz* è il semidiametro del cerchio inscritto nel triangolo isoperimetrico al cerchio S. In questo modo troverai la linea retta cercata (cfr. figura 9).

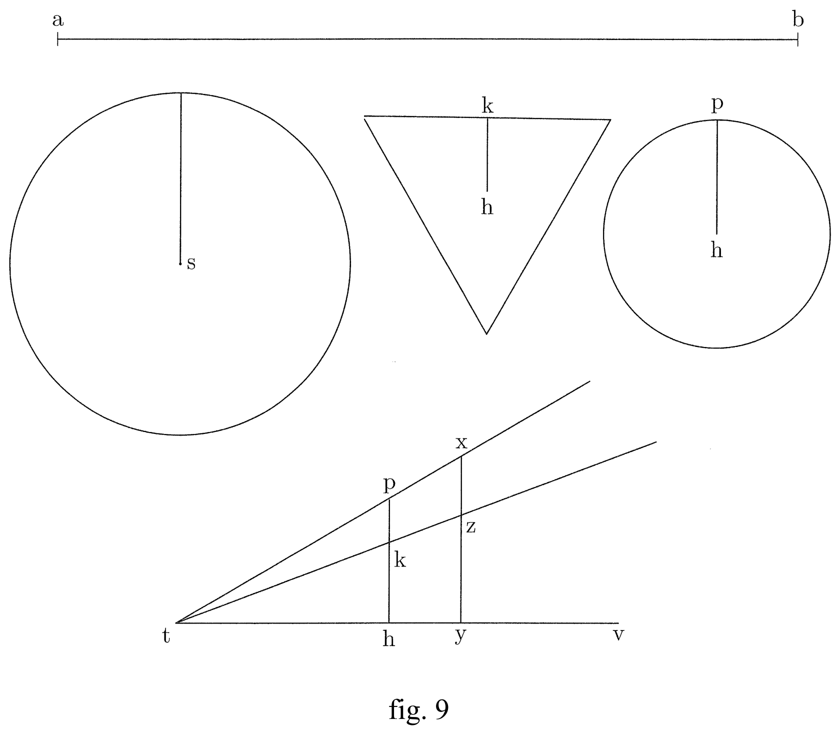


fig. 9

36. Da quanto stabilito sopra, si potrà indagare ciò che in geometria è rimasto finora sconosciuto. La perfezione dell'arte dei seni e delle corde non era conosciuta; nessuno poteva conoscere la corda di un arco di un grado, di due, di quattro e così via; adesso ciò è possibile[44]. È evidente che, per ottenere il semidiametro del cerchio isoperimetrico,

[44] Riecheggiano in questo passo le ultime frasi del Cusanus 2010j, 11, 4–5; 12, 1–5: «è la suprema perfezione dell'arte geometrica, alla quale fino ad oggi non risulta che gli Antichi siano pervenuti. L'arte delle trasforma-

ogni poligono regolare[45] aggiunge alla prima [linea] una parte uguale alla differenza tra la prima e la seconda linea, e similmente, ogni eccesso, di cui la prima linea di un qualsiasi [poligono] supera la prima [linea] del triangolo, e l'eccesso di cui la seconda [linea] del triangolo supera la seconda [linea] di un altro [poligono], mantengono in tutti [i poligoni] sempre lo stesso rapporto. Da questi si determina l'arte generale dei seni e delle corde, senza la quale la geometria è rimasta sin qui incompleta. Ma [se ti domandi] come si possa realizzare praticamente quest'arte, mediante numeri approssimati, procederai in questo modo. In realtà ciò è impossibile perché la metà della doppia proporzione[46] non può essere espressa numericamente, non essendo il risultato né pari, né dispari[47].

37. Sia dunque il semidiametro del cerchio circoscritto al triangolo pari a 14. Il semidiametro dell'inscritto sarà 7 e il suo quadrato 49, il quadrato della metà del lato del triangolo sarà tre volte di più, cioè 147, e il quadrato del semidiametro del circoscritto quattro volte di più, cioè 196. La metà del lato del quadrato sarà, dunque, la radice di $\frac{9}{16}$ del quadrato della metà del lato del triangolo, cioè la radice di 82 più $\frac{11}{16}$ e tale sarà il semidiametro del suo inscritto. Il semidiametro del circoscritto sarà anche la radice del numero doppio, cioè 165 più $\frac{6}{16}$. Se ora sottrai la radice di 49 dalla radice di 82 più $\frac{11}{16}$, la differenza sarà l'eccesso del semidiametro dell'inscritto nel quadrato sul semidiametro dell'inscritto nel triangolo, che sarà qualcosa più di 2. Se sottrai la radice di 165 più $\frac{6}{16}$ dalla radice di 196 —differenza il cui risultato sarà poco più di 1[48]—, ottieni gli eccessi [ossia le differenze delle prime da un lato e delle seconde dall'altro], e dal loro rapporto può essere trovato tutto il resto. Infatti, se sottrarrai questi eccessi dalla freccia del lato del triangolo, cioè da 7, resterà la freccia del quadrato. Se, dunque, ora tu dividerai per 7, secondo il rapporto delle differenze sopra indicato, e aggiungerai il maggiore al semidiametro dell'inscritto nel triangolo, otterrai il semidiametro del cerchio isoperimetrico.

38. Dal quadrato del lato del triangolo o del quadrato, potrai anche conoscere il quadrato del lato di qualsiasi poligono dato; da ciò e dal rapporto degli eccessi si arriva alla freccia e al semidiametro dell'inscritto e si conosce così l'arco della corda. E questa è la massima perfezione della geometria, a cui gli antichi, per quanto io abbia letto, non sono pervenuti. Ora è completa anche l'arte delle trasformazioni geometriche che ho descritto precedentemente, in maniera rapida ma sufficiente, a proposito della quadratura del cerchio[49].

---

zioni geometriche, […] è ora sufficientemente compiuta poiché essa ha portato alla quadratura del cerchio. E noi pensiamo che niente più di quanto c'è da sapere in geometria resterà nascosto a colui che vorrà ricercare con diligenza in questo campo». Poco più avanti Cusano, per indicare il seno utilizza l'espressione «semicorda dell'arco doppio» secondo un'invenzione indiana tramandata dagli arabi all'occidente medievale (cfr. Taton 1957–1958, I, 161). Cfr. Cusanus 2010m, 1, 11ss.; 8, 1–4.

[45] Letteralmente: «multiangula similium laterum».

[46] L'espressione latina è «medietas duplae», già utilizzata ne *Le trasformazioni geometriche* (Cusanus 2010b, 40) e ne *La quadratura del cerchio* (Cusanus 2010j, 9, 8), è un'espressione idiomatica intraducibile in sè, ed è legata al problema della duplicazione del cubo. Algebricamente si tratta della radice di 2. Vescovini (1972, nota 10) sottolinea che l'espressione si rifà alla tradizione matematica medievale con cui Cusano allude alla dimostrazione dell'irrazionalità della $\sqrt{2}$, spesso citata in Aristotele e menzionata anche in Oresme 1966, 160 e in Bradwardine 1495b, III–1. Oresme chiama il rapporto $\frac{a^2}{b^2}$ la metà di $\frac{a}{b}$ (cfr. Oresme 1966, 454). La *proportio proportionum*, cioè la proporzione tra due rapporti $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ e $\frac{a}{b}$ è espressa dal rapporto $\frac{1}{2}$. Se la *proportio dupla* è il quadrato, la metà, ossia la *medietas duplae*, è la radice. Cfr. Oresme 1966, 454; Pedersen 1953, 1–134ss. Cusano si riferisce a questa terminologia matematica di Bradwardine, di Oresme e di altri studiosi interessati agli incommensurabili e ai rapporti irrazionali. Sul tema, cfr. Rommevaux 2003, 401–418.

[47] Cfr. Cusanus 2010j, 9.

[48] Si ritrova, parola per parola, la fine di Cusano 2010j, 10–11, con gli stessi valori numerici.

[49] Il riferimento è al primo scritto matematico, il *De geometricis transmutationibus*.

39. Per trasformare ora velocemente il lato di un qualsiasi poligono in una linea curva, potrai costruire uno strumento di due angoli (cfr. figura 10). Sia *ab* il lato del triangolo, la cui freccia, ossia la differenza della prima e della seconda linea (che è la stessa cosa), è *cd* e sia *ce* l'eccesso del semidiametro del cerchio isoperimetrico sulla prima [linea] del triangolo. Ora, se tracci una linea che parte da *a* e passa per *e*, e un'altra che parte da *a* e passa per *d*, si formeranno due angoli intorno ad *a*. Riporta, quindi, [gli angoli] *bae* e *bad* su uno strumento di metallo, e applicali a tutti i poligoni in modo che, ora, nel triangolo, risulti che il lato di questi *ab* si trovi sul lato del poligono e il lato *ad* tocchi l'estremità della freccia. Così, il lato *ae* mostra quanto bisogna aggiungere alla prima [linea] di questo poligono per ottenere il semidiametro del cerchio isoperimetrico. Descritto, quindi, l'arco in questo modo e tracciati i raggi[50] dal centro verso l'estremità del lato, l'arco che cade tra le linee risulterà uguale al lato dato. La verità di quanto detto consegue dall'uguaglianza del rapporto tra la parte che bisogna aggiungere alla prima del [poligono] affinché derivi il semidiametro del cerchio isoperimetrico, e l'intera differenza tra la prima e la seconda linea del suddetto [poligono], differenza che è chiamata freccia[51].

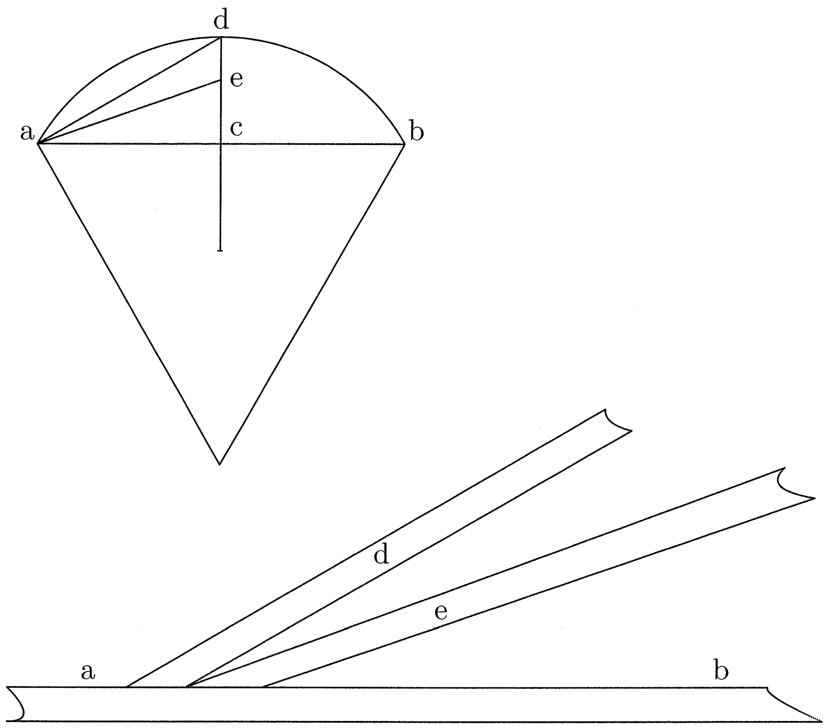


fig. 10

40. Ora, da quanto detto, è palese che, poiché una qualsiasi linea retta può essere il lato di un triangolo, di un quadrato, di un pentagono e così via, allo stesso modo, data una linea retta, si potranno dare innumerevoli curve uguali e, grazie ad esse, si potranno trovare angoli che si rapportano tra di loro come le linee date, cioè come il lato e la diagonale di un quadrato o il diametro di un cerchio e la sua circonferenza e così in tutti i poligoni,

[50] Cusano parla di «sectores».

[51] La scoperta di Cusano è che in ogni poligono la differenza fra l'apotema (prima linea) e il raggio del cerchio isoperimetrico al poligono è un segmento minore della freccia che ha con quest'ultima un rapporto costante.

[e si potranno trovare] anche superfici che si rapportano l'una con l'altra come le linee date. Da ciò, si potrà scoprire ciò che non solo era rimasto nascosto in geometria, ma anche ignorato nel campo della musica e degli strumenti musicali, e così, a colui che vorrà applicare ancor di più la propria mente, ciò che non era conoscibile né conosciuto in geometria si paleserà chiaramente. È per questa ragione che tale scoperta merita di portare il nome di *complemento* ed è degna di essere portata alla conoscenza di tutti, affinché possano ammirare la tua grandezza, Padre Santo, di cui tutti i cattolici si stupiscono a tal punto che, conformemente all'espressione d'ammirazione che si usa nei confronti di un padre, ti chiamano Papa[52].

---

[52] Qui termina la prima versione dei *Complemeti matematici*. In *Cu* è stata aggiunta una nota a margine del testo tramandata nelle copie posteriori e ripresa anche nelle diverse edizioni a stampa nonostante non appartenga al testo. Aggiunto in *Bl*, essa recita: «Se questa scoperta è vera, accade che la linea tracciata dalla prima linea del triangolo alla prima del cerchio isoperimetrico passa attraverso le prime rette di tutti i poligono intermedi. Ma se non è vero che la linea passa in questo modo, e se fosse invece vero che una curva di una qualche curvatura passi dalla prima del triangolo attraverso le prime di tutti i poligoni fino alla prima del cerchio, allora questa scoperta non sarebbe sufficiente. E poiché il dubbio c'è, ho apportato in un secondo libro altre mie invenzioni che fugano il dubbio in questione».

[LIBRO SECONDO]

42. A proposito delle trasformazioni delle superfici l'una nell'altra aggiungo ora alcune mie scoperte che, come le precedenti, dedico alla tua santità, a te che primeggi su tutti e che sei il solo ad essere degno che tutto ti sia rivelato.

43. Considero la linea come la figura del movimento di un punto. Ora, se essa fosse una [linea] retta e si muovesse tenendo fissa una delle estremità, questo movimento sarebbe rappresentato in modo adeguato da un triangolo rettangolo.

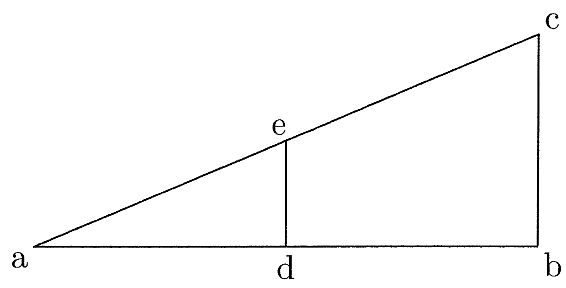


fig. 11

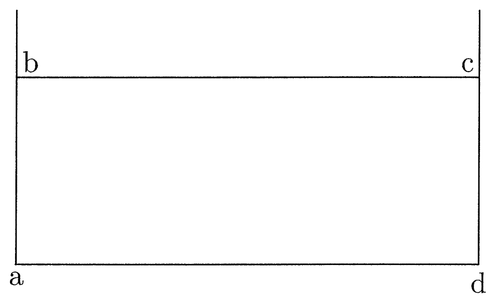


fig. 12

Così, se la linea *ab* si muove mentre *a* resta fisso, il movimento è rappresentato dal triangolo ABC. Infatti, se il movimento di *b* è uguale[53] al lato *bc*, allora la stessa cosa si avrà in proporzione in tutti i punti che si possono dare [di *ab*]. Per esempio, se *d* è il centro [di *ab*], allora *de* è uguale al movimento di *d* e il lato *de* è la metà di *bc* (cfr. figura 11). D'altra parte, se la linea retta *ab* si muove con lo stesso moto tanto in *a* quanto in *b*, il movimento è rappresentato da un doppio triangolo rettangolo, ossia dal rettangolo ABCD (cfr. figura 12); infatti, tutti i punti che si possono dare [di *ab*] si muovono con lo stesso moto. Se invece *a* e *b* si muovono con moto simile, ma non uguale, questo [movimento] può avvenire in un'infinità di modi e non potrebbe essere rappresentato da un'unica figura[54].

[53] In questo caso il termine «aequalis» sta a significare che il movimento di *b* descrive una linea che ha la stessa lunghezza del lato *bc*.

[54] Cusano considera «aequaliter» il movimento che concerne o la rotazione di un segmento (intorno ad un asse attraverso una delle sue estremità) o lo spostamento di un segmento perpendicolare alla sua direzione

44. Dalla prima rappresentazione del movimento di una linea retta di cui un estremo resta fisso, consegue che la superficie, che è la misura del moto di una linea ed è generata dalla rotazione di questa, ha come linea di contorno una linea curva che si origina dal punto *b*, e una superficie circolare che deriva dalla linea *ab* (cfr. figura 13). E se prendi su *ab* un punto qualsiasi, per esempio al centro, e sia questo punto *d*, la curva generata dal moto di *d* starà alla curva generata da *b* come, nella figura[55], il lato *de* sta al lato *bc*; le linee di contorno sono, infatti, le misure dei movimenti dei punti. Da ciò sarà necessario che la misura [del rapporto] tra ogni semidiametro e la circonferenza resti la stessa.

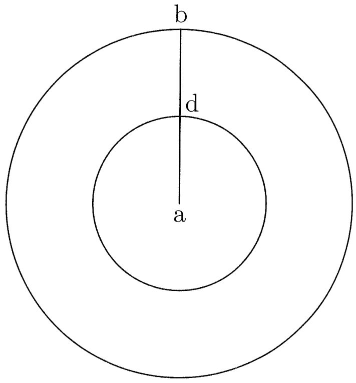


fig. 13

45. Inoltre, poiché la superficie è generata dal movimento del semidiametro attorno alla circonferenza e il rapporto tra ogni semidiametro e le circonferenze è lo stesso, il rapporto tra le superfici sarà uguale a quello tra i quadrati dei semidiametri. Di conseguenza, la superficie del cerchio che ha un semidiametro pari a 4 è quattro volte la superficie di quello che ha un semidiametro pari a 2. Da ciò, si avrà il rapporto delle superfici coniche tra di loro e con quelle di base. Infatti, poiché il semidiametro [della circonferenza] di base e il lato del triangolo che descrive la [superficie] conica si muovono intorno allo stesso punto fisso all'estremità di essi e sulla stessa circonferenza di base, il rapporto delle superfici [di base e conica] sarà uguale a quello delle linee dal cui movimento si generano quelle superfici[56]. Siano, per esempio, il semidiametro della circonferenza di base e il lato del triangolo che descrive la [superficie] conica uguali ad *ab* e *bc*[57](cfr. figura 14).

46. Dalla seconda rappresentazione di una linea che si muove con lo stesso moto in tutti i punti consegue che la superficie originata da tale movimento è doppia rispetto a quella che si origina dal primo movimento. Di conseguenza, se il semidiametro si muove con [questo] secondo movimento sulla stessa circonferenza sulla quale si era mosso con

o infine lo spostamento di un segmento nella sua direzione. Sebbene intuisca il "fluido" andamento del movimento, ciò che a Cusano interessa è soprattutto la relazione geometrica del movimento ipotizzato (cfr. Hofmann e Hofmann 1980, 221, nota 41).

[55] Si trovano qui tre figure assolutamente identiche a tre configurazioni descritte da Oresme. La prima è la rappresentazione del movimento di una linea *ab* che ruota intorno ad *a*; la seconda la rappresentazione del movimento uniforme di una linea *ab*; infine vi è la rappresentazione della generazione dei cerchi mediante il movimento di una linea *ab* che ruota completamente intorno ad *a*. Questa coincidenza suggerisce che Cusano abbia letto il trattato di Oresme.

[56] Cfr. De Tinemue 1964, prop. 1, cor., 458, 105–460, 107.

[57] La figura 18 è invertita da sinistra a destra in *Cu*. Cusano non dispone della rappresentazione in prospettiva, che rende possibile oggi la comprensione delle sue figure.

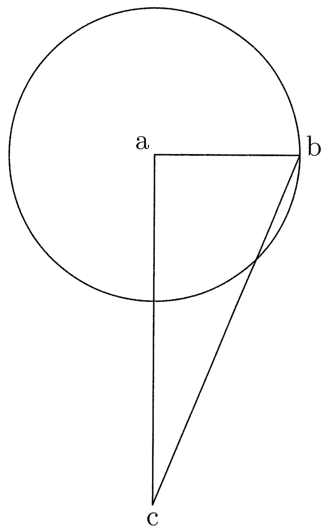


fig. 14

il primo movimento, si avrà una superficie doppia della prima. Perciò, sarà necessario che il prodotto del semidiametro per la semicirconferenza sia uguale alla superficie del cerchio. Parlo tuttavia del caso in cui entrambi i punti estremi si muovono con lo stesso moto (cfr. figura 15). Infatti, se uno si muove sul lato concavo di un arco e l'altro sul lato convesso, la superficie non sarà il doppio di quella originata dal movimento della linea avente un'estremità fissa e l'altra in movimento sul lato concavo dell'arco, ammesso pure che gli archi siano uguali. Se l'arco *bd* è uguale all'arco *ce*, e se la linea *bc* si muove descrivendo la superficie compresa tra le rette *bc* e *de* e le curve *bd* e *ce*, ammesso pure che si muova su archi uguali, essa non descriverà tuttavia una superficie doppia rispetto a quella originata dal movimento di *ab*, uguale a *bc*, con *a* che resta fisso, mentre *b* si muove sull'arco uguale fino a *d*, perché *b* si muove sul lato concavo dell'arco *bd*, mentre *c*, della linea *bc*, sul lato convesso. Inoltre, la convessità diminuisce tanto quanto sono le porzioni FGCH e FIEK.

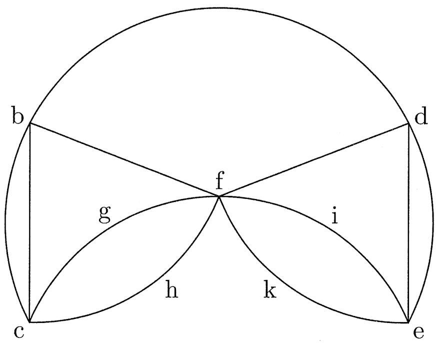


fig. 15

47. Da ciò, ogni sapere ricava tutto ciò che riguarda i rapporti tra le superfici [laterali] e le superfici di base dei cilindri ossia delle colonne rotonde, e tra cilindri, curve coniche e piani circolari. Infatti, è evidente che il cilindro, la cui altezza è uguale al semidiametro della base, ha la superficie [laterale] doppia rispetto a quella di base. Infatti, la linea che genera la [superficie di] base si muove avendo un punto fisso a una estremità e descrivendo una circonferenza con l'altro punto; la stessa linea genera la superficie laterale del cilindro attraverso lo stesso movimento di entrambi i due punti estremi sulla stessa circonferenza di base[58], cosicché dall'angolo retto *abc* che ruota attorno ad *a* si descriveranno la [superficie di] base attraverso *ab* e una doppia superficie cilindrica attraverso *bc*, dato che *bc*, che è uguale ad *ab*, si muove con lo stesso moto nei punti estremi *b* e *c* (cfr. figura 16).

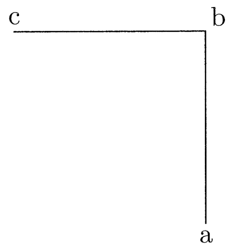
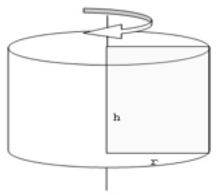


fig. 16

48. La stessa cosa accade nelle coniche. Se ABC è il triangolo il cui angolo retto *bac* ruota attorno ad *a*, e se il lato *bc* è doppio di *ab*, la superficie [laterale] sarà uguale alla superficie [laterale] del cilindro di prima, e, se disegni il cerchio il cui semidiametro è il doppio di *ab*, allora la sua superficie sarà uguale alla superficie [laterale] del cilindro[59] e a quella del cono prese insieme (cfr. figura 17).

49. È chiaro che se la linea corrispondente alla circonferenza di un cerchio fosse ridotta a una [linea] retta e fosse moltiplicata per il semidiametro, allora la superficie del rettangolo che ne deriverebbe sarebbe il doppio della superficie del cerchio avente quella circonferenza. Infatti, questo movimento generatore[60] sarebbe quello in cui entrambi i punti estremi si muovono con lo stesso moto, mentre il cerchio si origina dal movimento di una linea in cui un punto rimane fisso. Pertanto, da molti è stato detto giustamente che tale prodotto, cioè, la moltiplicazione del semidiametro per la linea uguale alla semicirconferenza, genera una superficie uguale a [quella] del cerchio.

[58] Si tratta in pratica del tronco di cilindro.



[59] Cfr. De Tinemue 1964, prop. 1, 450, 1–5.

[60] Il termine tecnico «ductio» significa a volte il movimento di costruzione geometrica, a volte l'operazione aritmetica di moltiplicare. Come Hofmann suggerisce (Hofmann e Hofmann 1980, nota 55, 223), è probabile che il primo modo in cui Cusano utilizza tale termine abbia influenzato l'utilizzo di esso come metodo geometrico d'integrazione e ipotizza un'influenza diretta di Cusano (i cui scritti erano assai conosciuti all'epoca) su Gregorio di San Vincenzo (1584–1667), il quale nell'*Opus geometricum ad mesolabum per rationum, proportionalitatumque novas proprietates* parla appunto di «*ductus plani in planum*» (Di San Vincenzio 1668, VII, 241ss.).

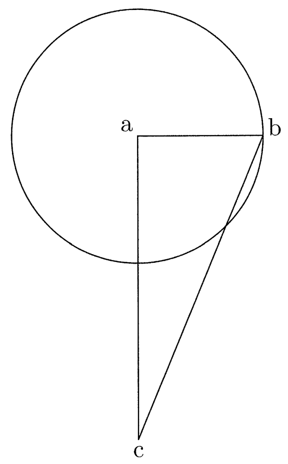


fig. 17

50. Esiste un'altra modalità di movimento, quello composto, ossia di avanzamento e di arretramento[61], come quello rappresentato nella figura[62](cfr. figura 18). Infatti, come puoi notare, *ab* si muove con moto doppio su *ac*, avanzando e arretrando sempre con lo stesso moto. La misura dell'avanzamento sarà *ac*, quella dell'arretramento *ab* e quella di avanzamento e di arretramento prese insieme sarà *bc*. Infatti, il tempo di avanzamento di *a* verso *c* è lo stesso di quello di arretramento di *b* su *bc* fino a *c*, e il risultato è la figura ABCD. *bc* comprende in sé il doppio movimento di arretramento di *ab* e di avanzamento di *ac* perché il quadrato di *bc* è uguale a quello di *ab* più quello di *ac*. Da ciò, nota come dal movimento di una linea si originano contemporaneamente due triangoli e un quadrilatero.

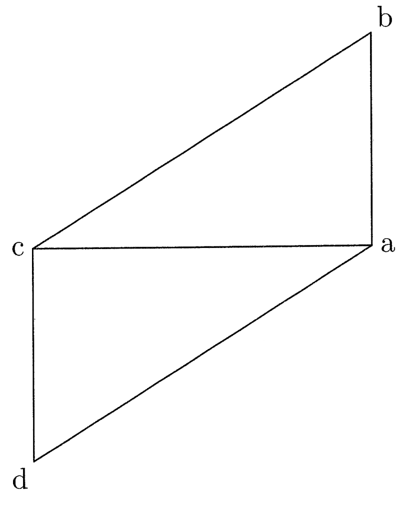


fig. 18

51. Se tuttavia *ab* avanza su *ac* e arretra con moto differente e questa differenza è uguale all'arco [*bc*], allora si ha la figura ABCD, e poiché l'arco *bc* comprende in sé un

[61] Con «avanzamento» e «arretramento» si traducono i termini «progressio» e «descensio».
[62] Le figure 18 e 19 sono invertite da sinistra a destra nel *Codex Cusanus 219* (Gestrich 1992).

movimento di avanzamento che non è uguale a quello di arretramento, allora l'arco *cb* è maggiore della linea retta *cb* (cfr. figura 19).

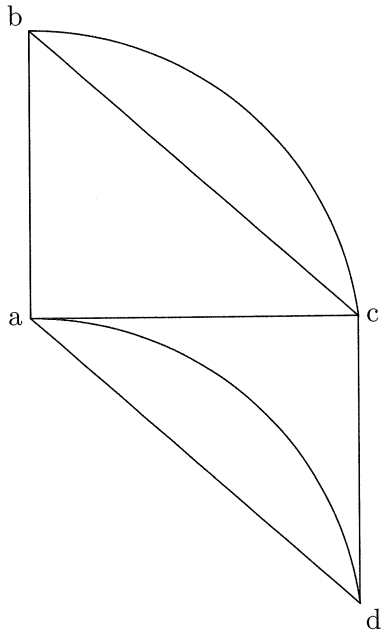


fig. 19

Dico che il movimento di arretramento non è uguale perché dopo che *b* raggiunge la metà dell'arco, non scende lungo la sua metà sotto *ca*, come quando *b* scende lungo la metà della linea *bc*. Considera come *a* descrive l'arco *ad*. *a* si muove sul lato convesso e *b* su quello concavo, e quanto più concava è la linea *cb*, meno essa è convessa. Di conseguenza, la figura curvilinea compresa tra l'arco concavo *bc* e l'arco convesso uguale *ad* è uguale al parallelogramma ABCD[63], e così saprai come tra le linee curve più lunghe cade la stessa superficie di quella compresa tra linee rette più corte. Da ciò si possono considerare diversi altri modi di moto composto, su cui ora sorvolo, dal momento che chiunque potrà concepirli per sé.

52. Se fai attenzione a un terzo movimento che si verifica quando entrambe le estremità della linea si muovono, ma con moto differente, vedrai chiaramente che, facendo il rapporto dei moti, si perviene alla superficie. E, per rappresentartelo più facilmente, considera il doppio della linea *ab*, divisibile fino al punto *b*, che resta l'estremo indivisibile per entrambe le parti divise; si avrà dunque che, mentre *b* resta fermo, *a* si muove (cfr. figura 20). Se ora sposti il punto isolato *a* così che formi un angolo attorno a *b*, potrai conoscere il rapporto delle superfici facendo il rapporto tra la circonferenza, che descrive il punto mobile *a*, e la circonferenza che descrive *b*. Per esempio, sposta il punto mobile *a* in modo da formare un angolo tale che la linea *ad*, che va da *a* fino al punto della linea orizzontale, con il punto fisso *a*, sia metà di *ab*; quindi, la linea mobile *ba* descrive una superficie conica che sarà della metà maggiore della superficie della circonferenza di base

[63] Per «quadrangulus rectilineus» Cusano intende qui un parallelogramma.

che descrive *ab*, e così proporzionalmente in tutti i casi[64]. Di conseguenza è evidente che, quando il [punto] mobile *a* si sposta in modo tale che il suo movimento risulti il doppio del movimento di *ab*, vale a dire quando entrambe cadranno su un'unica linea, allora la linea mobile *ba* descriverà una superficie piana tripla della superficie che descrive *ab*. E questa è l'ultima e la massima [superficie], alla quale le intermedie si avvicinano in maniera proporzionale. Da ciò, sai come formare sezioni di cono che abbiano qualsiasi rapporto tu voglia con la base; e nello stesso tempo sai come ridurre le superfici dei solidi formati da due coni[65] aventi un'unica [superficie di] base in altre figure. E quel che vuoi sapere di queste cose, puoi ottenerlo facilmente così.

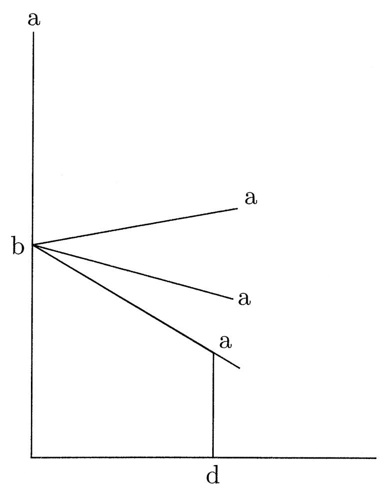
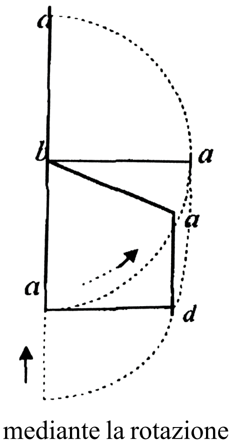


fig. 20

53. Bisogna tuttavia fare attenzione, da quanto detto, a come procedere nelle coniche. Se ABC[66] è il triangolo, *ab* il lato che descrive il cono e *cb* il semidiametro della [circonferenza di] base, prolunga la linea *ac* e conduci da *b* una linea in modo da ottenere il triangolo uguale BDC (cfr. figura 21).

[64] Si può comprendere così la figura (mantello di tronco di cono):



mediante la rotazione di *ab* risulta la superficie del cerchio ab^2. Nello stesso tempo *ab* si eleva sull'altezza *ad* generando un anello circolare.

[65] «rombhus» è il termine utilizzato da Cusano per intendere un solido formato da due coni uguali.

[66] Riportiamo qui la figura tratta da J. M. Nicolle (Nicolle 1998, 85, nota 34) che ben rappresenta il movimento di generazione delle coniche pensato da Cusano.

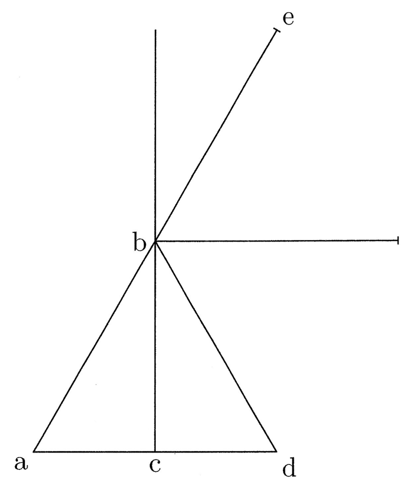
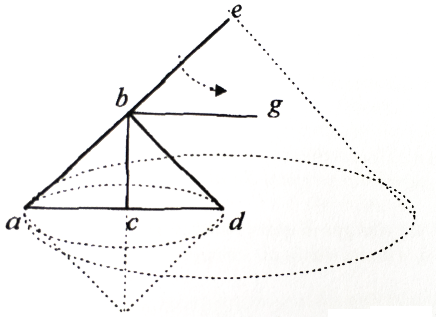


fig. 21

È evidente che, se *ad* resta fisso e si fa ruotare il triangolo ABD attorno a sé, si ottiene un solido[67] formato da due coni uguali. Prolunga, quindi, la linea *ab* e sia *be* uguale ad *ab*. È chiaro che, se si compie la rotazione come prima [attorno a *ad*], la linea *be* genera una superficie tripla rispetto alla superficie che genera *ab*, e *ae* una superficie conica quadrupla rispetto a quella generata da *ab*. Così, se sposti *bd* in modo che si trovi a metà tra *bd* e *be*, risulterà una superficie doppia, con *bd* una uguale e *be* una tripla, e si giungerà sempre a metà quando si forma un angolo retto con il semidiametro della [circonferenza di] base. Se invece si sposta [*bd*] più in là [della metà] o di qua [della metà], si genererà una [superficie] maggiore o minore, il che è noto da quanto detto in precedenza. Sai, dunque, che, quando il cono e il cilindro hanno la stessa base e il lato del cono è uguale all'altezza del cilindro, la superficie del cilindro è sempre doppia rispetto a quella del cono, e se è maggiore [dell'altezza del cilindro], [la superficie] sarà maggiore, e se è minore [dell'altezza del cilindro], [la superficie] sarà minore, in maniera proporzionale.

54. Se prendi come lato del cono la corda di un arco[68] e descrivi su di esso l'arco,



[67] Il «rombhus» di cui parla Cusano è il solido generato dalla rotazione del triangolo attorno alla base, ossia un solido risultante dall'unione di due coni, congruenti con la base comune e con i vertici opposti rispetto al piano della base. L'altezza del triangolo è il raggio dei due coni, mentre l'altezza di ciascuno dei due coni ha misura pari a metà della misura della base. La conclusione di questo paragrafo («Sai, dunque, che, quando il cono e il cilindro hanno la stessa base e il lato del cono è uguale all'altezza del cilindro, la superficie del cilindro è sempre doppia rispetto a quella del cono, e se è maggiore dell'altezza del cilindro, la superficie sarà maggiore, e se è minore dell'altezza del cilindro, la superficie sarà minore, in maniera proporzionale»), riprende Johannes de Tinemue. Cfr. De Tinemue 1964, I, prop. 2 cor. 462, 23–26.

[68] La figura è preceduta da una figura intermedia nel *Codex Cusanus 219* (Gestrich 1992), che porta alle

come sul lato *ab* l'arco *afb* e su *be* lo stesso arco, allora la superficie che si genera dalla curva *afb* sarà un terzo della superficie che si genera dalla curva *be*. Così, se vuoi ottenere una superficie doppia, fa' com'è stato detto per le coniche. Pertanto, se *afb* è un quadrante, è chiaro che dalla sua rotazione si origina una superficie semisferica e dalla curva *bg* una doppia rispetto a quella, ossia una superficie curva uguale a quella ‹della sfera› di cui *cb* è il semidiametro del cerchio maggiore; e dalla curva *bc* una superficie tripla (cfr. figura 22).

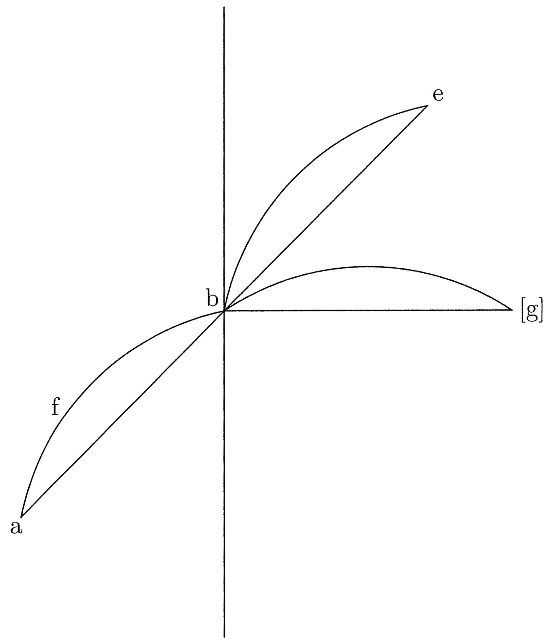


fig. 22

Da ciò saprai come effettuare qualsiasi moltiplicazione tu voglia in queste superfici curve.

55. Se trasformi un arco in una linea curva avente la curvatura di una qualsiasi sezione di parabola o di una sezione obliqua di cilindro —sezioni che non sono archi di circonferenza, ma curve di diversa curvatura[69] —, procedendo nello stesso modo il rapporto delle superfici sarà uguale.

56. Tenendo fisso *a*, descrivi una superficie circolare piana facendo ruotare *ab*, e fai ruotare su *ac* il quadrante del cerchio che si ottiene unendo un punto estremo *b* a un altro *c*, fisso come *a*, allora la superficie risultante dal quadrante sarà doppia rispetto a quella generata dalla linea *ab* (cfr. figura 23).

---

sfere (cfr. Nicolle 1998, 85, nota 34).

[69] «Alia curvitate curvae»: il termine «curvitas» è equivoco, significando a volte la quantità d'inflessione della curva, a volte l'essenza dell'essere curvo (cfr. Hofmann e Hofmann 1980, nota 49, 222). L'espressione «curva aliqua curvitate» potrebbe avere un senso ontologico: sarebbe una curva che parteciperebbe dell'essere curvo. Qui Cusano vede la soluzione – la funzione asintotica – ma la scarta subito. Cfr. anche Cusanus 2010e, 10. Facendo seguito alla dottrina di Oresme sulle *latitudines formarum* (cfr. Oresme 1968), con «curvitas uniformiter difformis» bisogna intendere una curva avente una variazione di curvatura costante. Tuttavia, vista la non chiarezza da parte di Cusano, non ci è dato sapere che tipo di curvatura egli abbia in mente. Sul tema, cfr. Hofmann e Hofmann 1980, nota 6, 234.

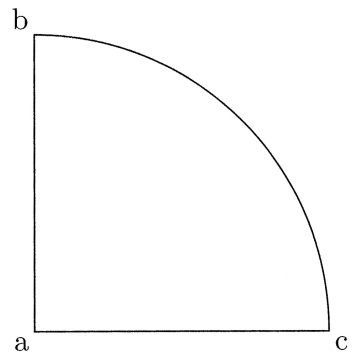


fig. 23

È evidente, infatti, che da *bc* si genera una superficie semisferica e da *ab* il cerchio massimo la cui superficie, moltiplicata per quattro, è uguale alla superficie della sfera, come dimostra Archimede[70].

57. Se vorrai descrivere una superficie cilindrica, una sferica e una conica e infinite sezioni coniche della stessa superficie, procederai così (cfr. figura 24):

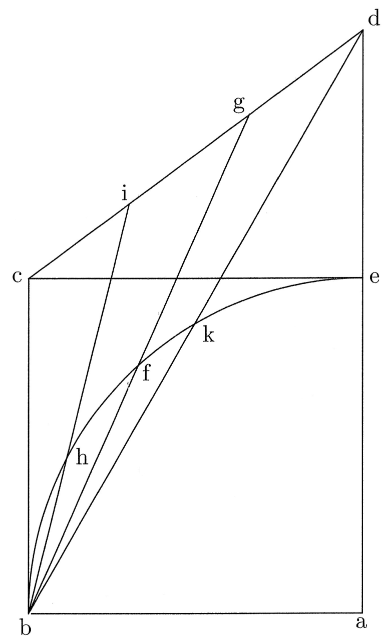


fig. 24

sia *ab* il semidiametro di un cerchio a cui unisci *bc*, uguale ad *ab*, in modo che si formi un angolo retto; traccia da *a* una linea parallela a *bc* di lunghezza indefinita e sia essa *ad*; traccia da *b* verso *ad* una linea doppia rispetto ad *ab* e sia essa *db*. Poi traccia la linea da *d* a *c*. Dico che tutte le linee che si possono condurre da *b* verso *cd* descrivono, attraverso la

[70] Cfr. Archimedes 1910a, I, 33: «la superficie di ogni sfera è quadrupla del suo cerchio massimo» (tr. cit., p. 152); Johannis de Tinemue (1964, I, prop. 6, 480, 42ss.); Busard 1980, prop. 7.

rotazione, sezioni coniche uguali o alla piramide[71] *bc* o alla conica *bd*, poiché da *bc* e *bd* si originano superfici uguali che sono il doppio della superficie piana del cerchio di cui *ab* è il semidiametro. Precedentemente è stato mostrato che le intermedie si rapportano allo stesso modo, per esempio, *bi* e *bg* o altre del genere. È evidente, infatti, che le superfici non possono essere maggiori di quella che risulta da *bc*, né minori di quella che risulta da *bd*. Poiché queste sono uguali, così lo saranno tutte le intermedie. Descrivi il quadrante di un cerchio, di cui *ab* è il semidiametro, e sia esso *be*. È chiaro, da quanto detto, che la superficie che si origina dalla curva *be* è uguale a quelle suddette[72].

58. Considera linee curve, ma non circolari, generate da una linea che si muove sui suoi due punti estremi con moto non uguale, come se la retta *ab* si muovesse su *b* più [velocemente] di come si muove su *a*; poni che *a* si muove sulla linea *ac* e *b* sulla curva *bd*: se ciò avviene regolarmente, allora quando *a* sarà giunta al centro di *ac*, anche *b* giungerà al centro di *bd* (cfr. figura 25). Può anche essere che un punto si muova regolarmente con un moto continuo uguale, e un altro con un moto non uguale: per esempio, [un punto può muoversi] all'inizio più velocemente, poi in modo più lento e continuo, con una irregolarità per così dire regolare[73]. Da questi diversi movimenti si generano diverse curvature: alcune saranno uguali a sezioni coniche, altre a sezioni trasversali cilindriche o a sezioni oblique sferiche[74].

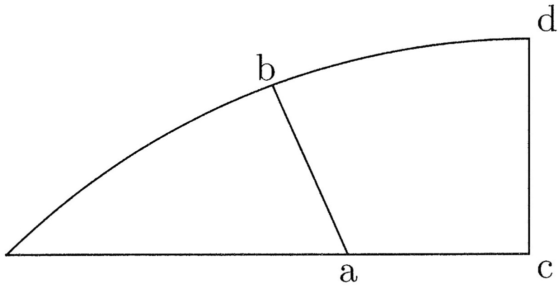


fig. 25

59. Da ciò si ha che le superfici curve delle sezioni che si definiscono parabole e quelle delle trasversali cilindriche non derivano direttamente dal movimento di una linea. Se vuoi cercare i rapporti di queste sezioni, procedi in questo modo: considera l'eccesso della corda sulla freccia; questo eccesso sarà pari al movimento della linea uguale alla freccia su uno dei suoi punti[75], mentre il movimento dell'altro punto sarà pari alla curva. Perciò, la superficie sarà la metà di quella prodotta dalla freccia sulla curva se la linea non

[71] Nel testo dei manoscritti e delle prime stampe si trova per errore «pyramidalis», anziché «columnalis». Omnisanctus notò l'errore e lo corresse nell'edizione *p*.

[72] Si tratta delle sezioni coniche che risultano dalla rotazione della figura intorno all'asse *ad*. La figura considerata si ritrova nel primo tentativo di rettificazione nella prima parte del secondo libro, dove Cusano determina un tronco di cono il cui mantello è uguale alla superficie della semisfera. L'approssimazione viene generalizzata poco più tardi a tutti quegli archi più piccoli del settore circolare.

[73] L'espressione latina è «per aequalem scilicet inaequalitatem».

[74] Per «sectio trasversalis cylindri» bisogna intendere una sezione obliqua di cilindro, vale a dire un'ellisse; quanto alla «sectio obliqua sferica» Cusano sembra dimenticare che si tratta molto semplicemente di un cerchio.

[75] Il testo parla dell'eccesso della corda rispetto alla freccia mentre *ab* è una semicorda; si ha $ea = ab – ac$ = semicorda–freccia.

fosse mossa su una delle sue estremità, e sarà maggiore della metà a seconda del rapporto tra il quadrato dell'eccesso[76] del suo arco sulla freccia e il quadrato della curva[77].

60. Prendi, per esempio, la porzione di cerchio compresa tra [un arco pari a] un sesto della circonferenza, la semicorda e la freccia, e sia essa segnata con *ABC*; sia *ab* la semicorda del doppio dell'arco, *ac* la freccia, *d* il centro del cerchio. Traccia *db*, *dc* e la linea *bc* (cfr. figura 26). È chiaro che *ac* e *ad* sono uguali così come i triangoli DBA e BAC. La porzione [di superficie curvilinea] al di sopra della linea *bc*, di cui la porzione di cerchio [*ABC*] eccede il triangolo, deriva quindi dal movimento della freccia *ac* su entrambe le sue estremità. Se le due estremità si muovessero con lo stesso moto, la porzione al di sopra della linea *bc* sarebbe uguale alla porzione BAC; ma, poiché le estremità non si muovono con lo stesso moto, allora essa è minore. E, affinché tu veda come esse non si muovono con lo stesso moto, traccia da *b* verso *a* la linea uguale ad *ac* e sia *be* uguale ad *ac*. Si muova dunque *b* sull'arco *bc* e, mentre *b* si muove sull'arco *bc*, sarà necessario che *e* si muova verso *a*. Dunque, nello stesso tempo in cui *e* si muove sulla linea *ea*, *b* si muove sull'arco *bc*. Dunque, la superficie della porzione [di cerchio ABC] supera la metà della porzione di cerchio DBC di una quantità pari al rapporto del quadrato della linea *ea* e il quadrato della linea uguale alla curva *bc*. Infatti, il prodotto di *ac* per l'arco *bc* dovrebbe essere metà di quello di *db* per lo stesso arco, essendo *ac* la metà di *db*. Ma, poiché l'estremità che resta fissa in *d* si muove su *ac*, allora supera la metà. La curva *bc* è quindi il triplo di *ea*, e così [la porzione di cerchio ABC] supera di un nono la metà [della porzione di cerchio DBC], e la porzione sopra la linea *bc* sarà due noni della metà [della porzione di cerchio DBC]. Così si opera nelle sezioni delimitate da linee curve.

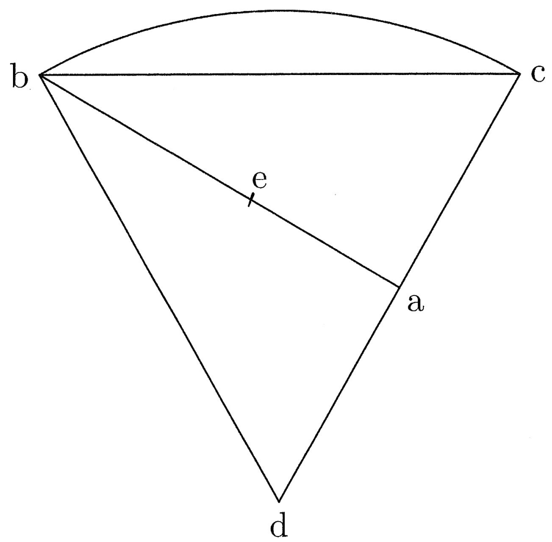


fig. 26

61. Ora, vorrei parlare di come trasformare una linea curva in una [linea] retta, ma non come ho fatto nel primo libro, cioè trasformando la retta in curva, ma immediatamente,

[76] In tutti i manoscritti si trova l'espressione «excessus arcus super sagittam», tuttavia con esso sicuramente s'intende «excessus semichordae super sagittam». La correzione fu effettuata anche da Omnisanctus nell'edizione *p*.

[77] Come osserva Hofmann (Hofmann e Hofmann 1980, nota 57, 223), la regola esposta è inesatta; essa può essere risultata da generalizzazioni di particolari osservazioni su un sesto di cerchio.

ossia mediante una sottile coincidenza, di cui questa è la proposizione[78].

62. Descrivi un quarto di cerchio[79], traccia la prima linea dal centro verso il punto d'inizio dell'arco, una seconda linea, della stessa lunghezza della prima, perpendicolare al punto di tangenza della prima con l'arco, una terza, dal centro all'estremità, uguale al lato del triangolo inscritto al cerchio, una quarta dall'estremità della seconda all'estremità della terza. Se ora porti una quinta linea dall'inizio del quadrante alla quarta in modo che la corda che va dal punto di tangenza di questa quinta linea e la curva all'estremità di tutto il quadrante, ossia la sesta linea, sia uguale alla quinta linea, la quinta sarà minore del quadrante e precisamente della metà della parte della linea compresa tra la curva e la quarta (cfr. figura 27).

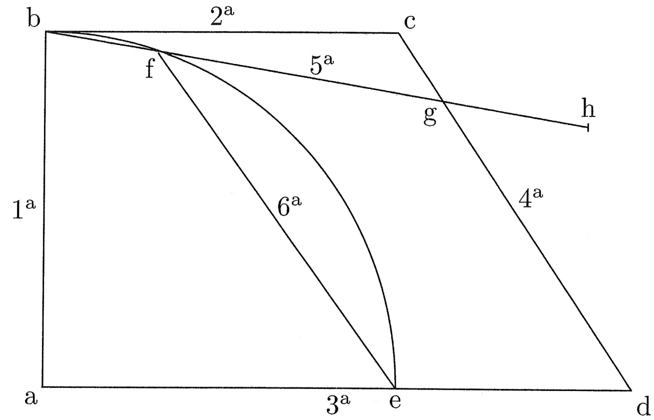


fig. 27

Sia *be* il quadrante descritto intorno al centro *a*, *ab* la prima linea, *bc* la seconda uguale e perpendicolare ad *ab*, *abc* l'angolo retto, *aed* la terza linea uguale al lato del triangolo inscritto, e *cd* la quarta linea. Traccia poi da *b* una linea verso *cd*, e sia questa *bg*; nel punto in cui essa taglia il quadrante *be*, poni *f*, e sia questa la quinta linea. Da *f* traccia la sesta che è la corda *fe*. Dico che se *fe* è uguale a *bg*, allora *bg* è minore del quadrante *be* della metà di *fg*. Aggiungi, quindi, la metà di *fg* ad *bg* e sia *gh* la metà di *fg*. Dico che *bh* è uguale alla curva *be*[80].

63. Dimostrazione. Per prima cosa suppongo che la differenza tra la somma tra la quinta e la sesta e la parte compresa tra la curva e la quarta linea, che chiamo sempre parte, è uguale a quella che c'è tra la parte della quinta linea che è la corda, e la sesta linea, che è la corda della parte residua dell'arco del quadrante; e che questa differenza tra la quinta linea, che è la minore del quadrante, e la sesta che, sommata alla parte, è maggiore, è il doppio della differenza tra la quinta linea, che è minore della curva del quadrante, e

[78] Cfr. Cusanus 2010g, 31–33. Secondo Hofmann la dimostrazione che segue non vale che per un angolo di 60 gradi e a condizione di accettare un'ampia approssimazione. Tutto il procedimento è esposto in Hofmann e Hofmann 1980, nota 59, 223.

[79] In *Cu* le figure dal 52 al 54 sono ruotate di 90 gradi, con *ad* a formare la base (cfr. Gestrich 1992).

[80] Dalla prop. 32 del libro II degli *Elem*enti di Euclide si ha che l'angolo cbg = l'angolo bef. Poniamo sulla linea prolungata *bc* il segmento $bx = be$, cosicché il triangolo *BGX* = il triangolo *EFB*. Da ciò segue (Euclide 2007, III, 20) che il punto g si trova sull'arco *xgb* congruente all'arco *bfe*. Se si pone il raggio di entrambi i cerchi in questione con la lettera *r*, si ha che: $bg = ef = 1,1580r$; $fg = 0,8237r$ e $bh = 1,5699r$. Questo risultato è piuttosto preciso (poiché l'arco misura 1,5708*r*), ma resta al di sotto del limite di Archimede (1,5704 *r)*.

la sesta linea che, sommata alla parte, è maggiore del quadrante; e che dunque, quanto maggiore è la loro differenza, tanto più lunga è la linea che si trova al centro tra la quinta e la sesta sommata alla parte, linea che chiamo linea di mezzo; e che quanto meno esse differiscono, tanto minore è la linea di mezzo[81]. Suppongo, in secondo luogo, che la sesta, sommata alla parte, possa superare il quadrante della metà della parte. Infatti, essa può superarli di una parte minore e di una maggiore, e così, anche di una parte che non è né maggiore, né minore della metà.

64. Da ciò inferisco che questa sesta [linea], sommata alla parte, eccede il quadrante, così come il quadrante eccede la quinta [linea]; che la parte è uguale alla differenza delle corde e la sesta è uguale alla quinta. Le altre, infatti, si rapportano tra di loro di conseguenza. Se lo neghi, perché dici che la differenza delle corde è minore della parte, allora la linea di mezzo anche è minore; e [se lo neghi], perché il minore è sottratto alla sesta [linea] sommata alla parte come prima, dato che la parte è per sé maggiore e la metà della parte è maggiore della metà della differenza delle corde, questo è impossibile: è impossibile, cioè, che la linea, da cui si sottrae di meno, sia minore di quanto sarebbe se si sottraesse di più. Allo stesso modo, se dici che la differenza delle corde è maggiore della parte, allora la linea di mezzo sarà maggiore e tuttavia si sottrarrà più di prima, quando era sottratta la metà della parte, che dici minore, il che è di nuovo impossibile. Di conseguenza, è evidente che, se la sesta [linea], sommata alla parte, eccede [l'arco de] il quadrante della metà della parte, sarà necessario che la parte sia uguale alla differenza delle corde e, di conseguenza, che la sesta [linea] sia uguale alla quinta, che è quanto si voleva trovare.

65. Da quanto detto segue facilmente la quadratura del cerchio. Infatti, il medio proporzionale tra *bh* e il diametro del cerchio è il lato del quadrato che quadra il cerchio (cfr. figura 28).

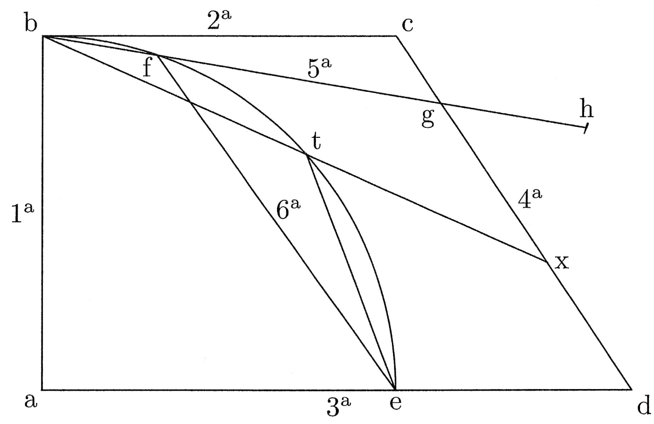


fig. 28

Infatti, segue che se *bx* è uguale a *bh*, allora nella rotazione descrive una sezione conica la cui superficie è uguale alla metà di quella della sfera e il cui bordo ha una lunghezza uguale a un quarto della circonferenza del cerchio maggiore di questa sfera, che è ciò che si cercava in particolare.

[81] Il ragionamento di Cusano è il seguente: $\frac{(bg+ef+fg)}{2} = bg + [\frac{(ef-bf)}{2}]$. Poco più avanti (64, 1–5) dalla dimostrazione che segue si capisce che il *medium* deve essere posto in relazione alla differenza tra le corde. Cusano non era ancora del tutto convinto di tale dimostrazione e pertanto cercò di dare una delucidazione più chiara, ma ancora insufficiente, nella *Declaratio rectilineationis curvae*, indirizzata a Peurbach.

66. Ora, diversamente si trova una linea retta uguale al[l'arco di un] quadrante, e cioè in questo modo. Se la sesta linea, sommata a una parte della quinta linea, è uguale al[l'arco di un] quadrante, è necessario che siano uguali tra di loro. Si utilizzi la figura precedente e sia *bpq* la quinta [linea] e *ep* la sesta (cfr. figura 29).

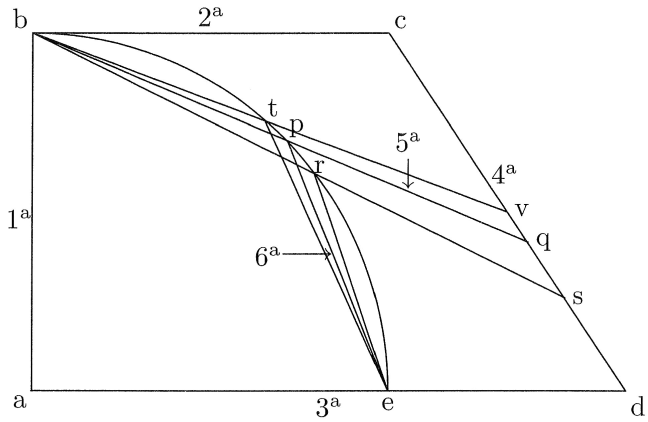


fig. 29

Dico che, se *ep* e *pq* sono uguali al[l'arco del] quadrante *be*, allora *ep* sarà uguale a *eq*. Per dimostrarlo, suppongo, in primo luogo, che, se porti la quinta [linea] da *b* al centro della quarta [linea] *cd*, che è *v*, la parte *tv* sarà la più corta tra tutte le altre e aumenterà di continuo al di sopra e al di sotto. In secondo luogo, suppongo che la sesta [linea], sommata a questa parte minima, sia maggiore del[l'arco del] quadrante, e così occorre che la sesta [linea], sommata alla parte che deve essere uguale al[l'arco del] quadrante, sia minore. In terzo luogo, suppongo che si possa dare una sesta [linea] che, sommata alla parte, sia uguale al[l'arco del] quadrante. In quarto luogo, suppongo che la somma delle seste [linee] e delle parti aumenti contemporaneamente e di continuo da *e* verso *b*, mentre le parti diminuiscono[82]. Da queste supposizioni, che sono evidenti e facili a chiunque, si dimostra la proposizione.

67. Infatti, se dirai che la sesta [linea] *ep* è maggiore della parte *pq*, allora essa sarà maggiore della metà del[l'arco del] quadrante. E dunque si avrà che la sesta [linea] *er* è uguale alla metà del quadrante e la parte *rs* sarà maggiore di *pq*, per la prima ipotesi. La somma di *er* e *rs* sarà maggiore del[l'arco del] quadrante e contemporaneamente minore della somma di *ep* e *pq*, che, per la quarta ipotesi, è uguale al[l'arco del] quadrante. E così, la minore sarà maggiore della maggiore, il che è impossibile. E se dirai che *ep* è minore di *pq*, segue la stessa cosa; infatti, sarà minore della metà del[l'arco del] quadrante. Si avrà che *et* è uguale alla metà del[l'arco del] quadrante, la cui parte *tv* sarà minore della parte *pq*, e di conseguenza la somma di *et* e *tv* sarà minore della somma di *ep* e *pq*. Così, la

[82] Anche con quest'altro tentativo risulta un'approssimazione al di sotto del limite di Archimede. Infatti, l'angolo $pqe = \frac{1}{2}135^\circ$; *q* si trova dunque sull'arco di circonferenza attraverso *b* ed *e*, il cui centro taglia a metà l'arco *be*. Da ciò risulta che $ep + pq = 1,57058ab$, mentre l'arco $be = 1,57080ab$. Questa approssimazione resta dunque al di sotto del limite archimedeo di 1,57042 *ab*. Se il punto di divisione *q* si trova su *c*, allora $eb + bc >$ arco *eb*; se esso si trova su d, allora $ep + pd <$ arco *eb*. Cusano deduce che esiste un punto intermedio tale che $ep + pq =$ arco *eb*. È chiaro che la somma $ep + pq$ aumenta continuamente quando *p* si muove sull'arco *eb* verso *b*, ma il punto di partenza del moto non è *c*: è il punto di intersezione di *bd* con l'arco *eb*. Il punto *r* non può essere dunque a destra, ma a sinistra di *p*.

maggiore sarà minore della minore, il che è, come nel primo caso, impossibile. Il motivo per cui la somma della sesta [linea] e della parte può essere uguale al[l'arco del] quadrante è chiaro: è evidente che ciò accade quando la sesta è uguale alla parte della quinta, il che è ciò che si cercava.

68. Dalla suddetta scoperta, se vuoi, [potrai] ricavare come ridurre ogni porzione di superficie sferica in una superficie conica o in una cilindrica, anche se non conosci il rapporto tra una porzione di superficie sferica e la superficie di tutta la sfera, e ciò nel modo seguente: sia, per esempio, il quadrante ABC come quello di prima; traccia il suo arco *hc* che conosci e che è pari a due terzi del quadrante (cfr. figura 30).

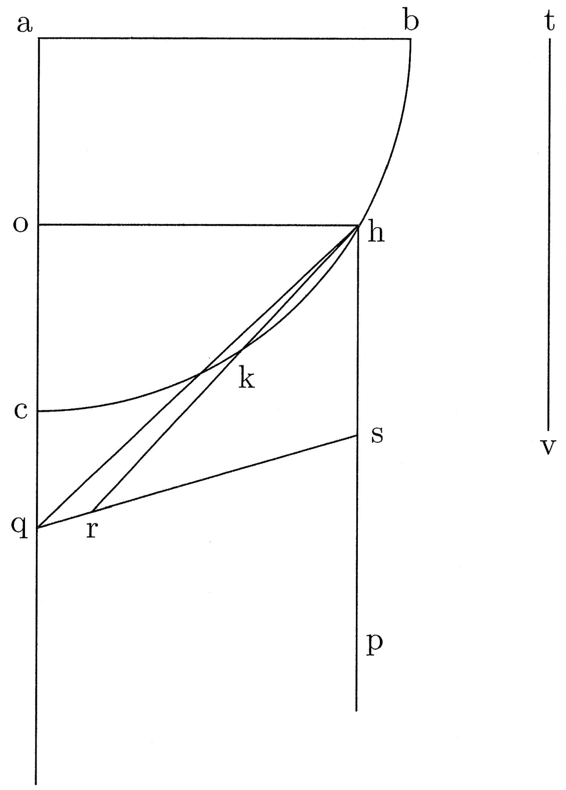


fig. 30

Traccia la perpendicolare da *h* ad *ac*, e sia questa *ho*. *ho* sarà, dunque, la semicorda del doppio arco[83]. Prendi una linea retta uguale alla curva *hc*, e sia questa *tv*, la cui metà è la corda *ck*. Da *h* traccia una linea retta passante per *k* che sia uguale a *tv* e sia essa *hkr*. Quindi, fa' passare da un punto qualsiasi della linea *hp*, per esempio *s*, una linea da *r* verso *aq*, e sia essa *sq*, in modo che la linea condotta da *h* al punto dove *aq* taglia la linea, vale a dire *q*, sia il doppio di *hs*. La superficie cilindrica generata da *hs* sarà uguale alla superficie sferica generata dall'arco *hc*, alla superficie conica generata da *hq* e alle intermedie che sono tracciate da *h* verso *sq*, come quanto fatto in precedenza, il che è assolutamente evidente dalle premesse. E così, se sai che una superficie cilindrica è uguale a [quella della] sfera, sarai capace di trovare grazie a ciò una [superficie] conica uguale, il cui bordo ha una lunghezza pari a [quella della] linea curva del cerchio maggiore.

[83] Il testo che segue contiene una generalizzazione delle prime proposizioni sui tronchi di cono aventi la stessa superficie laterale. Per «semicorda del doppio arco», si intende il seno. Cfr. *infra*, nota 46.

69. E poiché, grazie ad Archimede[84], sai come ridurre ogni porzione di superficie sferica in una superficie circolare piana, e da quanto detto è evidente come questa si riduce in una cilindrica e di conseguenza in una conica, da ciò e da quanto appena premesso è chiaro come potrai ridurre ogni curva in linea retta, anche se non conosci il rapporto di questa con l'intero cerchio maggiore; e quest'arte sottile è superiore alla quadratura del cerchio. Al contrario, se hai una linea retta uguale a una curva, allora potrai trovare la superficie cilindrica e di conseguenza le altre [superfici] coniche che sono uguali a quella sferica.

70. A proposito di questo, già Archimede[85] aveva scoperto, nella quadratura della parabola, come questa superficie potesse essere ridotta a [quella del] quadrato, dimostrando che la superficie compresa tra una linea retta e la sezione di un cono retto è quattro terzi [della superficie] del triangolo che ha come base la stessa linea retta della parabola e come altezza l'altezza della parabola. È ora evidente come si può trasformare una [superficie] quadrata in una superficie circolare e che con essa si possono trovare una [superficie] cilindrica e una [superficie] conica uguali. Da quanto detto, hai il mezzo per ridurre la linea curva di una sezione di questa parabola in una retta, e, se ti applicherai, potrai così rettificare ogni curvatura regolare, anche della sezione obliqua del cilindro[86].

71. Adesso voglio capire come si giunge alla quadratura del cerchio attraverso le lunule, strada che gli antichi hanno percorso invano[87]. L'obiettivo è trovare, tra il lato del poligono circoscritto al cerchio e il lato del poligono inscritto, una linea che tagli la lunula in modo che il triangolo[88] sia uguale alla porzione del cerchio di cui quello sarà stato l'arco (cfr. figura 31). Per esempio, sia *bc* l'arco del cerchio di centro *a*, e sia *bc* uguale a un terzo della circonferenza, alla quale è circoscritto il triangolo di lato *ef*; una volta tracciate le linee *af* e *ae*, sia la linea *cb* la corda o il lato del triangolo inscritto. Voglio determinare una linea *ik*, compresa tra *ef* e *bc*, che tagli la lunula LMN, in modo che essa sia uguale alle porzioni BIL e CKN e il triangolo AIK sia uguale alla porzione di cerchio ABMC[89].

72. Per questa ricerca, suppongo che il lato [del poligono] inscritto sia minore dell'arco e che quello [del poligono] circoscritto sia maggiore [dell'arco], e che sia tanto maggiore quanto minore è il lato [del poligono] inscritto. In secondo luogo, suppongo che possano cadere due linee tra il lato [del poligono] inscritto e il lato [del poligono] circoscritto, di cui una è uguale all'arco e l'altra è posta in modo tale che il triangolo rettangolo

[84] Cfr. Archimedes 1910a, I, 42: «la superficie di qualunque segmento sferico minori di un emisfero è uguale ad un cerchio il cui raggio è uguale al [segmento di retta] condotto dal vertice della sezione sulla circonferenza del cerchio base del segmento sferico». Cfr. anche Archimedes 1910a, prop. 43 e De Tinemue 1964, prop. 3 (532, 1–6).

[85] Archimede, nel *De Quadratura parabuli*, scrive: «… qualunque segmento compreso da una retta e da una sezione di cono rettangolo è quattro terzi del triangolo avente la stessa base della sezione e altezza uguale» (Archimede 1974, prop. 505). Hofmann e Hofmann 1980, nota 72, 227 evidenzia che, nel definire la parabola, egli si rifà all'antica scuola di geometria di Menecmo (ca. 380 a.C.– ca. 320 a.C.), allievo di Eudosso, noto per la sua basilare scoperta delle sezioni coniche e per aver dato una soluzione all'annoso problema della duplicazione del cubo servendosi appunto di sezioni coniche: parabola e iperbole.

[86] Anche qui Cusano parla della possibilità di rettificare la curva per approssimazione continua; non di quella esatta che egli, da fedele aristotelico, considerava razionalmente impossibile. Egli immaginava di poter ottenere l'estensione della parabola e dell'ellissi dalla superficie usando il procedimento contrario a quello sopra indicato. Quando parla di una linea avente una «curvitatem regularem», Cusano intende evidentemente un arco senza punti di flessione con una curvatura che si modifica continuamente, come si riscontra nell'esempio indicato dell'ellissi.

[87] Questa strada d'accesso alla quadratura del cerchio, inaugurata da Ippocrate di Chio, non risulterà utile a Cusano, tanto più che egli confonde lunula e segmento circolare. Cfr. Cusanus 2010c, 6, 3–5.

[88] L'espressione latina è «triangulus rectilinealis», ossia delimitato da lati dritti.

[89] In questo caso si tratta di eguagliare il settore circolare.

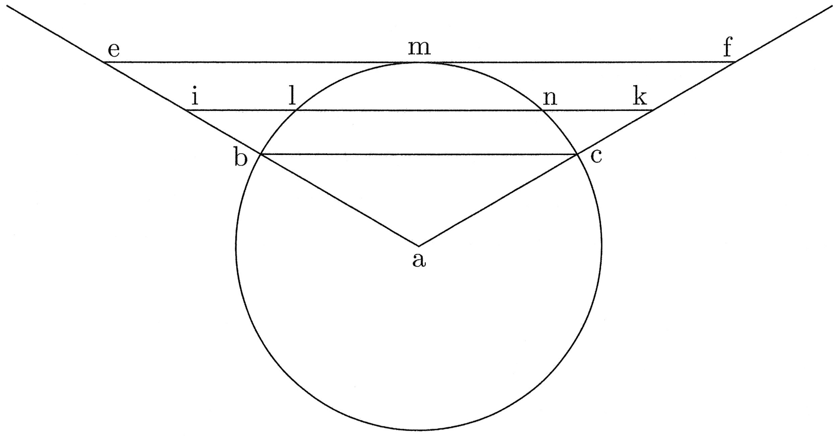


fig. 31

risulti uguale alla porzione di cerchio. Si indichi come prima [linea] quella che coincide con il lato [del poligono] inscritto, come seconda quella uguale all'arco, come terza quella che è posta in modo tale che il triangolo rettangolo risulti uguale alla porzione di cerchio, come quarta quella che coincide con il lato del poligono circoscritto. In terzo luogo, suppongo che queste quattro linee si rapportino tra di loro in modo tale che, quando cresce una, crescono tutte e, quando diminuisce una, diminuiscono tutte; perciò, all'aumentare una, segue che aumenta anche l'altra. In quarto luogo, suppongo che quanto più aumentano, tanto più differiscono, e quanto più diminuiscono, tanto meno differiscono. In quinto luogo, quanto più le linee differiscono, tanto più differiscono i loro quadrati.

73. Da ciò affermo che: quanto maggiore è la quarta linea, tanto maggiori sono la terza, la differenza delle linee e [quella] dei loro quadrati. Allo stesso modo, quanto maggiore è la seconda linea, tanto maggiori sono la prima, la differenza delle linee e [quella] dei loro quadrati. Similmente, quanto maggiore è la differenza tra il quadrato della quarta linea e il quadrato della terza, tanto maggiore è la differenza tra il quadrato della seconda e il quadrato della prima, e così anche la differenza delle differenze. Di conseguenza, tanto maggiore è la quarta linea, tanto maggiori sono la prima, le differenze dei loro quadrati, e la differenza delle differenze tra la quarta e la terza, da un lato, e tra la seconda e la prima, dall'altro. A seconda di come si rapportano il quadrato della quarta linea e il quadrato della prima, si rapporteranno le differenze tra la quarta linea e la terza, da un lato, e tra la seconda linea e la prima, dall'altro. Questo significa che, se il quadrato della seconda linea è maggiore del quadrato della prima di una certa quantità, e se il quadrato della quarta linea è il doppio del quadrato della prima, allora il quadrato della quarta linea sarà maggiore del quadrato della terza [e precisamente][90] del doppio; e se il rapporto tra il quadrato della quarta e il quadrato della prima è diverso, anche il rapporto tra le quantità di tali differenze è diverso.

74. Se lo negassi, e dicessi che il rapporto tra il quadrato della quarta linea e il quadrato della prima è di tre a uno, ma che il rapporto tra l'eccesso del quadrato della quarta sulla terza e l'eccesso del quadrato della seconda sulla prima non è lo stesso, e che an-

[90] Il ragionamento di Cusano è il seguente. Se si pone $\textcircled{1}$ = prima linea; $\textcircled{2}$ = seconda linea, $\textcircled{3}$ = terza linea e $\textcircled{4}$ = quarta linea, allora si ha che: Se si pone: $\frac{\textcircled{4}^2}{\textcircled{1}^2} = \frac{(\textcircled{4}^2-\textcircled{3}^2)}{(\textcircled{2}^2-\textcircled{1}^2)}$. Da ciò segue che, se $(\textcircled{2}^2 > \textcircled{1}^2)$ e se $\textcircled{4}^2 = \textcircled{2}\times\textcircled{1}^2$, allora $\textcircled{4}^2 > \textcircled{2}\times\textcircled{3}^2$. Cfr. Hofmann e Hofmann 1980, nota 75, 228 e Nicolle 1998, nota 51, 86.

zi l'eccesso del quadrato della quarta sul quadrato della terza è pari a tre e l'eccesso del quadrato della seconda sul quadrato della prima è pari a uno, dico che ciò implicherebbe una contraddizione. [In questo caso], infatti, risulta che la prima e la seconda linea sono minori e più simili alla prima e alla seconda [del caso precedente], le quali si rapportano in modo tale che la differenza sia la metà [della differenza tra la terza e la quarta]. Infatti, quanto minore è la differenza degli eccessi, tanto più simili e minori sono le linee, e da ciò segue che la prima e la seconda sono maggiori della prima e della seconda, che differiscono della metà dalla differenza tra la quarta e la terza. Infatti, quanto più la differenza tra la quarta e la terza linea supera la differenza tra la seconda e la prima, tanto maggiori e differenti risultano la seconda e la prima. Saranno, quindi, maggiori della prima e della seconda dove la differenza è la metà, allorché si pone la differenza uguale a un terzo della differenza della quarta e della terza. Esse saranno così maggiori e minori, più simili e più dissimili, e ciò è contraddittorio. La stessa contraddizione seguirebbe se si ponesse che la differenza tra la seconda e la prima linea è maggiore della metà della differenza tra la quarta e la terza. E questa contraddizione si verificherebbe in tutti i casi in cui il rapporto tra l'eccesso del quadrato della quarta sulla terza e l'eccesso del quadrato della seconda sulla prima fosse diverso da quello tra il quadrato della quarta e il quadrato della prima.

75. Se dunque, con questo sussidio, volessi tagliare una lunula, o quadrare un cerchio, fa' in questo modo, per esempio in un quadrato (cfr. figura 32).

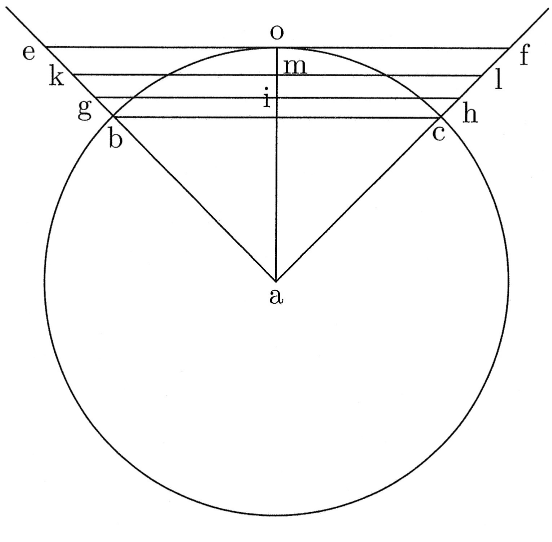


fig. 32

Sia dunque *bc* il quadrante descritto intorno al centro *a*. Traccia da *a* verso *b* e *c* [due] linee di lunghezza indefinita, e traccia la corda *bc*. Il lato [del quadrato] circoscritto *eof* che tange l'arco in *o*; traccia il semidiametro *ao*, poi segna la seconda linea *gh* uguale all'arco e laddove essa taglia *ao* si ponga *i*. Poi, si tracci la terza linea *kl* , e dove essa taglia *ao*, si ponga *m*. Se, quindi, la terza, cioè, *kl*, è tale che il suo quadrato è minore del quadrato di *ef* del doppio della differenza tra il quadrato di *bc* e il quadrato di *gh*, e se risulta che il prodotto di *ao* per *ih* è uguale al prodotto di *am* per *ml*, allora otterrai quel che cercavi. Altrimenti, apporta le opportune modifiche finché risulti ciò.

76. Un esempio numerico. Si ponga il semidiametro *ao* uguale a 7, il cui quadrato è 49; *bc* sarà la radice di 98 ed *ef* la radice di 196. Si ponga *gh* uguale a 11, il suo quadrato sarà 121 da cui sottrai 98: resta 23. Da 196 sottrai il suo doppio, cioè, 46: resta 150. Se il prodotto di 7 per 5 più la metà [di uno] fosse eguale al prodotto della metà della radice di 150 per se stesso, cioè ad *am* per *ml*, che è lo stesso, dato che *am* è uguale a *ml*, allora otterresti quello che cercavi, e il doppio di *ml* sarebbe il lato del quadrato uguale al cerchio e un quarto della circonferenza sarebbe 11. Ma, se fai bene i calcoli, troverai che supera di poco 11[91].

77. A livello pratico è piuttosto difficile trovare le linee intermedie, la seconda e la terza. Per risparmiarti la fatica, fa' così (cfr. figura 33): traccia una linea *ac* pari a 7, come il semidiametro, la cui metà è *b*; traccia le perpendicolari *cd* e *be*; sia *dc* uguale a *ac* e *eb* uguale ad *ab* e traccia la linea *aed*. Segna su *cd* il semidiametro e sia *cf* uguale al semidiametro; segna la metà della corda del quadrante, ossia *bc* nella figura precedente, su *be*, e sia *bg* uguale alla metà della corda dell'arco del quadrante. Traccia la linea *fg* e, poiché *cd* è il quadrato la cui radice è *cf*, e *bg* la radice di *be*, allora cerca, tra *be* e *cd*, i quadrati delle metà delle linee intermedie, cioè, della seconda e della terza. Per esempio, sia *ik* il quadrato della metà della seconda linea, e dove essa taglia *fg* poni *l*. Vedi di quanto *ik* supera *be* e fa' che *cd* superi del doppio la terza *mn* in modo che *be* superi *mn* di una quantità doppia di quella di cui *ik* supera *be*; laddove *mn* taglia *fg* poni *o*. Se, dunque, dal prodotto di *mo* per se stesso si avrà lo stesso risultato del prodotto del semidiametro per *li*, otterrai ciò che cercavi, e, raddoppiando *mo*, si avrà il lato del quadrato del cerchio; altrimenti, apporta le opportune modifiche finché risulti così. Come hai operato nel quadrante, così potrai procedere, in maniera proporzionale, negli altri archi di cui ci siamo occupati in precedenza, [potrai] tagliare le lunule e rettificare il cerchio[92].

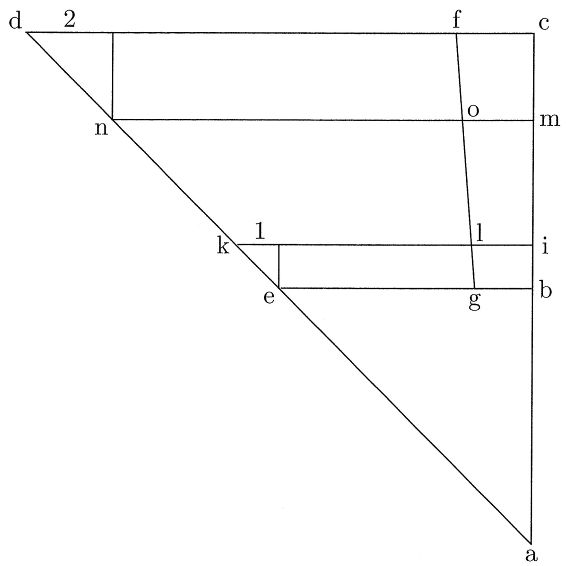


fig. 33

[91] Si cerca la terza linea *kl*. Se $ao = 7$; ① $= bc = \sqrt{2ao^2} = \sqrt{98}$; ② $= gh = 11$; ④ $= \sqrt{4ao^2} = \sqrt{196} = 14$. Applicando la relazione: $\frac{4^2}{1^2} = \frac{(④^2–③^2)}{(②^2–①^2)}$, si ha $\frac{196}{98} = \frac{(196–③^2)}{(121–98)}$, ossia $\frac{2}{1} = \frac{(196–③^2)}{23}$. Si ha dunque che $46 = 196–③^2$; $③^2 = 196–46 = 150$ e $③ = \sqrt{150} = 12,25$.

[92] Cusano pone il semidiametro $ac = 7$; $ab = \frac{7}{2}$; $cd = ac = 7$; $eb = ab = \frac{7}{2}$; $ad = \sqrt{(ac^2 + cd^2)}$; $df = ac$. Subito dopo la descrizione il discorso diventa molto generale e non c'è una vera dimostrazione. Cusano conclude dicendo semplicemente: «apporta le opportune modifiche finché risulti così».

78. Adesso, tuttavia, voglio trattare brevemente anche di altri modi possibili per risolvere immediatamente il cerchio in qualsiasi poligono tu voglia, senza necessariamente risolvere prima la circonferenza del cerchio in una linea retta. Lascio questo compito come esercizio a coloro che hanno più tempo libero di me.

79. Se descrivi i lati dei quadrati circoscritti e inscritti al quadrante di un cerchio e se tracci una linea dal centro del cerchio fino al punto in cui il lato del circoscritto tocca la circonferenza, un'altra dal centro all'estremità del lato fino a chiudere il triangolo, e poi una linea dal centro al lato del circoscritto, [passando] per un punto qualsiasi dell'arco, in modo tale che un'altra linea parallela ai lati dei poligoni vada da un lato all'altro del triangolo [passando] per lo stesso punto dell'arco, allora questa linea sarà uguale alla [somma delle due] porzioni che la linea tracciata dal centro e passante per lo stesso punto dei lati dei suddetti poligoni ritaglierà tra la stessa linea e l'altra, che è il lato del triangolo, condotta fino al punto di tangenza: questa linea parallela sarà la metà del lato del poligono corrispondente all'arco uguale al cerchio.

80. Sia descritto un cerchio attorno al centro *a*. Voglio trovare un quadrato uguale ad esso (cfr. figura 34).

Segno il quadrante, che indico con *bc*, e traccio i lati del quadrato: sia *de* il lato del quadrato circoscritto, che tocca il cerchio nel punto *f*; traccio *af, ad e bc* come lato del quadrato inscritto. Dove *bc* taglia *af*, pongo *k*. Traccio, quindi, da *a* verso *df* una linea che passi per un qualsiasi punto dell'arco *bf*, e sia *g* il punto di tangenza di questa linea con l'arco. Dove essa taglia il lato *bk*, si ponga *l*, e dove taglia il lato *df*, si ponga *m*. [Passando] per *g*, tiro la linea parallela a *df*, da *af* ad *ad*, e sia essa *hgi*. Dico che se *hi* è uguale [alla somma di] *lk* e *mf*, *hi* è la metà del lato del quadrato uguale al cerchio.

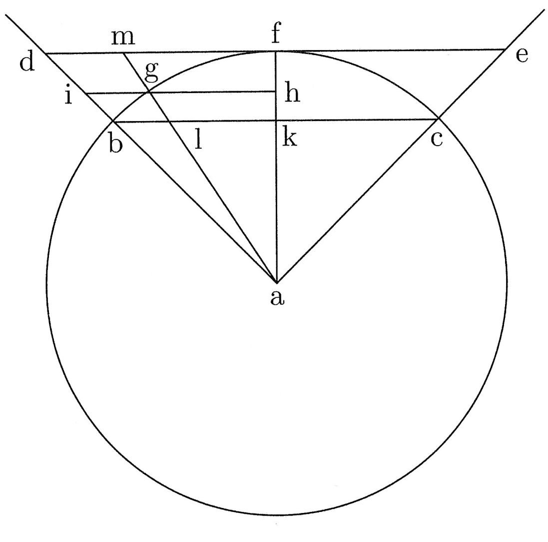


fig. 34

81. Per comprendere ciò, bisogna in primo luogo considerare quanto segue: descrivi un cerchio attorno al centro *a*, traccia nel punto *f* la tangente ad esso di lunghezza indefinita e la linea *af*; poi tira da *a* alla tangente la linea *ac* che taglia il cerchio nel punto *g* e traccia dal punto *o* della linea *af* una linea all'infinito [passante] per *g* e parallela alla tangente.

Su questa linea, attraverso un'altra linea da *a* alla tangente, si ricaverà un'equatrice[93], e traccia *hrd* in modo che *or* sia l'equatrice. La chiamo così perché pone sotto alla lunula OGF, che essa ricava dall'area del cerchio, la lunula HRG avente la stessa grandezza, chiudendo così il triangolo rettangolo ARO in modo tale che risulti uguale alla porzione di cerchio AHF (cfr. figura 35).

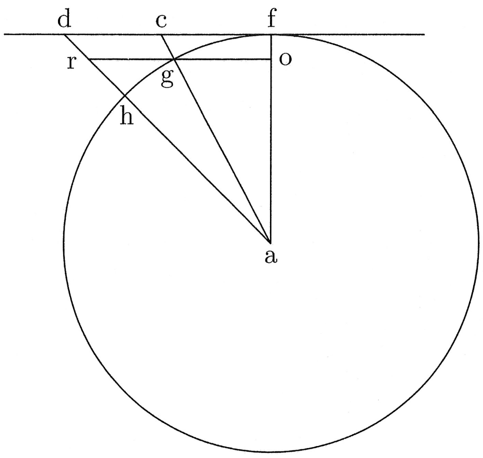


fig. 35

82. In secondo luogo, osservando la figura con la tangente e la linea su cui è ricavata l'equatrice, bisogna considerare che da qualsiasi punto del cerchio si può tracciare una corda in modo che una sua parte tra *af* e *ac*, aggiunta a *cf*, sia uguale alla suddetta equatrice. Sia *h* il punto sul cerchio e *ik* la parte [di corda] tra *ac* e *af* (cfr. figura 36).

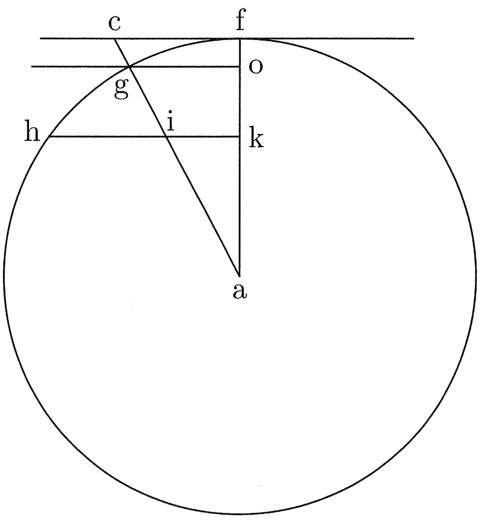


fig. 36

[93] Cusano intende per «aequatrix» una linea parallela alla tangente e perpendicolare al raggio, tale che essa tagli due sezioni uguali, l'una nel cerchio sotto il punto di tangenza; l'altra fuori del cerchio sotto l'equatrice.

83. In terzo luogo, utilizzando la figura precedente con la tangente e la linea su cui è ricavata l'equatrice, bisogna considerare che, se si prende un'altra linea su *ac*, per esempio *al*, e questa viene ruotata dal lato destro tenendo fisso *a*, allora arriva a un certo punto del cerchio dal quale, se si traccia una corda parallela alla tangente fino alla linea *af*, la parte tra *ac* e *af* aggiunta a *cf* sarà uguale all'equatrice, tagliata da *al* (cfr. figura 37). Sia *h* quel punto sul cerchio, *hk* la semicorda, *ik* la parte e *or* la parte dell'equatrice. Non può esserci un altro punto diverso da *h* in cui si verifica quanto detto; infatti, al di qua di *h* le parti superano l'equatrice, al di là di *h* l'equatrice supera le parti. Ciò è vero se *hf* è un semiquadrante, altrimenti sposta il punto *g* finché risulti ciò.

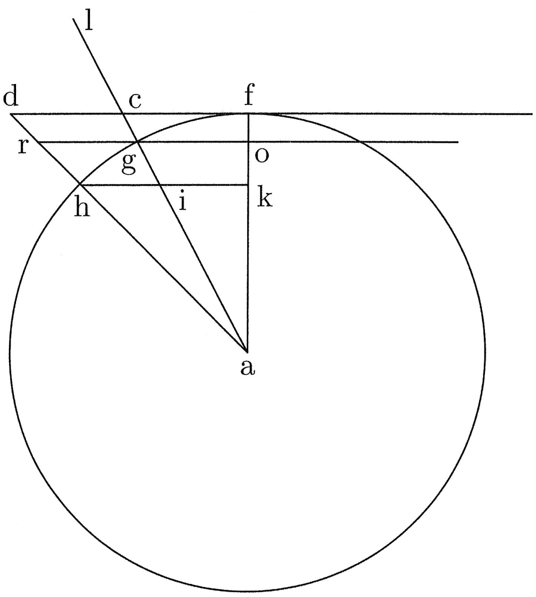


fig. 37

84. Dunque, nel caso in cui si verifichi l'uguaglianza, dico che le parti sono uguali alla vera equatrice e che questa è *or*. Se lo negassi e dicessi che le parti sono minori della vera equatrice, cioè di *or*, allora, se le parti dovessero essere uguali, la linea da *a*, che le dovrebbe tagliare, cadrebbe necessariamente tra *c* e *d*, e così anche l'arco *gf* sarebbe minore di quanto dovrebbe essere e la lunula GOF sarebbe minore di HRG. Ma, poiché dici che *or* è minore dell'equatrice, allora questa cade al di sopra di *or* verso la tangente e *or* al di sotto di essa, verso *hk*; di conseguenza, *or* taglia un arco maggiore rispetto all'equatrice, la lunula GOF sarà maggiore di HRG e quindi [l'arco] sarà contemporaneamente maggiore e minore. Quindi, se dicessi che le porzioni sono maggiori e *or* maggiore dell'equatrice, seguirebbe la stessa contraddizione. La proposizione è dunque evidente.

85. Ora, per ultimo, illustrerò come trovare nello stesso tempo tutti i lati che vuoi dei poligoni uguali al cerchio. Questa è la proposizione: siano dati il semidiametro del cerchio, i semilati dei poligoni circoscritti e le linee inscritte di complemento[94]. Se si conduce una linea dal centro al lato del [poligono] circoscritto, essa taglia una parte più piccola sulla linea di complemento del poligono inscritto e una parte maggiore sul semilato del poligono

[94] Cusano intende per «linee di complemento» le semicorde del poligono inscritto corrispondenti ai semilati dei poligoni tangenti al quadrante, ossia del poligono circoscritto. Egli giustifica questa dimostrazione poco più avanti.

circoscritto che, sommate, sono uguali al semilato del poligono uguale al cerchio: allora, se altre linee fossero tracciate attraverso le parti di tali linee in modo che dette parti si rapportino alle precedenti parti dei semilati come i semilati di un poligono presi insieme si rapportano ai semilati dell'altro, esse taglierebbero in modo simile le parti, la minore dalla linea inscritta di complemento e la maggiore dal semilato del poligono circoscritto, le quali sono uguali al semilato del poligono uguale al cerchio (cfr. figura 38).

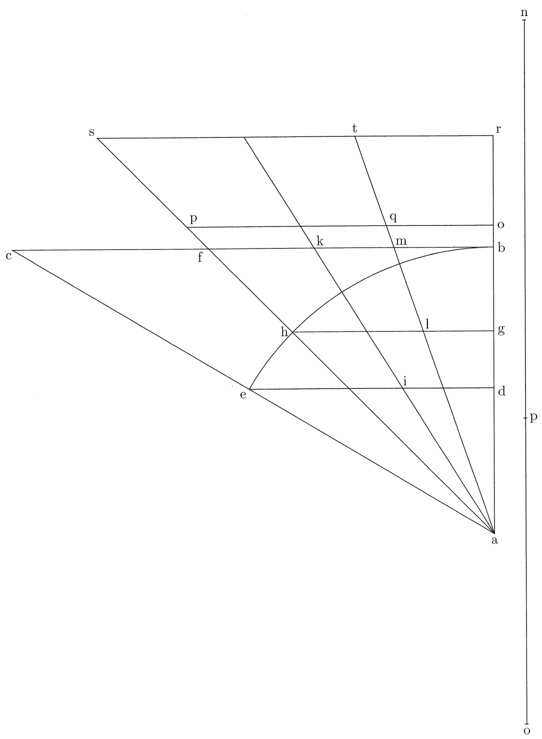


fig. 38

86. Sia descritto un cerchio di centro *a*, il cui semidiametro sia *ab*; siano tracciati il semilato del triangolo circoscritto *bc*, la linea di complemento *de*, il semilato del quadrato circoscritto *bf* e la linea di complemento *gh*. Allo stesso modo, se vorrai, potrai tracciare i semilati dei vari poligoni. Traccia ora una linea da *a* a *bc* e, dove taglia *de*, poni *i*, e, dove taglia *bc*, poni *k*. Traccia, poi, un'altra linea da *a* a *bc* e, dove taglia *gh*, poni *l* e, dove taglia *bc*, poni *m*. Dico che se la parte più piccola di *gh*, che è *gl*, aggiunta alla più grande di *bf*, che è *fm*, è uguale al semilato del quadrato uguale al cerchio, allora, se la parte più piccola di *de*, che è *di*, si rapporta a *gl* come *bc* più *de* si rapporta a *bf* più *gh* e allo stesso modo *ck*[95] si rapporta a *fm*, allora *di* più *ck* sarà il semilato del quadrato uguale al cerchio, e, viceversa, il semilato del quadrato uguale al cerchio si rapporterà al semilato del triangolo uguale al cerchio come le parti suddette [si rapportano tra di loro]. Come hai proceduto in questi poligoni, procedi in tutti gli altri[96].

---

[95] Tutti i manoscritti e le prime stampe presentano qui erroneamente *bk* al posto di *ck*. In *p* Omnisanctus corresse l'errore.

[96] Se $gl + fm =$ semilato del quadrato, allora, se $\frac{di}{gl} = \frac{(bc+de)}{(bf+gh)}$, e se $fe = \frac{ck}{fm}$, allora $di + ok =$ semilato del triangolo. Per una puntuale analisi di questa costruzione, cfr. Hofmann e Hofmann 1980, nota 85, 230, in cui si mostra che il ragionamento cusaniano dà buone approssimazioni nel caso di differenze relativamente insignificanti.

87. Da ciò segue questa proposizione. Infatti, dal diverso numero di lati dei diversi poligoni uguali a uno stesso cerchio, segue un diverso numero dei lati di poligoni circoscritti e delle linee di complemento dei [poligoni] inscritti. Di conseguenza, i lati, presi insieme, si rapportano nello stesso modo in cui si rapportano i lati presi singolarmente. Da ciò, affinché il rapporto dei lati sia lo stesso, anche il rapporto tra le parti che si formano [sui lati] dal centro attraverso le linee per costruire il semilato del poligono uguale al cerchio deve essere lo stesso.

88. Non c'è alcun dubbio tuttavia che si possa dividere la linea tracciata dal centro sui semilati in parti che siano uguali alle linee cercate. Ma potrebbe essere difficile [sapere] come si possano trovare linee di complemento che, sommate ai semilati del poligono circoscritto, danno i lati di poligoni della stessa superficie. Per esempio, se si somma *de* a *bc*, si ha il lato del triangolo, e così, se si somma *gh* a *bf* si ottiene il lato del quadrato uguale. Ma il rapporto dei lati si conosce facilmente da quanto detto sopra. Si ponga invece la linea di complemento nel triangolo uguale al semilato del poligono inscritto, per esempio *de*, e si dispongano le altre linee di complemento allo stesso modo. Si definiscono «complementi» perché, sommati ai semilati dei poligoni circoscritti, danno i semilati dei poligoni della stessa area.

89. Ci potrebbe essere anche un dubbio che le parti abbiano davvero il rapporto che devono avere. In tal caso potrai procedere così. Traccia *ab* di una certa lunghezza e, allo stesso modo, una linea da *a* [che passi] per *f* e una linea *no*, uguale a *bc* più *de*; dividi quest'ultima in due parti che stanno tra di loro come *gh* e *bf*, e siano esse *op* e *pn*. Riportale parallelamente a *bc* tra le suddette linee che partono da *a* [e passano] per *b* e per *f*. La linea tracciata da *a* attraverso *gh* taglia una parte di *op*, che si rapporta alla parte tagliata da *gh* come si rapportano i lati tra loro. Sia, dunque, *oq* la parte sulla linea *op*, che si rapporta a *gl* come deve essere. Se, dunque, *di* è uguale a *op*, allora hai quella parte. Fa' lo stesso con l'altra parte della linea *no*, che è *rs*, e sia *rs* uguale a *pn*. Riportala, come hai fatto prima con l'altra parte, tra le linee che partono da *a* [e passano] per *b* e per *f*, e se la parte tagliata dalla linea *aq* su *rs*, ossia *st*, sarà uguale a *ck*, avrai ciò che cercavi. Altrimenti, apporta le opportune modifiche finché otterrai questo risultato. Questo è un procedimento universale, valido in tutti i poligoni.

90. Da ciò capisci che possiedi un'arte che ti consente di ridurre in una superficie rettilinea qualsiasi porzione di cerchio ricavabile attraverso i raggi[97] dal centro, anche se [la porzione] non ha alcuna proporzionalità[98] con l'intero [cerchio], e di trasformare, grazie all'equatrice, qualsiasi arco di circonferenza in una linea retta, anche se l'arco non ha alcuna proporzionalità con l'intera circonferenza, secondo quanto abbiamo detto in precedenza.

91. [E' ora chiaro che la quadratura del cerchio finora sempre cercata, e, come si sa, non ancora trovata, è stata sufficientemente spiegata. Infatti, essa può essere conosciuta o attraverso la riduzione di una linea retta in una curva di circonferenza[99] —e così è trattata nel primo libro —o, al contrario, attraverso la riduzione di una curva di circonferenza in una linea retta —e così la trovi esposta in due modi in questo secondo libro —, oppure insieme, nel caso in cui, con la riduzione della curva in retta, si trova il lato del quadrato uguale al cerchio, o ancora senza alcuna riduzione della retta in curva e viceversa, ma trovando semplicemente il lato del quadrato. Anche questi procedimenti li puoi trovare

[97] Il termine latino è «sectores». Cfr. Cusanus 2010d, 28.

[98] Con «proporzionalità» qui si intende un rapporto esprimibile con un numero intero.

[99] Il termine latino è «curvam peripheriam», che, sebbene abbia un'estensione semantica maggiore di arco di circonferenza, è inteso da Cusano nel suddetto significato, visto che fa riferimento al libro primo, in cui si affronta precisamente tale problema.

descritti nelle pagine precedenti. È dunque chiaro che questa parte finora sconosciuta è stata abbondantemente e dettagliatamente spiegata, e da questa ne seguono altre che, senza di essa, non potevano essere conosciute, ossia i complementi matematici. Così sia][100].

FACILISSIMA RETTIFICAZIONE DI UN CERCHIO

92.[101] Sia descritto un cerchio attorno al centro *a*, e siano tracciati il diametro *bac* e la corda massima prolungata all'infinito che taglia ad angolo retto *bac*, e sia essa *dae* (cfr. figura 39).

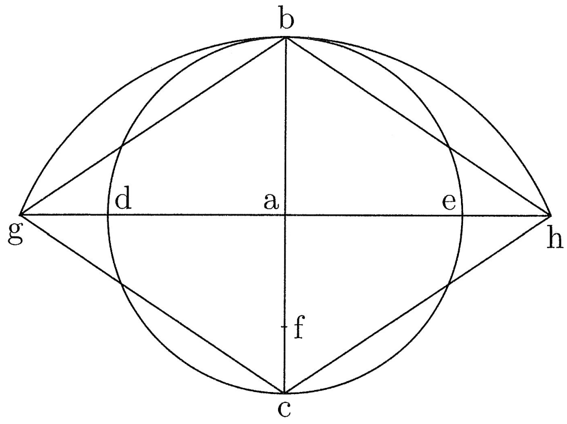


fig. 39

Se attorno a un punto di *ac*, per esempio *f*, che dista da *b* una lunghezza pari alla corda dell'arco di un terzo del cerchio, descriverai un cerchio il cui semidiametro è *fb*, questo cerchio taglierà sulla corda maggiore la [linea] retta *gh*, uguale, o quasi, alla metà del cerchio. Infatti, se da *b* e *c* traccerai le [linee] rette verso *g* e *h*, la superficie BGCH sarà uguale o quasi alla superficie del cerchio BCDE.

93. Per intendere ciò, descrivi il cerchio BCDE attorno ad *a*, come prima (cfr. figura 40); traccia la corda dell'arco pari a un sesto del cerchio, e sia questo *lm*, poi [la corda dell'arco pari a] un quarto [del cerchio], e sia questo *ik*, e [la corda dell'arco pari a] un terzo [del cerchio], e sia *no*. Tieni conto che, poiché ogni corda è minore del suo arco e nell'arco maggiore la differenza tra questo e la corda è maggiore, allora il cerchio, che deve passare per *b*, deve avere il centro sul diametro *bc* e deve tagliare sulla corda estesa [una parte] uguale all'arco. Questo cerchio avrà il centro necessariamente oltre *a*, verso *c*, a una distanza [da *b*] che è tanto maggiore quanto maggiore è l'arco, a cui la corda è sottesa. Il cerchio minimo, di cui non si può dare uno minore, avrà il centro in *a* e il semidiametro *ab*. Invece, il cerchio massimo avrà il centro oltre *a* verso *c*, alla massima distanza da *a*, e il semidiametro massimo. Questo cerchio deve tagliare sulla corda massima una [linea] retta uguale al semicerchio, e questo semidiametro massimo è ciò che si cerca.

[100] Quest'ultimo paragrafo, menzionato come *Vacat*, è cancellato nel folio 65v di *Cu* (Gestrich 1992).
[101] Il titolo è scritto in rosso in *Cu* (Gestrich 1992).

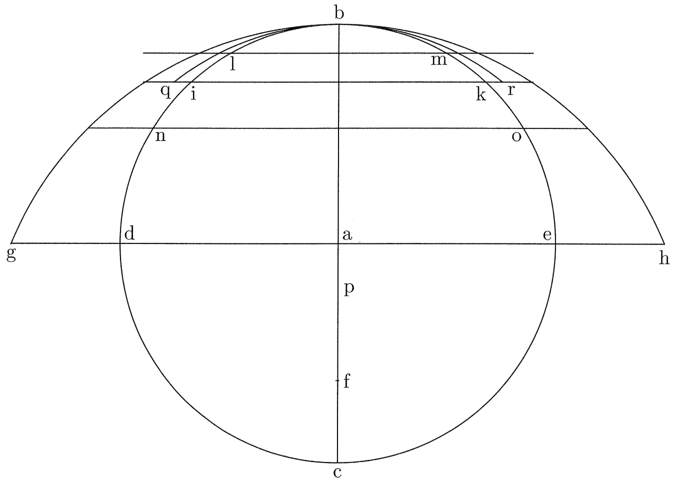


fig. 40

94. In secondo luogo, bisogna assicurarsi che è possibile determinare una corda che sia la media [proporzionale] tra le corde poste in proporzione ad essa[102]. Definisco corde «in proporzione» quelle corde – di cui una è tracciata come minore, l'altra come maggiore –, poste in modo che distino dalla [corda di mezzo] una lunghezza pari all'arco [compreso tra le corde], come *ik* da *lm* e da *no*. Infatti, come l'arco *il* è uguale a *in*, così *lm* e *no* sono dette [corde] in proporzione a *ik*. Dico che è possibile determinare una corda dove entrambe le [corde] in proporzione hanno quadrati, che, presi insieme, sono maggiori del doppio del quadrato della corda di mezzo. Così, se rispetto alla corda *lm* si tracciano altre corde in proporzione [ad essa], i quadrati di queste saranno sempre maggiori del doppio del quadrato di *lm*. Infatti, si può determinare la media proporzionale dove i quadrati delle due [corde] in proporzione saranno minori del doppio del quadrato della corda di mezzo, come nel caso delle [corde] in proporzione a *no*. Così, si può determinare la corda dove i quadrati delle due [corde] in proporzione saranno uguali al doppio del quadrato della corda di mezzo, perché, quanto minore è il quadrato della corda minore in proporzione rispetto al quadrato della corda di mezzo, tanto maggiore è il quadrato della [corda] maggiore, e poiché i quadrati delle due [corde] in proporzione saranno uguali al doppio del quadrato della corda di mezzo, è evidente che questa corda sarà *ik*. Infatti, la somma del quadrato di *lm* e il quadrato di *no* sarà eguale al doppio del quadrato di *ik*. Così, anche la somma tra il quadrato della corda maggiore, cioè *de*, e il quadrato della [corda] in proporzione ad essa, cioè il quadrato della corda minima, sarà eguale al doppio del quadrato di *ik*. E poiché il quadrato della corda minima non può avere alcun valore, è chiaro che il quadrato del diametro è uguale al doppio del quadrato di *ik*, cioè del lato del quadrato inscritto. Questo è vero e vale per tutte e due le corde in proporzione a *ik*[103].

95. In terzo luogo, suppongo che *ik* superi del doppio i due semidiametri, ossia quello del cerchio massimo, che si cerca, e quello del cerchio minimo, il cui semidiametro è *ab*, e questo lo do come noto. Da lì, determino due corde in proporzione a *ik* che, prese insieme,

[102] Per meglio rendere il concetto, si è tradotto qui il termine «comparates» con la perifrasi «corde in proporzione». Le «corde comparate» sono una nozione nuova introdotta da Cusano, non riscontrabile in altri autori.

[103] $2ik^2 = lm^2 + no^2$ e $2ik^2 = de^2 +$ la corda minima^2; dunque: $2ik^2 \approx de^2$ e $ik =$ il lato del quadrilatero iscritto.

saranno uguali ai due semidiametri. Infatti, si possono dare corde in proporzione maggiori, cioè, vicine a *ik*, corde minori, massimamente distanti da *ik* e, quindi, anche uguali.

96. In quarto luogo, da ciò deduco che *no* è il semidiametro, o quasi, del cerchio che si vuole trovare. Infatti, poiché i quadrati delle corde in proporzione uguali ai due semidiametri sono uguali al doppio del quadrato di *ik* e *lm* è il semidiametro del cerchio minimo, se si sottrae il quadrato [del semidiametro del cerchio minimo] al doppio del quadrato di *ik*, resta il quadrato di *no*. Di conseguenza *no* sarà il semidiametro del cerchio massimo che si vuole trovare[104].

97. In quinto luogo, deduco che, se *no* è il semidiametro, allora, se su *af* si trova un punto *p* tale che *ap* si rapporti ad *af* come la freccia dell'arco *ibk* si rapporta alla freccia del semicerchio DBE, *p* sarà il centro del cerchio e *pb* il suo semidiametro che taglia, sulla corda prolungata da *ik*, *qr*, la quale, raddoppiata, è uguale a *gh*. E se procederai così per tutte e due le corde in proporzione, e troverai il centro facendo il rapporto delle frecce, le parti che si formeranno sulle corde prolungate, prese insieme, saranno sempre uguali a *gh*, anche se non ogni parte di una delle corde è uguale al suo arco, e così sarà per tutte le infinite corde in proporzione ad essa. Con la stessa regola potrai trovare [linee] rette uguali al semicerchio. Se tuttavia *no* è il semidiametro, allora queste parti non concorderanno. E dunque occorrerà modificare [il semidiametro] fino a quando concorderanno. Tuttavia, che la superficie BGCH è uguale alla superficie del cerchio risulta sufficientemente chiaro da quanto detto sopra.

98. In sesto luogo, deduco che le porzioni di cerchio comprese tra corde in proporzione si rapportano al cerchio nello stesso modo in cui l'arco compreso tra tali corde si rapporta alla circonferenza del cerchio. Prendi, per esempio, che la porzione di cerchio compresa tra *lm* e *no* sia un sesto del[la superficie del] cerchio, essendo l'arco *ln* e l'arco *mo* un sesto della circonferenza. Infatti, quanto più la parte compresa tra *ik* e *lm* è minore di un dodicesimo, tanto più la parte tra *ik* e *no* è maggiore di un dodicesimo del cerchio. E da questa considerazione potrai ottenere diverse parti di porzioni di cerchio e rendere uguali triangoli diversi. Quanto detto sia sufficiente.

[104] Hofmann e Hofmann 1980, nota 94, 233 rimanda al secondo capitolo del *De geometricis transmutationibus* dove Cusano enuncia, e tenta di dimostrare, la tesi generale che vale per tutte le sezioni del cerchio comprese tra corde in proporzione al lato *ik* del quadrato.

Spiegazione di come rettificare una curva,
così come è esposta nel primo procedimento del secondo libro de *I complementi matematici*

Versione originale latina a p. 127.

Prima ipotesi

1. La sesta [linea], sommata alla metà della parte[1] della quinta, che cade tra la curva e la quarta, può essere uguale alla curva *be*[2]. Questa ipotesi è esatta, come è dimostrato nello scritto[3](cfr. figura 1).

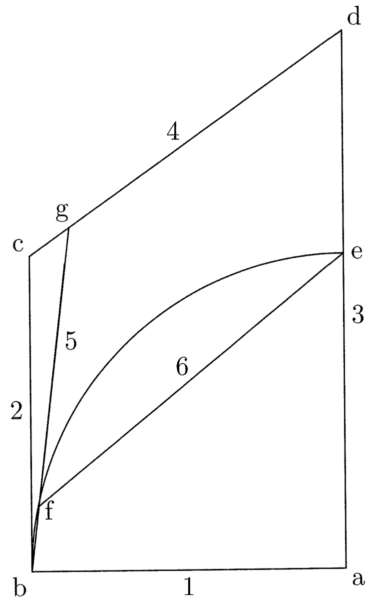


fig. 1

Seconda ipotesi

2. La sesta, sommata alla metà del segmento [della quinta], e la quinta sommata alla metà della differenza tra la corda, che è la sesta, e parte della quinta, che pure è una corda, possono essere uguali al doppio della curva *be*. Questa ipotesi è dimostrata, come quella

[1] Per rendere la lettura più scorrevole, il termine «portio», reso ora con «parte», verrà tradotto con «segmento».

[2] Questo opuscolo è destinato a Peurbach. Essa vuole dare una spiegazione del procedimento di rettificazione della curva presentato ne *I complementi matematici* (Cusanus 2010i, 62–63). Conosciamo il testo da *n* e dalla ristampa in *b*. Non sappiamo nulla del periodo in cui fu composto.

[3] $6^a ef + \frac{fg}{2} =$ arco *be*.

precedente, nel testo[4]. Ci può essere infatti un caso dove questa somma è maggiore del doppio della curva *be*, un caso dove essa è minore, come pure uno dove essa è uguale[5].

3. Dico che questa seconda ipotesi non ha luogo se non laddove la differenza è uguale al segmento [della quinta], e ciò dimostra la prima ipotesi. Infatti, se dicessi che nella seconda ipotesi la differenza è maggiore del segmento [della quinta], allora la quinta sarebbe minore della sesta. La quinta è uguale alla sesta, quando la differenza delle corde è uguale al segmento della quinta, è minore se la differenza è maggiore, ed è maggiore se la differenza è minore, come è evidente da sé[6].

4. Sia dunque aggiunta alla sesta l'intero segmento e alla quinta l'intera differenza. Così [la sesta e la quinta] saranno uguali e ciascuna [sarà] maggiore della curva *be*. Se dunque si sottrae una [lunghezza] uguale cosicché ciascuna sia uguale alla curva *be*, allora è necessario sottrarre dalla somma tra la sesta e il segmento [della quinta] più della metà del segmento, quando si pone il segmento minore della differenza, mentre bisogna sottrarre dalla differenza meno della metà– e tanto meno della sua metà, quanto più della metà del segmento di prima – così che restino contemporaneamente la metà del segmento e la metà della differenza, che, aggiunte alla sesta e alla quinta, risultano il doppio della curva *be*, come è evidente da sé. Dunque la sesta, aggiunta alla metà del segmento [della quinta], sarà maggiore della curva *be*; e non uguale alla curva *be*, poiché la differenza supera la parte[7].

5. Supponi che la quinta *bg* aggiunta alla metà della differenza tra la sesta *fe* e la corda della quinta *bg*, e la sesta *ef* aggiunta alla metà del segmento *fg* siano contemporaneamente

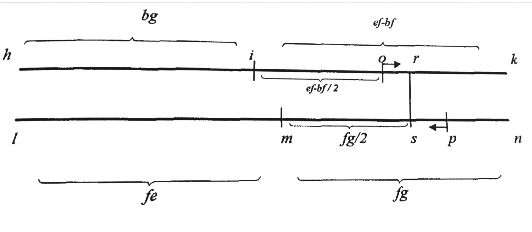
---

[4] $6^a ef + \frac{fg}{2} + [5^a bg + \frac{(ef-bf)}{2}] = 2$arco *be*. Cfr. La figura 27 in Cusanus 2010i, 62–63, che concorda nelle linee essenziali con la figura 1 in esame.

[5] Scegliendo opportunamente il punto *f*, la somma $(ef + \frac{fg}{2}) + [bg + \frac{(\text{corda } ef - \text{corda } bf)}{2}]$ può essere uguale al doppio dell'arco *be*. Se f cade dopo b, allora $6^a ef + \frac{fg}{2} + [5^a bg + \frac{(ef-bf)}{2}] > 2$arco *be*; se f cade al centro dell'arco *be*, allora $6^a ef + \frac{fg}{2} + [5^a bg + \frac{(ef-bf)}{2}] < 2$arco *be*. Dunque, a seconda di dove cade il punto *f*, si ha una diversa uguaglianza. Bisogna trovare una posizione intermedia tale che: $(6^a ef + \frac{fg}{2}) + [5^a bg + \frac{(ef-bf)}{2}] =$ 2arco *be* e per Cusano questo accade quando $5^a = 6^a$ e dunque quando $fg =$ corda $ef-$ corda bf.

[6] Dalle due relazioni: $6^a ef + \frac{fg}{2} =$ arco *be* e $(6^a ef + \frac{fg}{2}) + [5^a bg + \frac{(ef-bf)}{2}] = 2$arco *be* risulta che $6^a ef + \frac{fg}{2} = 5^a bg + \frac{(ef-bf)}{2}$, e, se $\frac{(ef-bf)}{2} > \frac{fg}{2}$, allora $5^a bg < 6^a ef$.

[7] Ora Cusano vuole dimostrare che il segmento $fg =$ corda $ef-$ corda bf e di conseguenza che $6^a = 5^a$. Del segmento in questione egli dà una descrizione solo generale del procedimento da lui intrapreso; nei trattati successivi lo esporrà nei particolari.



Il punto finale è che $(bg \times hi) + (ef - bf) \times ik = (ef \times lm) + (fg \times mn)$. Questa è una identità che si può facilmente dimostrare. Cusano afferma inoltre che la somma dei segmenti è maggiore della curva *be*. Come mostra Hofmann e Hofmann 1980, nota 6, 237, questo non vale in tutti i casi, ma solo per quella posizione di *f*, per la quale l'angolo $cbf = \phi < 21°40'24''$. L'approssimazione affermata da Cusano risulta da quella posizione f_0 di *f*, in cui $fg =$ corda $ef-$ corda bf. Questo vale per $\phi = 9°37'18'' = 0,1679$ e da ciò, in prima approssimazione, si ha che $6^a ef + \frac{fg}{2} = 1,569–2,0205(\phi–\phi_0)$; $5^a bg = 1,1580 + 1,1921(\phi–\phi_0)$; $6^a ef = 1,1580–1,6307(\phi–\phi_0)$; $fg = 0,8235–3,6025(\phi–\phi_0)$. Se consideriamo 1,5697 (invece di 1,5708) un soddisfacente valore approssimativo per $\frac{\pi}{2}$, allora il ragionamento di Cusano (di rinforzare l'esattezza del risultato attraverso il procedimento dimostrativo indiretto mediante il maggiore e il minore), è vero, posto che ci si limiti a un'ampiezza piuttosto ridotta dell'angolo ϕ_0. Tuttavia il testo è espresso in modo difficile e poco chiaro, e soprattutto è inesatta l'osservazione che *rs* cade perfettamente a metà tra *o* e *p*. Cusano confonde «tra» con «a metà di».

uguali al doppio della curva *be*, e che la differenza tra *ef* e *fb* sia maggiore di *fg*. Sia dunque la linea *hi* uguale alla quinta *bg*, a cui si somma la differenza, che sarà uguale a *ik*. Sotto la linea data sia tracciata un'altra linea *lm* uguale alla sesta *fe*, alla quale si aggiunge il segmento *fg*, e sia *mn* uguale a *fg*; la linea *hk* è uguale alla linea *ln*. Si segni la metà della differenza, che è *io*, e la metà del segmento, che è *mp*. Si tracci la perpendicolare tra *p* e *o*, che è *rs*. Dunque, quanto minore è *ms* rispetto alla metà del segmento, che è *mp*, tanto maggiore è *ir* rispetto alla differenza, che è *io*. Perciò *ls* sarà uguale alla curva *be*. E così la sesta *lm* aggiunta alla metà del segmento è maggiore della curva *be*. Quindi laddove la sesta, aggiunta alla metà del segmento deve essere uguale alla curva *be*, la metà della differenza non sarà maggiore della metà del segmento (cfr. figura 2).

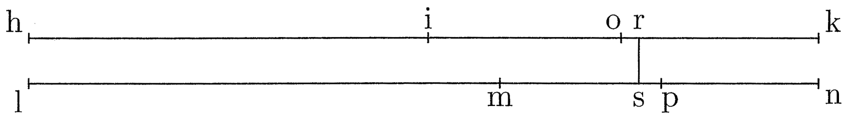


fig. 2

6. Così, se dici che la differenza è minore del segmento, segue che la sesta sommata alla metà del segmento è minore della curva *be*. Dunque, se la sesta sommata alla metà del segmento deve essere uguale alla curva *be*, allora la differenza tra la sesta e la corda della quinta non deve essere né maggiore né minore del segmento. In questo caso, la prima [ipotesi] dimostra la seconda, ossia che la somma della quinta, aggiunta alla metà della differenza, e la sesta, aggiunta alla metà del segmento, è uguale al doppio della curva *be*, quando la differenza è uguale al segmento, e cioè, quando la quinta è uguale alla sesta, e questo è stato spiegato.

7. Ecco un eccellente procedimento dimostrativo, poiché sia che tu dica che la differenza è uguale al segmento nella seconda ipotesi, sia [che tu dica] che non è uguale, segue che la differenza è uguale al segmento nella prima ipotesi[8] e di conseguenza anche nella seconda. E questa è in un certo senso una coincidenza di opposti, poiché, affermando che la differenza non è uguale al segmento, segue che è uguale, e il falso si annulla da sé.

[8] Nel procedimento sopra illustrato l'uguaglianza tra il segmento e la differenza delle corde con riferimento alla prima ipotesi può essere constatata così: «dove la sesta aggiunta alla metà del segmento deve essere uguale alla curva *be*, la metà della differenza non sarà maggiore della metà del segmento» e «se la sesta, aggiunta alla metà del segmento deve essere uguale alla curva *be*, allora la differenza tra la sesta e la corda sulla quinta non deve essere né maggiore né minore del segmento».

La stessa unità di misura di ciò che è rettilineo e ciò che è curvilineo

Versione originale latina a p. 129.

1. Poiché mi sono reso conto che nelle scienze geometriche mancava una regola pratica per commisurare[1] ciò che è curvilineo e ciò che è rettilineo, e, per questo motivo, tali scienze risultano imperfette, e che molte altre cose che sembrano possibili non hanno potuto trovare compimento, allora ho fatto non poca fatica per riuscire a comprendere quest'arte. Se ho raggiunto il mio scopo, lo giudicherai, tu, lettore[2].

2. Dico, inoltre, che ciò che è curvilineo e ciò che è rettilineo hanno la stessa misura se sono misurati con la stessa unità di misura, se, per esempio una linea retta ha tanti piedi dritti quanto un arco [ne ha] curvi.

Prima proposizione

3. Dato un arco, trovare una retta della stessa misura (cfr. figura 1).

Sia *bc* l'arco dato il cui centro è *a*; si tracci la corda *bc* e su di essa si fissi il punto *d*, equidistante da *a* e da *b*: questo è il punto di tale regola. Da questo punto, fai passare attraverso *b* una retta fino ad *e* in modo tale che, se tracci da *a* attraverso *de* una corda *ag* uguale alla metà di *de*, questa corda passa attraverso un punto *f* della linea *de*. Sia ora *df* la quarta parte di *de*. La linea retta *de* ha appunto la stessa misura dell'arco *bc*.

4. Per dimostrare ciò, faccio due ipotesi[3]. In primo luogo che *de* può essere tracciato in modo che tra il punto *f*, attraverso cui passa la corda, com'è stato detto, e l'estremità *e* della linea *de*, il segmento [*fe*] sia uguale a tre quarti della retta commensurabile. E questo è evidente da sé. Infatti è certo che può essere tracciato in modo che *fe* sia maggiore, come nella seconda figura, e in modo che sia minore, come nella terza figura; e ancora, in modo che essa non sia né maggiore né minore[4]. In secondo luogo, suppongo che quanto più *de* è minore [dell'arco], tanto più *fe* è minore in rapporto a *de*, e *df* maggiore, e accade il contrario quando *de* è maggiore [dell'arco]. Anche questo è evidente alla vista nella seconda e terza figura[5].

5. Dico, dunque, che la prima ipotesi è verificata, o quando *de* è la retta cercata, cioè della stessa misura dell'arco, oppure quando essa è minore o maggiore. Se si verifica il primo caso, ottengo ciò che cercavo; dunque *df* sarà necessariamente la quarta parte di

---

[1] La parola «commensurare», come in seguito «commensurabilis» è equivoca: essa significa «avere uguale misura», ma Cusano la utilizza per indicare una uguaglianza sia tra lunghezze sia tra superfici. Qui si tratta di una uguaglianza di misura. Cfr. Nicolle 1998, nota 2, 97.

[2] Il testo è dello stesso periodo de *I complementi matematici*, ma non se ne può dare la data esatta. Tuttavia, poiché si fa riferimento al contenuto de *I complementi matematici* nelle tre tesi, possiamo ipotizzare che esso sia stato composto verosimilmente subito dopo il testo più lungo. Cfr. Hofmann e Hofmann 1980, nota 8, 239.

[3] Hofmann e Hofmann 1980, (nota 2, 237–238) mostra, attraverso precisi calcoli, come l'approssimazione proposta da Cusano nel calcolo del rapporto tra corda e arco, per un angolo minimo, resti meramente teorica, perché, stando alle premesse, risulterebbe un'equazione di 4 °grado (per $\sin\omega$), che può accadere solo in rari casi particolari.

[4] La prima tesi sostiene che esiste un punto *f* su *de* tale che $ef = \frac{3}{4}de$ e quindi $df = \frac{1}{4}de$.

[5] La seconda tesi sostiene che il punto *e* si trova su *de*. Se $de >$ arco *bac*, allora $ef > \frac{3}{4}de$ e $df < \frac{1}{4}de$, ma se $de <$ arco *bac*, allora $ef < \frac{3}{4}de$ e $df > \frac{1}{4}de$.

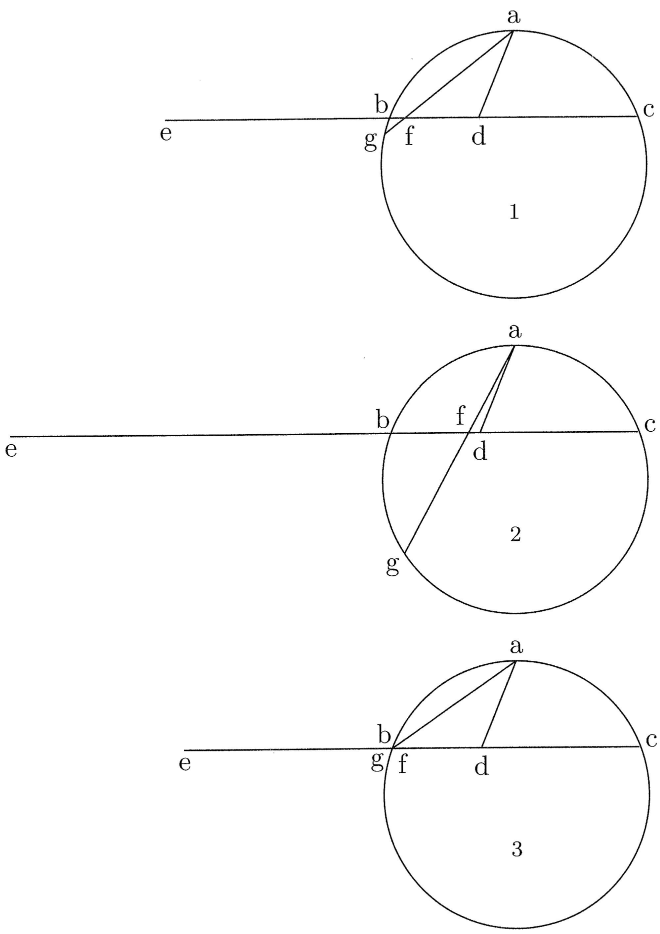


fig. 1

de. Se dici che questo si verifica quando *de* è minore della retta avente la stessa misura [dell'arco], ciò è impossibile. Infatti, poiché dalla seconda ipotesi *fe* è minore in rapporto a *de* e *df* è maggiore di un quarto della retta avente la stessa misura [dell'arco], e secondo te, [*fe*] sarà uguale ai tre quarti della retta commensurabile, *de* non sarà minore della retta avente la stessa misura [dell'arco], bensì maggiore. Analogamente, se dici che si verifica quando *de* è maggiore della retta avente la stessa misura [dell'arco], ciò implica la stessa contraddizione.

Seconda proposizione

6. Dato un cerchio, trovare un arco della stessa misura di una retta data (cfr. figura 2).

Sia data la retta *de*; sia dato un cerchio il cui centro è *t* e il diametro *stv*; e sia *a* il centro di tutti gli archi. Da *a* traccia la corda *ag*, uguale alla metà di *de*, e su *de* segna la sua quarta parte con *df*, e avvicina *de* parallelamente a *tv*, in modo che *f* cada sulla corda *ag* e indica con *b* il punto d'intersezione con la circonferenza del cerchio. Allora, se *d* è equidistante da *b* e da *a*, *ba* sarà la metà dell'arco cercato. Prolunga quindi *bd* fino a toccare la circonferenza in *c* e otterrai l'arco *bc* della stessa misura della retta *de*. Il tutto è evidente da quanto detto sopra.

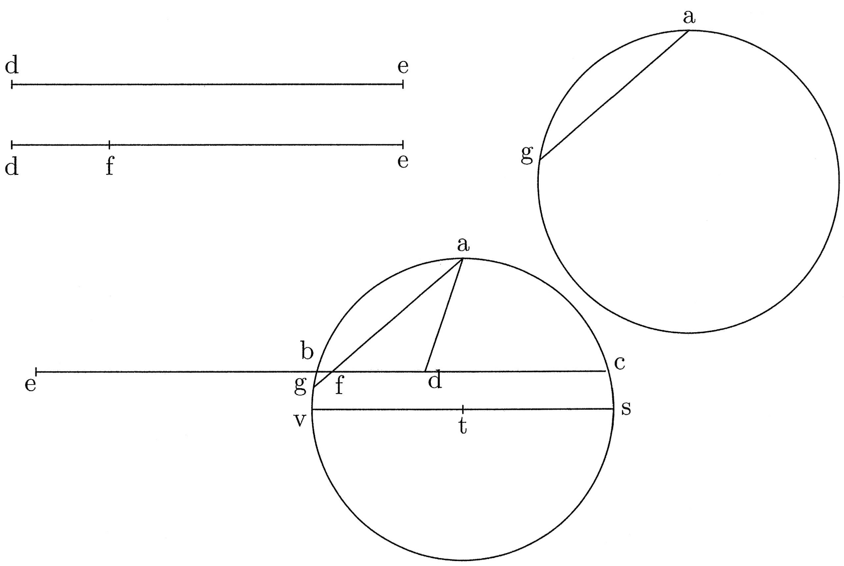


fig. 2

7. Per vedere che *d* è il punto di questa regola, il quale, se la corda *ag* ha la stessa misura dell'arco *ba*, dista la metà di *ag* dal punto di intersezione *f*, dove *ag* interseca *bcd*[6], considera che quanto maggiore è la corda *bc*, tanto più [il punto] *d* si allontana da *b* e da *a* e si avvicina al centro del cerchio; quanto minore [è la corda *bc*], avviene il contrario, e ciò è evidente (cfr. figura 3).

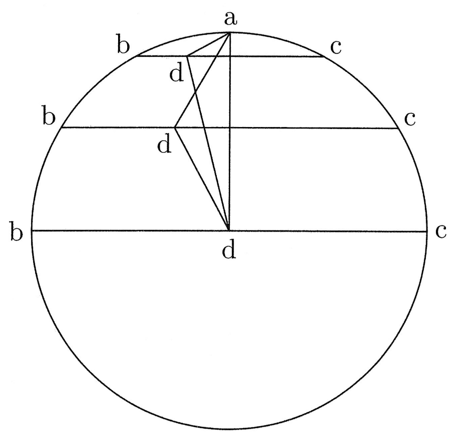


fig. 3

Dunque, sulla massima corda, *d* si allontana minimamente dal centro del cerchio e massimamente da *b* e da *a*. Sulla corda minima, *d* si allontana massimamente dal centro e minimamente da *b* e da *a*. Perciò, *d* si trova, sulla corda massima, al centro del cerchio e, su quella minima, sulla sua circonferenza[7]. Ma è certo che, sia sulla massima corda sia

[6] de = arco bc; arco ba = arco$\frac{bc}{2}$; $ag = \frac{de}{2}$; quindi ag = arco ba.

[7] Cusano non identifica la curva tracciata per tutte le posizioni di *de*.

su quella minima, *d* è equidistante da *b* e da *a* e lo stesso è su tutte le corde intermedie. Da ciò, si deduce che se *bc* è la corda dell'arco pari alla terza parte della circonferenza del cerchio, allora il punto *d* sarà equidistante dal centro e da *b* ed *a*.

8. Inoltre, si può tracciare da *a* attraverso *bc* la corda *ah* che taglia [*bc*] nel punto *i* (cfr. figura 4). Dico che *aih* può essere tracciata così che *ai* sarà la distanza del punto *d* da *a* su questa corda *ah*. Questo è certo. Così sarà anche quando *ah* è uguale a *bc* e il punto di intersezione *i* sarà equidistante da *b* e da *a*, come *d* lo sarà da entrambe. E se *ah* è minore, questo non è possibile, perché allora *ai* sarebbe maggiore di prima, quando essa era uguale. E se *ah* è maggiore, è altrettanto impossibile, perché *ai* sarebbe minore di prima, quando essa era uguale.

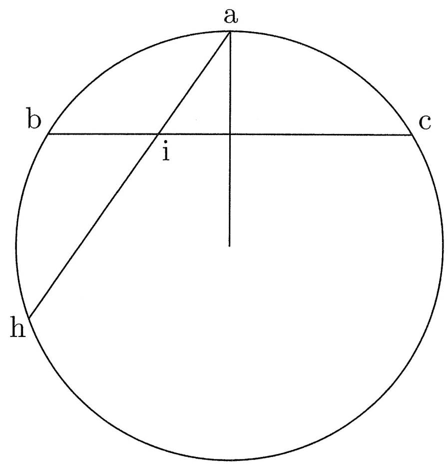


fig. 4

Terza proposizione

9. Determinare una retta avente la stessa misura dell'arco di una semicirconferenza e una figura rettilinea avente la stessa misura[8] della superficie curva corrispondente.

Sia dato un cerchio e sia *bc* l'arco della semicirconferenza, con centro *a*, e *d* il punto della regola equidistante da *a* e *b*, che in questo caso si trova al centro del cerchio (cfr. figura 5). Traccia la linea *ad*, prolunga, quindi, *db* fino a *de* in modo che, se ottieni come metà di *de* la corda *ag*, tracciata da *a* attraverso *de*, essa passa su *de* per il punto *f* che dista da *d* la quarta parte di *de*, come sopradetto. Poi chiudi il triangolo rettangolo per mezzo del lato *ae*. Dico che l'area del triangolo rettangolo ADE ha la stessa misura dell'area del semicerchio e che *de* ha la stessa misura dell'arco *bc*. Il secondo punto è evidente da quanto sopradetto. Il primo punto è evidente allo stesso modo, come prima, attraverso due ipotesi[9], di cui la prima è: si può determinare *de* e chiudere il triangolo rettangolo attraverso *ea* in modo che se si traccia la corda *afg* che è la metà di *de* da *a* per *de*, l'area [del triangolo] AFE sarà uguale a tre quarti dell'area del semicerchio. È evidente, poiché si ottiene là dove

[8] In questo caso il termine «commensurabilis» sta a significare una equivalenza, ossia un'uguaglianza tra aree.

[9] Il secondo punto concerne il rapporto di una retta a una curva ed è dimostrata nella tesi precedente. Il primo punto concerne il rapporto di una superficie rettilinea ad una superficie curva ed è l'oggetto di questa terza proposizione.

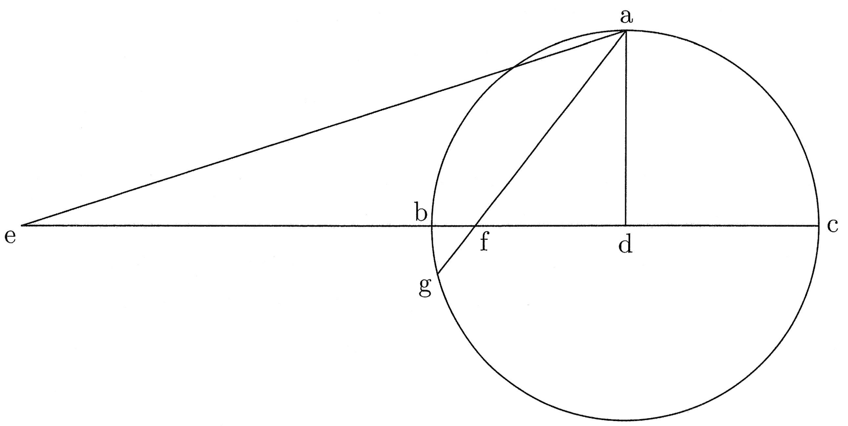


fig. 5

essa è maggiore e là dove è minore, e quindi anche dove non è né maggiore né minore. In secondo luogo, suppongo che quanto minore sarà *de*, tanto minore sarà quest'area AFE in rapporto all'area intera del triangolo rettangolo ADE, e quanto maggiore esso sarà, tanto maggiore sarà l'area. La prima ipotesi è quindi verificata quando l'area del triangolo rettangolo ADE ha la stessa misura dell'area del semicerchio, e si ottiene ciò che si cercava; invece, se essa è minore o maggiore, entrambi i casi implicano contraddizione esattamente come detto sopra.

10. È pertanto chiaro che, se il triangolo rettangolo, di cui un lato è il semidiametro e l'altro è perpendicolare a questo, ha la stessa misura dell'intera circonferenza del cerchio, l'area di quel triangolo rettangolo ha la stessa misura dell'area del cerchio. E, poiché qualsiasi poligono può essere trasformato in un altro, potrai assegnare all'area del cerchio l'area di ugual misura di un triangolo, di un quadrato, di un pentagono, di qualsiasi altro poligono e di qualsiasi parte di cerchio anche se non ha la stessa misura del cerchio. Potrai anche stabilire angoli in rapporto a rette date e a tutte le figure in modo che abbiamo la stessa misura l'una nell'altra. Dico che si possono realizzare notevoli trasformazioni, conservando la superficie di ciascuna figura e la sua natura propria e invariabile, e, attraverso quest'arte, scoprirai altre cose nascoste che difficilmente si possono spiegare, anche nelle sezioni e nelle curve che mutano uniformemente[10]. Potrai anche disporre di angoli e strumenti con i quali molto facilmente e velocemente potrai fare le costruzioni suddette, che lasciamo alla tua operosità[11].

11. L'area AGBF ha la stessa misura della metà del[l'area del] cerchio e l'area ABE ha la stessa misura dell'area del cerchio; il medio proporzionale tra il semidiametro *ad* e la retta *ed* avente la stessa misura della metà della circonferenza del cerchio, come insegna Euclide, VI, 9[12], è il lato del quadrato la cui area ha la stessa misura di quella del cerchio (cfr. figura 6). La retta *df* misura un ottavo della circonferenza del cerchio, e così l'area

[10] È qui il presupposto sbagliato di Cusano: egli pensa che, grazie a rapporti proporzionali, si possano stabilire variazioni uniformi e che le variazioni si possano rappresentare sempre attraverso linee rette. Cusano tocca qui tutti i punti espressi ne *I complementi matematici*, in particolare le costruzioni mediante angoli fissi, la trattazione delle sezioni coniche e delle curvature (cfr. Cusanus 2010i, 55, 70). Facendo seguito alla dottrina di Oresme 1968 sulle *latitudines formarum*, con «curvitas uniformiter difformis» bisogna intendere una curva avente una variazione di curvatura costante. Sul tema, cfr. Hofmann e Hofmann 1980, nota 6, 234.

[11] Cfr. Cusanus 2010b, 32, 33 e 39.

[12] Cfr. Da Novara 2005, VI, 13.

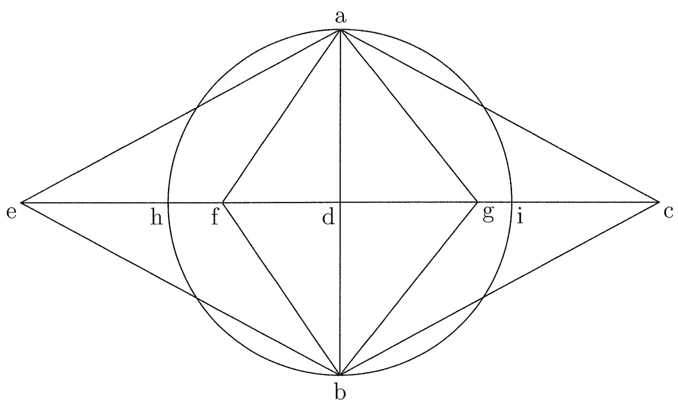


fig. 6

del triangolo rettangolo ADF misura un ottavo dell'area del cerchio[13]. Dunque, quando hai una retta della stessa misura di un arco, hai anche l'area di una figura rettilinea della stessa misura dell'area di una porzione di cerchio.

Fine.

[13] Se $df = \frac{de}{4}$; de = arco bc = semicirconferenza del cerchio; allora $df = \frac{1}{8}$ della circonferenza.

Dialogo sulla quadratura del cerchio. Dialogo tra il cardinale di San Pietro, vescovo di Bressanone, e Paolo, fisico fiorentino, sulla quadratura del cerchio

Versione originale latina a p. 135.

1. PAOLO: Sommo Padre, tu sai che, fin dalla mia infanzia, ho cercato la verità che sembra risplendere in maniera più chiara nelle matematiche[1] e sai anche quanto io desideri trovare la quadratura del cerchio, che non è stata ancora trovata. Perciò ti prego, fammi sapere se, dopo avermi inviato i libri – per me alquanto oscuri e discutibili – sui *Complementi matematici*, ti è venuto in mente un altro procedimento più attendibile[2].

IL CARDINALE NICOLA: Certo, [penso di averne uno] facile e, come credo, indiscutibile.

PAOLO: Dimmi, ti prego.

2. NICOLA: So che è ti è ben noto tutto ciò che riguarda la questione, eccetto soltanto quest'unica cosa, ossia come, dato il cerchio di una circonferenza, tu possa determinare una linea retta della stessa lunghezza.

PAOLO: Sì, è così; infatti, so da Archimede che se moltiplico il semidiametro di un cerchio per una linea uguale alla sua semicirconferenza si ottiene un rettangolo[3] uguale[4] al cerchio.

3. NICOLA: Per darti quindi un'idea di ciò che resta, considera questa proposizione: se si aggiunge la corda del quadrante di un cerchio dato al suo semidiametro, si ottiene il diametro del cerchio circoscritto al triangolo isoperimetrico alla circonferenza del cerchio dato.

Sia, per esempio, BCDE il cerchio dato, descritto intorno ad *a*, e sia *bc* il quadrante (cfr. figura 1); si traccino la corda *bc* e le linee *ab* e *ac*[5] e si descriva un altro cerchio intorno allo stesso centro *a* il cui diametro *fg* sia uguale alla somma di *ab* e *bc*, e precisamente *gh* sia uguale a *ba* e *hf* uguale a *bc*. Sia inscritto il triangolo IKL. Dico che [il perimetro di] questo triangolo rettilineo[6] è uguale alla circonferenza BCDE[7].

PAOLO: Questo procedimento è facile e assai prezioso, se dimostrerai che è vero.

---

[1] Cfr. Cusanus 1972a, I, 2, 31ss. Cusanus 1988b, 31, 52, 3–10.

[2] Questo testo non sembra trattarsi di una finzione narrativa, ma piuttosto del resoconto di una discussione reale avvenuta tra Cusano e Toscanelli, che potremmo datare nella prima metà del 1457, e collocare prima del *De caesaera circuli quadratura* del 6.8.1457, in cui è presentata un'idea nuova per attuare la quadratura del cerchio. Da quanto si afferma in questo passo si può dedurre che Toscanelli aveva contestato anche la versione ampliata de *i Complementi matematici* in cui Cusano ammette i difetti di quel procedimento, tanto più che spera di dare da quel momento in poi una nuova e migliore approssimazione.

[3] Come negli altri scritti matematici, anche in questo testo Cusano utilizza il termine «quadrangulus» per indicare il rettangolo. Cfr. Archimedes 1910b, prop. 1: «Ogni cerchio è equivalente a un triangolo rettangolo nel quale uno dei lati perpendicolari è uguale al raggio del cerchio e la base (cioè, l'altro lato perpendicolare) è uguale alla circonferenza del cerchio».

[4] Qui l'uguaglianza sta a indicare l'equivalenza.

[5] Si tratta, come si nota dal disegno, dei raggi del cerchio BCE.

[6] Il termine «rectilineus» sta per «delimitato da lati dritti».

[7] Cusano approssima il diametro $2r_3$ del cerchio circoscritto al cerchio avente la stessa circonferenza del triangolo equilatero mediante: $2r_3 = r(\sqrt{2}+1)$. Dunque il cerchio isoperimetrico sarebbe uguale a $6r_3(\frac{\sqrt{3}}{2}) = [\frac{(3\sqrt{3})}{2}](1+\sqrt{2})r$ e così $\frac{\text{circonferenza}}{\text{diametro}} = 3,135$ anziché $3,142$. L'approssimazione è quindi insufficiente.

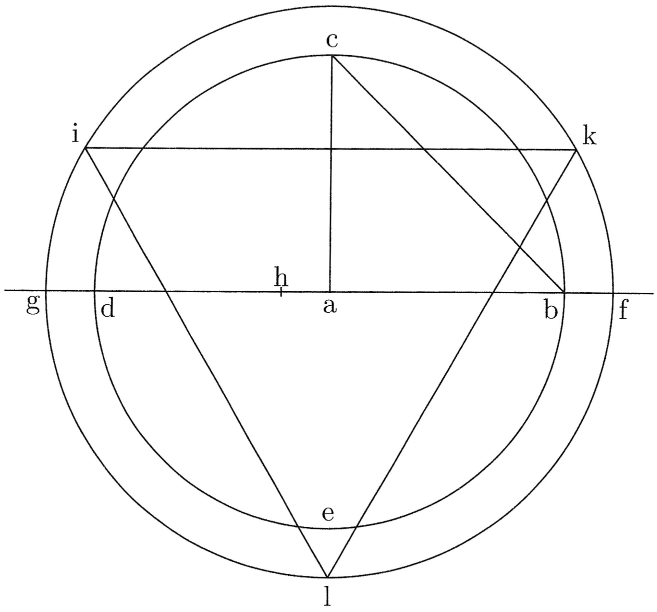


fig. 1

4. NICOLA: Ci proverò. Riprendendo la figura sopra descritta del cerchio dato, prolungherò la linea *ac* all'infinito, e sia essa *ma*; dico, senza dubbio, che è possibile tracciare una qualsiasi linea da *b* ad *am* tale che, se a questa si aggiunge un'altra che sta ad essa come il lato del quadrato alla diagonale[8], si ottiene una linea uguale al diametro del cerchio circoscritto al triangolo isoperimetrico al cerchio dato (cfr. figura 2).

PAOLO: Lo ammetto. Infatti, è possibile tracciare una linea da *b* ad *am* in modo tale che, se a questa si aggiunge un'altra che sta ad essa come il lato [del quadrato] alla diagonale, risulti una linea minore del diametro del cerchio circoscritto al triangolo isoperimetrico al cerchio dato. È quel che accade nel caso in cui si traccia [la linea] verso un punto *n*, vicino ad *a*; allo stesso modo è possibile tracciare un'altra linea verso un punto *o*, vicino al punto *m*, che, aggiunta al lato [del quadrato], sia maggiore [del diametro]. Quindi, tra *n* e *o* ci sarà un punto tale che la linea tracciata da *b* a questo punto, aggiunta al lato [del quadrato], sarà uguale, cioè, né maggiore né minore, al diametro del cerchio circoscritto al triangolo isoperimetrico al cerchio dato[9].

5. NICOLA: Dico pertanto a ragione che se prendi *bn* e [aggiungi a questa] tutti i lati[10] che vuoi, la linea che ne deriva sarà minore del semidiametro[11] del cerchio circoscritto al triangolo e [precisamente sarà minore] di tanto quanto sono i lati che avrai aggiunto, tranne uno. E se prendi *bo* e [aggiungi a questa] tutti i lati che vuoi, la linea che ne deriva sarà maggiore del semidiametro del cerchio circoscritto al triangolo e di tanto quanto sono i lati che avrai aggiunto, tranne uno. Così, ci sarà un punto tra *n* e *o*, tale che la linea condotta da *b* a questo punto sarà uguale al semidiametro del cerchio circoscritto al triangolo e di tanto quanto sono i lati che avrai aggiunto, tranne uno. Questo non può che trovarsi nel punto *c*

[8] Come negli altri scritti matematici, Cusano utilizza il termine «diameter» per indicare la diagonale. Cfr. Cusanus 2010i, 9, 3 e Cusanus 2010d, 26.

[9] Si ha, dunque, un segmento $x > r$, cosicché $x + \frac{x}{\sqrt{2}} = 2r_3$.

[10] Bisogna intendere «cum» nel significato di «più», ossia nel senso di un'addizione.

[11] Come nota Nicolle 1998, nota 5, 103, si tratta di semidiametro e non di diametro.

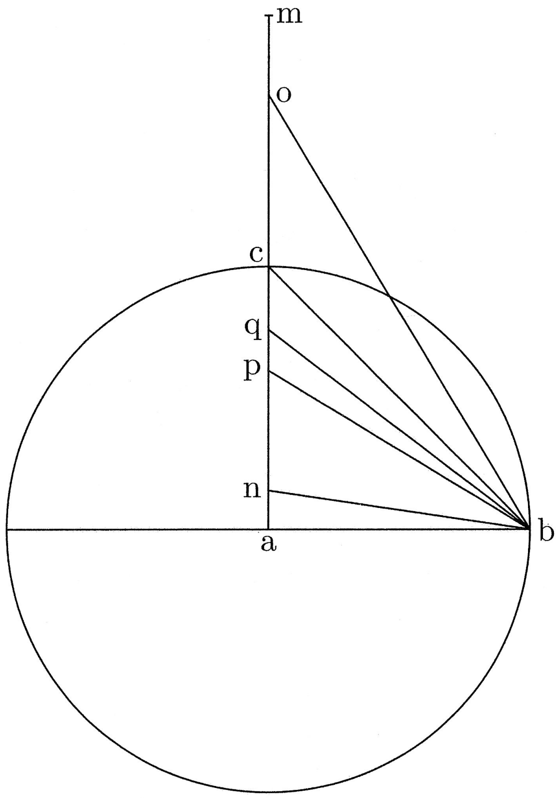


fig. 2

in cui il lato è uguale al semidiametro del cerchio dato, cioè, uguale a *ba*; altrimenti, se il lato fosse maggiore o minore di *ba*, questo non sarebbe possibile[12].

6. PAOLO: Concordo con te sul primo punto, cioè che *bn*, aggiunto a tutti i lati che vuoi, resta minore del diametro del cerchio circoscritto al triangolo isoperimetrico di tanto quanto sono i lati, tranne uno. Intendo “tranne uno” perché aggiungi un solo lato alla linea *bn* per ottenere il diametro del cerchio circoscritto; infatti, poiché *bn* più il lato è minore di questo diametro e il lato è minore di *ab*, tutto questo è evidente[13]. In modo contrario si comporta la linea *bo* e anche questo è evidente. Quindi, è certo che, se si deve giungere all’uguaglianza in qualche punto intermedio, questo punto è *c*, per la ragione che ho detto. Se infatti il lato fosse minore o maggiore della linea *ab*, ciò non seguirebbe in alcun modo. Ma cosa accadrebbe se qualcuno negasse che si dà tale punto tra *n* e *o*[14]?

NICOLA: Chi nega che tra il minore e il maggiore cada nel mezzo l’uguale, nega che si possa dare un triangolo isoperimetrico al cerchio. Io, tuttavia, presuppongo la quadratura

---

[12] Ora si afferma che $\frac{r}{\sqrt{2}} + kr = 2r_3 + (k-1)r$. ($k \geq 2$).

[13] Il punto di partenza è la diseguaglianza $bn + \frac{bn}{\sqrt{2}} < 2r_3$, nel caso che $\frac{bn}{\sqrt{2}} < ab$. Da ciò si conclude che $bn + k\frac{bn}{\sqrt{2}} < 2r_3 + (k-1)r$.

[14] Se all’inizio aveva accettato l’ipotesi di Cusano, ora Toscanelli incalza Cusano insistendo sul problema dell’esistenza di un punto esatto che permetta di realizzare la quadratura del cerchio. La sua obiezione costituisce il nocciolo della questione: se deve essere $x(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) = 2r_3$, allora $x \neq r\sqrt{2}$, ma $x = 1,417$, non $< r\sqrt{2}$, come Toscanelli pensava, presupponendo *p* tra *n* e *c*, bensì più grande. Questo era accessibile anche ai matematici del tempo con l’utilizzo dei limiti di Archimede per π.

del cerchio come possibile e di conseguenza tutto ciò senza cui essa non è possibile[15].

7. PAOLO: Potrei dire che ciò nonostante è possibile, ma che non lo è per tutti i lati aggiunti alla linea così che risulti quel diametro del cerchio circoscritto al triangolo e di tanto quanto sono i lati, tranne uno, poiché potrei dire che tra *n* e *c* cade un punto *p*, e che la linea *bp* più il suo lato è uguale al diametro del suddetto cerchio circoscritto.

8. NICOLA: Allora non neghi che se si sommasse *bp* a due lati, questa somma sarebbe uguale al diametro in questione, ma a quello che è minore del semidiametro del cerchio dato, poiché il lato è minore di *ab*[16].

PAOLO: Come potrei negarlo?

NICOLA: Prendi un punto sopra *p* e sia questo *q*; dove *bq* più il lato è tanto maggiore del diametro in questione quanto il lato è minore della linea *ab*, allora ciò è possibile. Non è forse vero che questo *bq* sommato ai due lati fa il diametro e, con esso, il semidiametro del cerchio dato?

PAOLO: Chi potrebbe dubitarne?

NICOLA: E che avverrebbe se cercassi una linea, che, sommata al lato, superi il detto diametro, di tanto quanto i due lati sono minori dei due semidiametri del cerchio dato?

PAOLO: Occorre che il punto si trovi ancora più vicino al punto *c*.

NICOLA: E che accadrebbe se volessi che la linea, oltre ai diversi lati aggiunti, fosse uguale a più semidiametri?

PAOLO: Sarebbe necessario prolungare il punto fino a raggiungere *c*.

NICOLA: Giusto! Se dunque procedessi così all'infinito, alla fine arriveresti necessariamente[17] al punto *c*, mentre al di qua del punto *c* il lato sarebbe sempre minore di *ab*.

PAOLO: Hai perfettamente ragione.

9. NICOLA: E' evidente che ciò non è possibile, ossia che tra *n* e *o* cada un punto tale che la linea ad esso condotta si rapporta così che, se a questa si aggiunge un numero qualsiasi di lati, essa sarà uguale al diametro del cerchio circoscritto al triangolo isoperimetrico e di tanti quanti sono i lati aggiunti, tranne uno; ma questo sarà il punto *c*. E se dicessi che il punto si trova oltre *c* dal lato di *o*, seguirebbe la stessa contraddizione mediante la dimostrazione inversa, poiché si tornerebbe necessariamente al punto *c*.

10. PAOLO: Non posso negare che sia come hai chiaramente dimostrato; sembra evidente che chi afferma che il punto si trovi al di qua o al di là di *c*, sarebbe in errore e l'errore proviene da quella stessa posizione, poiché ogni linea maggiore di *bc*, sommata al suo lato, è maggiore del diametro del cerchio circoscritto al triangolo isoperimetrico e ogni linea minore, sommata al suo lato, è minore del diametro[18].

---

[15] Cfr. Cusanus 2010c, 3–11.

[16] Ora ha inizio la parte più interessante del dialogo. Cusano vuole mostrare che l'uguaglianza $x + \frac{x}{\sqrt{2}} = 2r_3 [= 2,418r]$ non può avere altra soluzione che $x = r\sqrt{2}$, e a questo fine si serve di una dimostrazione indiretta: se fosse $x_0 + \frac{x_0}{\sqrt{2}} = 2r_3$ e $x_0 \neq r\sqrt{2}$, allora si potrebbe appurare che le soluzioni $x_1, x_2, \ldots.\ x_k \ldots.$ dell'equazioni $x_1 + \frac{2x_1}{\sqrt{2}} = 2r_3 + r$; $x_2 + \frac{3x^2}{\sqrt{2}} = 2r_3 + 2r$, …. $x_k + \frac{(k+1)}{\sqrt{2}} = 2r_3 + kr$,…. andrebbero in modo monotono da x_0 verso $r\sqrt{2}$, e che $\lim x_k = r\sqrt{2}$ (con $k \to \infty$). Poiché Cusano vuole che tutti le x_k siano uguali, egli deve rendere ognuno di loro uguale a $r\sqrt{2}$. In realtà $x_0 > r\sqrt{2}$, per cui il tutto non è che un tentativo ingegnoso, ma privo di significato nel caso in questione.

[17] Nel termine «necessario» è racchiusa tutta la questione. Come è possibile che una procedura portata all'infinito possa condurre alla fine a un punto?

[18] Come scrive Hofmann e Hofmann (1980, nota 12, 241–242), in *Bb* si dà un lunga spiegazione di questo passo il cui contenuto è: se si accetta il *processus in infinitum*, allora il discorso fila. Se invece lo si ritiene inammissibile, allora ci si avvicina sì al punto *c* attraverso un aumento costantemente del valore *k* del raggio

NICOLA: Questo potrebbe essere dimostrato anche con un altro procedimento, e ci sono vari modi per trovare facilmente dal sapere scientifico i diametri dei cerchi inscritti e circoscritti ai poligoni isoperimetrici ai cerchi dati, poiché il poligono più esteso avente infiniti lati coincide con il cerchio; ma questo procedimento è sufficiente, il resto lo lascio a te.

11. PAOLO: E' sufficiente conoscere il modo di trasformare una circonferenza in una retta e viceversa una retta in una curva; a partire da ciò, tutto quello che finora era sconosciuto nelle matematiche può essere scoperto, come tu hai tentato nei tuoi *Complementi matematici*[19]. Pertanto, se qualcuno vorrà ridurre la curva in retta, moltiplicherà il semidiametro del cerchio dato per la semiretta uguale alla circonferenza. Sia, per esempio, *rs* uguale ad *ab* e *st* uguale della somma dei tre lati *ikl*; se si chiude il rettangolo RSTV uguale alla superficie del cerchio BCDE, si trova il medio proporzionale tra *rs* e *st* secondo Euclide VI, 9; sia *xy* il medio proporzionale, cioè il lato del quadrato; il quadrato XYZ& sarà uguale al cerchio (cfr. figura 3). Queste cose si sanno e per questo ti ringrazio, Nicola, sommo padre, perché, nonostante tutti i tuoi impegni, hai ritenuto degno applicare il tuo acume a tale questione a cui tutti gli studiosi di matematica vorrebbero venire a capo, ma non vi riescono, e rendere nota, dopo tanto lavoro e diversi procedimenti, la tua scoperta così semplice e chiara, dispensando gli studiosi di una così grande fatica.

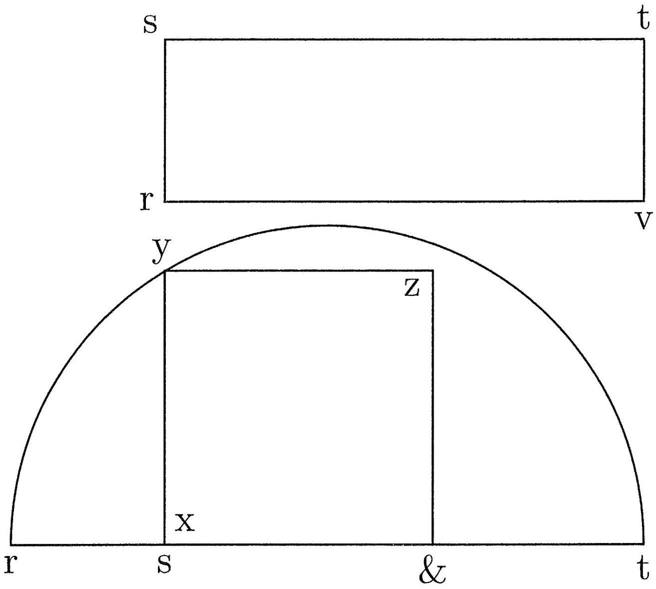


fig. 3

Fine. Bressanone. 1457

da aggiungere all'infinito, senza tuttavia mai raggiungerlo. Del resto $r\sqrt{2} + r$ è maggiore del raggio del cerchio circoscritto $2r$, quello avente la massima superficie tra i poligoni regolari isoperimetrici e maggiore del raggio del cerchio circoscritto $2r_n$, di uno degli altri poligoni isoperimetrici ($n > 3$). La differenza tra le due espressioni diminuisce col diminuire di n e raggiunge il suo minimo 0 quando il poligono contiene la più piccola superficie possibile ($n = 3$). Ora si determini x_n da $x_n + \frac{x_n}{\sqrt{2}} = 2r_n$. Così $(\frac{x_n}{\sqrt{2}} - r) - (2r_n - 2r) = r - x_n$ ha il suo massimo valore per $n = \infty$, ossia il poligono isoperimetro avente la massima superficie; diminuendo n diminuisce continuamente la differenza e raggiunge il suo minimo (0) per $n = 3$, ossia il poligono isoperimetrico avente la superficie minima. Dunque $x_3 = r\sqrt{2}$.

[19] Cfr. Cusanus 2010i, 31–35.

‹Appendice›

12. Il punto è questo: il processo all'infinito[20]. Infatti, se esiste quel punto, la somma della linea tracciata da *b* ad esso e il lato è tale che, se aggiungessi lati all'infinito, non faresti altro che aggiungere infiniti *ba* al diametro del cerchio circoscritto al triangolo isoperimetrico. È chiaro allora che la somma della linea e il lato è uguale al diametro del cerchio circoscritto e che il lato è uguale a *ba*, e il punto sarà *c*.

13. Se davvero si nega il processo [all'infinito] allora è chiaro che qualsiasi punto si segni al di qua di *c*, anche se si pone che la somma di *ba* e il lato supera il diametro del cerchio circoscritto, allora un certo numero di lati più la somma della linea e il lato farà sempre il diametro del cerchio circoscritto e tutte le linee *ba*, e puoi sempre aumentare quel numero, se il punto supera di molto *c*, e mai cessa quest'accrescimento, perché non c'è un punto al di qua di *c*, dove la somma della linea con il lato supera numericamente il diametro del cerchio circoscritto, per quanto infiniti siano i lati superati dalle linee infinite, essendo qualsiasi lato di una qualche lunghezza minore della linea *ba*. Quella lunghezza moltiplicata all'infinito sarà sempre maggiore della lunghezza di cui la somma della linea con il lato eccede il diametro del cerchio circoscritto eccedente.

14. Dico inoltre: non c'è dubbio che la somma di *ba* e il lato superi il diametro del cerchio circoscritto al poligono della massima estensione, avente cioè infiniti angoli, che si trasforma nel diametro del cerchio isoperimetrico. Così, se aggiungi tutti i lati che vuoi, essi superano sempre tutte linee *ba* e precisamente della lunghezza con la quale *bc* supera *ba*, come si sa. Poiché, se prendi un altro poligono al di qua di quello più esteso, allora quell'eccesso è minore, e così all'infinito e, poiché tra il più esteso e il meno esteso cadono infiniti poligoni, nel triangolo quell'eccesso sarà minore, se sarà così piccolo che non possa essercene uno minore. Se infatti potesse esserci uno minore, non sarebbe il poligono più piccolo. Invece la lunghezza, di cui non si può dare una minore, non è una lunghezza, ma un punto[21]. Così la linea *bc* non è maggiore in lunghezza di quella che si cerca.

15. Al contrario: sia *bn* la linea, che, sommata al suo lato, sia uguale al diametro del circoscritto al poligono più esteso. È evidente che *bn* supera *ba*, il semidiametro del cerchio isoperimetrico, più di quanto il diametro del circoscritto superi il diametro del cerchio, ossia di tanto quanto *bn* supera *ba*, come si sa; e meno negli altri poligoni man mano che l'estensione diminuisce. Dunque nel poligono con la minima estensione questa linea non deve superare il suo lato *ba* più dell'eccesso di quanto il diametro del circoscritto supera il diametro del cerchio isoperimetrico. Se dunque nel poligono più esteso quest'eccesso è massimo, cioè non c'è uno maggiore, e in quelli meno estesi esso diminuisce progressivamente, nel poligono meno esteso esso sarà il minimo, di cui non c'è uno minore. Di conseguenza il suo lato sarà uguale a *ba*. Se infatti fosse minore di *ba*, è chiaro che supererebbe *ba* più di quanto deve eccedere nel poligono meno esteso; se fosse maggiore di *ba*, allora eccederebbe di meno; sarà dunque *bc*, il cui lato è *ba*.

---

[20] [Il contenuto dell'appendice è scritto a margine in *Ob*, mentre si trova all'interno del testo in *To* ed è assente in *n* e *b*].

[21] Cusano si rifà qui alla definizione euclidea del punto «Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν» (Euclide 2007, I, 1), ripresa da Da Novara 2005 («punctus est, cuius pars non est»).

La quadratura del cerchio cesariano. Al mio benevolissimo sovrano Federico, Cesare Imperatore, Niccolò, cardinale di San Pietro, vescovo di Bressanone

Versione originale latina a p. 141.

2. Un'inattesa persecuzione mi ha recentemente trattenuto nella fortezza di Andratz che in tedesco prende il nome di Buchenstein[1]. Lassù, in mezzo alle Alpi, privato dei miei libri e approfittando di questo ristoro, ho iniziato a indagare se fosse possibile ottenere, in modo chiaro e facile, la sempre cercata, e, come si dice, non ancora trovata, quadratura del cerchio[2]. Dopo i tanti e vari procedimenti, che ho riportato nei miei libri scritti su questo argomento, me ne è venuto in mente uno più chiaro e a me più caro, che offro qui di seguito alla Tua maestà come degno regalo per la Tua Altezza. Infatti, per il fatto che si sa che ciò che finora si è cercato come qualcosa di estremamente singolare può essere trovato solo con profondissimo acume e una passione fortissima, chi sarebbe più degno di riceverlo se non il sommo imperatore che si diletta come il più nobile dei principi anche in questi segreti ragionamenti?

3. Benché questo piccolo regalo sia minuscolo di fronte alla tua innata clemenza, so che lo apprezzerai molto e verso di me, tuo umile servitore, sarai senz'altro più benevolo. Prendendo esempio dalla riduzione delle figure l'una nell'altra, capirai come all'imperatore spetti il potere di trasformare ciò che è rotondo in ciò che è poligonale e viceversa, e di tradurre talvolta la severità della legge in clemenza e talvolta la clemenza in rigore. Questo spetta solo a Te, che sei indipendente dalle leggi, essendo tu la fonte unica delle leggi civili alle quali tutti gli altri devono sottomettersi per legge[3].

Proposizione

4. Se dal centro *a* di un cerchio dato tracci [due] linee verso due punti della circonferenza, *g* e *f*, distanti l'una dall'altra un dodicesimo della circonferenza e se da un punto *d* della linea *ag* conduci all'infinito la perpendicolare che taglia *af* in modo che la linea compresa tra il punto d'intersezione *c* e la circonferenza sia la metà di *ad* e se indichi con *x* il punto sulla perpendicolare tale che la linea tracciata dal centro *a* verso questo stesso punto sia il doppio della linea *ad*, allora *dx* sarà un sesto della circonferenza del cerchio dato (cfr. figura 1).

Questo perchè *ad* sarà il semidiametro del cerchio inscritto nel triangolo isoperimetrico al cerchio dato, *ax* il semidiametro del cerchio circoscritto al triangolo in questione e *dx* la metà del lato del suddetto triangolo[4].

[1] Questo opuscolo, indirizzato all'imperatore Federico IV, è stato completato il 6 Agosto 1457 quando Cusano era trattenuto dal 10 Luglio nella fortezza di Andratz, isolato e privato dei suoi libri. Alla fine del testo (§18) il cardinale manifesta una velata avversione verso i suoi oppositori sulla questione della quadratura del cerchio.

[2] Cfr. Cusanus 1982, 12, 31, 13–15.

[3] Cfr. Cusanus 1963, III, 11–12; 375, 8; 376, 10–16.

[4] Se indichiamo con n il numero di lati del poligono, ρ_n il diametro del suo cerchio inscritto (la "prima"), n il semidiametro del suo cerchio circoscritto (la "seconda"), s_n il suo lato, allora si può riassumere la proposizione in questo modo: se l'arco $gf = \frac{1}{12}$ della circonferenza $= \frac{2\pi r}{12}$, se $cf = \frac{ad}{2}$

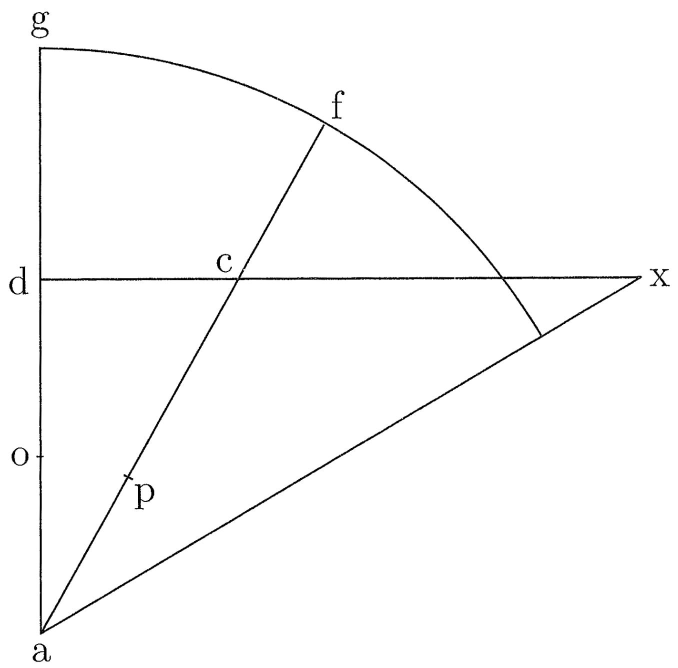


fig. 1

Dimostrazione

5. Si dimostra così: poiché è certo che *ga* è maggiore dei $\frac{2}{3}$ del semilato del triangolo e minore del semilato[5], mantenendo la stessa figura, si segnino, usando l'immaginazione, su *ga* e su *fa* rispettivamente le linee *go* e *fp* uguali ai $\frac{2}{3}$ [del semilato]. Si tracci, quindi, da un punto di *ag* fino a toccare *af* la perpendicolare, la quale si rapporta alle due linee che stanno sopra di essa su *ga* e *fa* come queste si rapportano a *go* e *fp*[6]. Questo è possibile perché si dà un punto vicino a *g* dove il rapporto è maggiore e un punto vicino a *o* dove il rapporto è minore; pertanto, c'è un punto intermedio dove esso non è né maggiore né minore. Così, ancora, si può dare una perpendicolare che si rapporta alle linee che stanno

---

e se $ax = 2ad$, allora $dx = \frac{1}{6}$ della circonferenza $= \frac{2\pi r}{6}$. La ragione sta nel fatto che $ad = \rho_3 =$ raggio del cerchio inscritto nel triangolo equilatero isoperimetrico al cerchio di raggioag; $ax = r_3 =$ raggio del cerchio circoscritto al triangolo stesso; $dx =$ semilato del triangolo $= \frac{2\pi r}{6}$. Secondo Hofmann e Hofmann (1980, nota 3, 243), $\rho_3 = \frac{(2r\sqrt{3})}{(4+\sqrt{3})}$ e se il perimetro del triangolo è U avremo $U = 6\rho_3\sqrt{3} = 2r[\frac{18}{(4+\sqrt{3})}]$; $\frac{\text{perimetro del triangolo}}{\text{circonferenza del cerchio}} = \frac{18}{(4+\sqrt{3})} = 3,1402$. Questo valore approssimativo di π è di poco più piccolo del limite inferiore di (3,1408).

5 $\frac{2}{3}dx < ag < dx \iff \frac{2}{3}; \frac{2\pi r}{6} < ag < \frac{2\pi r}{6}$. Questa diseguaglianza si ottiene così: nel cerchio di raggio r la circonferenza $2\pi r$ è uguale a $\frac{1}{6}$ del semilato $\frac{\pi r}{3}$ del triangolo equilatero isoperimetrico al cerchio, e da un lato è maggiore di $6r$ (dall'esagono regolare inscritto); dall'altro è minore di $8r$ (dal quadrato inscritto), così da un lato $r < \frac{\pi r}{2}$; dall'altro $\frac{2}{3} \times \frac{\pi r}{3} < \frac{8r}{9} < r$.

6 $go = fp = dx$; $ao = \frac{ad}{2}$; $ap = \frac{ac}{2}$. La perpendicolare taglia ag in d e af in c, così, per determinare ad, si tstabilisce il punto d su ag grazie alla proporzione continua: $\frac{dc}{(dg+cf)} = \frac{(dg+cf)}{(go+fp)}$. Poniamo $dc = u$, così $dx = 3u$, $ac = 2u$, $ad = u\sqrt{3}$; $dg = r–u\sqrt{3}$, $cf = r–2u$; $go = fp = 2u$. Per la proposizione $\frac{u}{[2r–u(2+\sqrt{3})]} = \frac{[2r–u(2+\sqrt{3})]}{4u} = \sqrt{(\frac{u}{4u})} = \frac{1}{2}$, si ha $u = \frac{2r}{(4+\sqrt{3})}$, $r = (2 + \frac{\sqrt{3}}{2})u$.

sotto di essa fino ad *o* e *p* allo stesso modo in cui queste si rapportano a *og* e *pf*, seguendo lo stesso procedimento di prima[7].

6. Dico che queste due perpendicolari coincidono in una sola che taglia parti uguali da *og* verso l'alto e da *fp* verso il basso e di conseguenza anche da *go* verso il basso e da *pf* verso l'alto. Diversamente, come si dimostrerà più avanti, ciò è impossibile. Questa perpendicolare sarà dunque $\frac{1}{3}$ del semilato, per esempio *dc*; e poiché *ca* è il doppio di *dc, ca* sarà uguale a *fp, pa* uguale a *fc e fc* uguale a *do*. Inoltre, poiché *fc* è anche uguale a *oa, fc* sarà la metà di *da*; e poiché *dc* è $\frac{1}{3}$ del semilato del triangolo isoperimetrico, triplicato il semilato che tocca il cerchio inscritto in *d*, *ad* sarà il semidiametro di questo cerchio inscritto. E questo era ciò che si cercava.

7. Che la perpendicolare che si abbassa da *g* e l'altra che si innalza da *o* coincidono nel punto *d*, come detto prima, è così evidente: infatti, la perpendicolare che si abbassa fino al suddetto rapporto non può stare al di sopra di *d*; è evidente, poiché le linee al di sopra della perpendicolare qui sono minori della metà di *go* e di *fp* e la perpendicolare è certamente maggiore della metà di *go*. Essa non può nemmeno scendere al di sotto di *d* perché qui le due linee al di sopra della perpendicolare sono maggiori della metà di *go* e di *fp* e la perpendicolare è minore della metà di *go*. Se, dunque, la perpendicolare che si abbassa non può che cadere in *d*, allora anche quella che si innalza non può che cadere in *d*, poiché in *d* le linee che stanno sopra e quelle che stanno sotto sono uguali e dunque le perpendicolari coincidono. Questo era ciò che si doveva dimostrare[8].

8. Può essere dimostrato anche in un altro modo. In primo luogo, suppongo di poter segnare il semidiametro del cerchio inscritto nel triangolo isoperimetrico del cerchio dato su *ag*, e immaginiamo che sia *ad*. Se pure esso è maggiore della metà di *ag*, sarà tuttavia di molto minore dei due terzi [di *ag*], come risulta dalla dimostrazione appena effettuata, da cui segue che il diametro del cerchio, triplicato di un settimo va oltre la circonferenza. Si può anche condurre dal punto *d* una perpendicolare *dx* di lunghezza indefinita e far ruotare *af* da *ag* attorno al centro *a* del cerchio dato finché la linea compresa tra *dx* e la circonferenza sia la metà di *ad*. È evidente. Infatti, se *af* si trova vicino a *g*, questa linea è maggiore della metà di *da*, ma se si avvicina al punto in cui *dx* taglia la circonferenza, allora è minore; dunque essa si trova in un punto [intermedio] né maggiore né minore. Se tuttavia questa linea è uguale alla metà di *ad*, allora la parte restante di *af* compresa tra *dx* e *a* sarà uguale a *gd* più la metà di *da*. E tralascio tutto il resto in quanto noto.

9. In secondo luogo suppongo che se la perpendicolare da *d*, per esempio *dx*, è un sesto della circonferenza del cerchio dato, allora la linea *ax* sarà il doppio di *ad* e le tre linee saranno note una a una: la prima è *dg*, l'altra è la linea di *af* al di sopra di *dx* e la terza è quella compresa tra *d* e *af*. E questo è certo.

10. In terzo luogo suppongo che se *af* taglia la circonferenza in un punto che dista dal punto *g* un dodicesimo della circonferenza, allora la linea *dc* della perpendicolare *dx*, compreso tra *d* e la linea *fa*, sarà un terzo di *dx* che è uguale a un sesto della circonferenza

[7] Si può anche determinare *d* con la proporzione: $\frac{dc}{(do+cp)} = \frac{(do+cp)}{(go+fp)}$. Ponendo $dc = v$, risulta che $do = go–dg = v(2+\sqrt{3})–r$, $cp = fp–cf = 4v–r$; così la proposizione si trasforma in $\frac{v}{[v(6+\sqrt{3})–2r]} = \frac{[v(6+\sqrt{3})–2r]}{4v} = \frac{1}{2}$ e $v = \frac{2r}{(4+\sqrt{3})} = u$.

[8] Si tratta di dimostrare che queste due determinazioni di *d* coincidono in una sola.

$dc = \frac{1}{3}dx$; $ca = 2dc$; $ca = fp$; $pa = fc$; $fc = do$; $fc = oa$; $fc = \frac{ad}{2}$; $dc = \frac{1}{3}dx$; quindi $3dc = dx$; $ad = \rho_3$. Se la perpendicolare fosse sopra *d* allora dg $(e\ fc) < \frac{go+fp}{2}$ e $dc > \frac{go}{2}$. Se la perpendicolare fosse sotto *d* allora dg (e fc) $> \frac{go+fp}{2}$ e $dc < \frac{go}{2}$. Accade solo in *d* che $dg = \frac{go+fp}{2} = \frac{2}{3}dx$. Dunque: $cf + dg = od + dg = ag–cf = ac = \frac{2}{3}dx$.

del cerchio. Infatti, un terzo [di *dx*] sarà la metà del semidiametro del cerchio; il quadrato del suo semidiametro è un terzo del quadrato del semidiametro *ax*, dunque i due terzi del semilato del triangolo inscritto nello stesso cerchio. Questo è evidente, infatti il quadrato del semilato del triangolo si rapporta al quadrato del semidiametro come 3 a 4. Dunque il quadrato dei due terzi del semilato si rapporta al quadrato del semilato intero come 4 a 9 e il quadrato del semidiametro sarà uguale a 12, di cui un terzo è pari a 4 e questo è certo.

11. In quarto luogo, suppongo che ora ruoti *af* fino al punto in cui le tre linee, di cui si parla nella seconda ipotesi, saranno uguali a *dx*. Infatti, se *af* si situa vicino a *g*, esse saranno minori; se dista dal punto *g* più di un dodicesimo della circonferenza, saranno maggiori. In un determinato punto, quindi, esse non saranno né maggiori né minori di *dx*, e questo si trova a un sesto della circonferenza del cerchio.

12. In quinto luogo suppongo che ora *ax* ruoti fino a quando il secondo è maggiore della metà di *ad*; allora la prima e la seconda, prese insieme, sono maggiori della linea restante. Chiamo "linea restante" quella parte di *af* dalla quale è stata sottratta la seconda. Se la seconda è minore della metà di *ad*, allora la prima e la seconda, prese insieme, sono minori della linea restante. Tuttavia quanto più *af* si allontana dal punto *g*, maggiore sarà la somma delle tre; e quanto più la seconda è maggiore, minore sarà la somma delle tre linee, e quanto più essa è minore, maggiore sarà la somma[9].

13. Dico dunque che quando *af* è posto sul punto della circonferenza che dista da *g* un dodicesimo della circonferenza, allora le tre linee prese insieme sono uguali a *dx*, cioè a un sesto della circonferenza, dato che la seconda è la metà di *ad* e la prima e la seconda prese insieme sono uguali alla linea restante che, unita alla terza, è uguale a *dx*.

14. Se qualcuno negasse questo, allora dovrebbe negare che la seconda è la metà di *ad*. Perciò, se lo nega e afferma che le tre linee sono minori di *dx*, è necessario che sostenga che la seconda è tale che le tre linee siano minori, come se la seconda fosse la metà di *ad*. Così, dalla quinta ipotesi, egli deve affermare che la seconda è maggiore della metà di *ad* e se è così allora, stando alla suddetta ipotesi, la prima e la seconda insieme superano la linea restante ca, che, unita alla terza cd, è uguale a *dx*; è evidente che le tre linee non sono minori, ma maggiori di *dx*. Così, se egli afferma che le tre linee sono maggiori, deve necessariamente sostenere che la seconda è minore della metà di *ad*; e se è così, allora la prima e la seconda sono minori della linea restante che, unita alla terza, è uguale a *dx*. Le tre linee saranno dunque minori; e qualunque cosa dica chi nega quanto abbiamo affermato, risulta il contrario dalla quinta ipotesi. Ne consegue necessariamente che la proposizione è vera, che ad è il semidiametro del cerchio inscritto al triangolo isoperimetrico, *cf* è la sua metà e *dx* è uguale a un sesto della circonferenza del cerchio dato di cui *ag* è il semidiametro. E questo è ciò che si cercava.

15. Diversamente: dico che le tre linee sono uguali alla metà del lato del triangolo isoperimetrico e di conseguenza che la prima e la seconda prese insieme sono uguali ai due terzi di questo e che la seconda è la metà del semidiametro del cerchio inscritto nel triangolo.

---

[9] Si possono ricapitolare le cinque ipotesi e le loro concatenazioni:

in primo luogo: $\frac{ag}{2} < ad < \frac{2}{3}ag$; da cui $\frac{ag}{2} < \rho_3 < \frac{2}{3}ag$;

in secondo luogo: se $dx = \frac{2\pi r}{6}$, allora $ax = 2ad$ e dunque si conosceranno *dg, cf* e *dc*.

in terzo luogo: se l'arco $gf > \frac{2\pi r}{12}$ allora $dc = \frac{dx}{3}$;

in quarto luogo: $dg + cf + dg = dx = \frac{2\pi r}{6}$;

in quinto luogo: la linea residua $= af - cf = ac$. Se *af* si allontana da *g* allora $dg + cf > ac$; se $cf < \frac{ad}{2}$, allora $dg + cf < ac$. Più *af* si allontana da *g* più $(dg + cf + dc)$ cresce; più *cf* cresce più $(dg + cf + dc)$ decresce; più *cf* decresce più $(dg + cf + dc)$ cresce.

16. Se una di queste affermazioni è vera, tutte le altre sono vere e questo è certo. Se lo neghi, cadi in contraddizione. Infatti, se, considerando la figura di sopra, dici che le tre linee sono minori del semilato del triangolo in questione, allora dici che la seconda è maggiore e minore della metà del semidiametro del cerchio inscritto al triangolo in questione. Se dici che essa è maggiore, affermi che le tre linee prese insieme sono minori, come se la seconda fosse la metà del semidiametro del cerchio inscritto nel triangolo. Infatti, quanto maggiore è la seconda, tanto minori sono le tre linee dalla quinta ipotesi. Dici, infatti, che la seconda è minore della metà del semidiametro in questione perché affermi che la prima e la seconda, prese insieme, sono minori della linea restante di *af* da cui è stata tolta la seconda[10]. Altrimenti, infatti, le tre linee non sarebbero minori della metà del lato del triangolo. Dici anche che la terza è maggiore e minore di $\frac{1}{3}$ del semilato del triangolo. Se infatti le tre linee prese insieme sono minori della metà del lato del triangolo e se la somma della prima e la seconda è maggiore della linea restante di *af*, allora la terza è minore di $\frac{1}{3}$ del semilato; e poiché la prima e la seconda sono ancora minori della linea restante di *af*, allora la terza è maggiore di $\frac{1}{3}$ del semilato; la stessa cosa accade quando dici che le tre linee sono maggiori del semilato. È dunque chiaro che chi nega afferma due contraddizioni.

17. È evidente che il diametro di un cerchio dato è uguale alla somma del semidiametro del cerchio inscritto al triangolo isoperimetrico e dei $\frac{2}{3}$ del lato del triangolo[11]. Pertanto, se la linea fosse uguale al diametro triplicato per $\frac{1}{7}$ di esso e se a quella togliessi il semidiametro del cerchio inscritto corrispondente e i $\frac{2}{3}$ del lato del triangolo, allora questa somma sarebbe maggiore del diametro, perché la linea uguale al diametro triplicato per $\frac{1}{7}$ di esso è maggiore della circonferenza; e se la linea fosse uguale al diametro triplicato e ai $\frac{10}{71}$ di esso e se ad essa togliessi il semidiametro del cerchio inscritto nel triangolo in questione e $\frac{2}{3}$ del lato del triangolo allora questa somma sarebbe insieme minore del diametro, perché il diametro, triplicato per i suoi $\frac{10}{71}$, è minore della circonferenza, come Archimede[12] e altri hanno dimostrato. E potresti provarlo anche numericamente.

18. Bisogna anche considerare che chi nega la quadratura del cerchio, al fine di non affermare che ciò che è curvo e ciò che è rettilineo coincidono, afferma, attraverso la sua negazione, che due contraddizioni coincidono. Se si applicherà accuratamente, mostrerà che le proposizioni matematiche sono vere perché in caso contrario seguirebbe la quadratura del cerchio, e parimenti perché in caso contrario seguirebbe che il cerchio non si può quadrare. Perciò, dall'affermazione e dalla negazione della quadratura del cerchio possono essere provate come vere tutte le proposizioni matematiche, di cui ho già detto abbastanza altrove[13], così, la dotta ignoranza è venuta a capo di tutto ciò che bisogna sapere per rispondere alla domanda se ci sia una coincidenza delle contraddizioni oppure no. Su ciò ho scritto qualcosa, anche se in maniera del tutto insufficiente, in tre libri[14].

---

[10] Se $dg + cf + dc < dx$, allora $cf > \frac{ad}{2}$ e $dg + cf > ac$. Ma $ac + dc = dx$; dunque $dg + cf + dc > dx$. Se $dg + cf + dc > dx$, allora $cf < \frac{ad}{2}$ e $dg + cf < ac$. Ma $ac + dc = dx$; quindi $dg + cf + dc < dx$. Pertanto l'ipotesi di partenza è esatta: $ad = \rho_3$; $cf = \frac{ad}{2}$; $dx = \frac{2\pi r}{6}$.

[11] Sappiamo che $cf + dg = \frac{2}{3}dx = \frac{1}{3}S_3$; $ag + af = 2r$; $(ad + dg) + (ac + cf) = ad + ac + (dg + cf) = \rho_3 + \frac{1}{3}S_3 + \frac{1}{3}S_3 = \rho_3 + \frac{2}{3}S_3$.

[12] Cfr. Archimedes 1910b, prop. 3.

[13] Cfr. Cusanus 2010c, 25.

[14] Cfr. Cusanus 1972a, I–III; Cusanus 1972a, I, 4, 12; Cusanus 1972a, I, 13, 35; I, 16, 43; I, 21, 64; II, 9, 148.

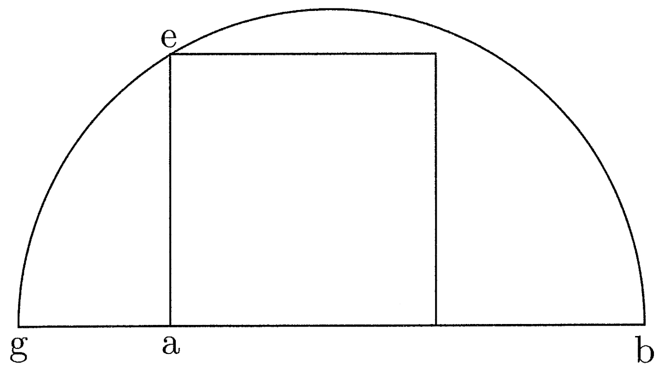


fig. 2

19. Tuttavia è certo che se si moltiplica il semidiametro *ga* del cerchio dato per *ab* e si triplica per *dx*, si ottiene un rettangolo uguale al cerchio (cfr. figura 2); e se si cerca per la nona proposizione del sesto libri di Euclide il medio proporzionale tra *ag* e *ab*, ossia *ae*, che è tre volte *dx*, allora *ae* sarà il lato del quadrato che è uguale al cerchio, come si è già appreso prima. A quei tre libri, aggiungo questa quadratura del cerchio cesariano.

Terminato il 6 Agosto 1457 presso Andratz.

La perfezione matematica

Versione originale latina a p. 145.

Al reverendissimo D. Antonio, Padre in Cristo, cardinale della Santa Romana Chiesa, sacerdote di San Crisogono, La perfezione matematica di Niccolò, cardinale di San Pietro in Vincoli[1].

1. La vostra nobile mente, Padre reverendissimo, è attenta a considerare le speculazioni anche delle menti ottuse e altre volte mi ha richiesto qualcosa di nuovo. E, dato che un piede malato mi ha tenuto fuori dalla corte papale, costringendomi a stare due giorni a casa, ho redatto *La perfezione matematica*, che vi invio, al fine di raccomandarvela, in quanto sperimento in essa la forza [della dottrina] delle coincidenze finora sconosciuta nelle questioni teologiche. Infatti, da essa, come mostrano gli esempi che aggiungo, si attinge tutto ciò che c'è da sapere in matematica, in quelle oscure questioni da sempre studiate con estremo zelo, ma che finora non hanno portato a niente. D'altra parte, in che modo la matematica ci conduce quasi all'assoluto divino ed eterno, la vostra dotta paternità lo sa meglio di me, voi che siete l'apice dei teologi. Ho inoltre inviato un piccolo scritto su come considero lo specchio e le immagini enigmatiche[2], nel quale, se il reverendo padre vorrà interessarsene un po', vedrà ad un tratto, se ho ben diretto la visione della mente al principio delle cose, ciò che anche i più dotti hanno temuto di scrivere. Essendo tutto ciò

[1] Il 30 settembre 1458, dopo aver definitivamente perduto la sua diocesi, Cusano incontra a Roma il cardinale spagnolo di S. Crisogono, Don Antonio Cerdá y Lloscos (cfr. Hofmann e Hofmann 1980, nota 2, 246), il quale gli sollecita di scrivere qualcosa di nuovo. Cusano scrive per lui *La perfezione matematica*, in cui, dopo i diversi tentativi precedentemente provati, rinuncia a trovare il rapporto esatto tra una grandezza rettilinea e una grandezza curvilinea e ricorre all'intuizione. Cusano considera quest'opera come il suo migliore trattato matematico e lo annota espressamente sotto il titolo del *De mathematicis complementis*, al margine di *Cu*, dove si legge che il *De mathematica perfectione*: «prevalet omnibus». In questo testo Cusano si serve della *visio intellectualis*, già ampiamente utilizzata nel *De beryllo*, come una vera e propria *via demonstrandi*: portando al limite minimo l'arco e la corda, la freccia risulta nulla e la curva coincide perfettamente con la retta, e ciò che è vero per il massimo e per il minimo è vero per tutti i valori intermedi (cfr. Cusanus 2010i, 7, 1–4). Tale uguaglianza (*aequalitas*), attuandosi nel minimo assoluto, non è esprimibile attraverso un numero razionale e, alla fine dello scritto, Cusano escogita una serie di operazioni realizzabili attraverso la coincidenza degli opposti e lascia credere al trionfo di tale metodo, rinunciando a determinare l'esatta quadratura del cerchio. Come annota Nicolle (1998, nota 21, 121), le ultime sei pagine di *C* sono state cancellate, senza dubbio con una pietra pomice. Nel Marzo 1968 il presidente della Cusanus–Gesellschaft di Trêves ha portato il documento al dipartimento del Ministero Tedesco della Criminalità. Attraverso metodi chimici è stato possibile ritrovare le tracce di inchiostro e ricostruire il testo. Si tratta di una prima versione cancellata del *De mathematica perfectione*. Ipotesi probabili sul perché siano state cancellate sono avanzate da Marco Böhlandt (2002, 104–109; cfr. anche Böhlandt 2005, 3–40). È molto probabile che Il *De mathematica perfectione* e il *De beryllo* siano state prodotti nel medesimo periodo e, poiché nel *De beryllo* si trovano argomenti generali sulla filosofia e sulla teologia simili a quelli esposti nella prima versione del *De mathematica perfectione*, è verosimile che Cusano non abbia voluto riportarli nella versione definitiva. Una squadra diretta da Rudolf Haubst ha proceduto alla decifrazione e Joseph Ehrefred Hofmann ha pubblicato il risultato di questo lavoro in Hofmann e Haubst 1973, 13–57. Nel 1983 Klaus Reinhardt ha ritrovato e ha trascritto un manoscritto integro nel codice *To* (Biblioteca Capitular, f. 188*r*–191^{r}) molto simile a quello di Reinhardt 1986, 96–141. Sulla base di *C* e le integrazioni da parte di Reinhardt è stato ricostruito integralmente la *forma prior* del *De mathematica perfectione* ed è oggi disponibile in Cusanus 2010h, 183–199. Di questa *forma prior* abbiamo tradotto tre parti, riportati nell'ultima nota della presente traduzione: il primo estratto comprende i paragrafi 4–7; il secondo estratto i paragrafi 20–21; il terzo i paragrafi 25–30.

[2] Il termine latino è «aenigma». Cfr. Cusanus 1988b, 1, 2–10.

più facile da contemplare che da spiegare, non mi sono vergognato a inviarvelo, e spero di essere guidato dal vostro giudizio, sapendo che a nessun altro, se non al padre che mi ama, comunico questi segreti che mi sembrano forse più preziosi di quanto siano in realtà: correggerò la mia valutazione secondo il vostro giudizio, che supplico di inserire in questi scritti.

2. La mia intenzione è quella di arrivare alla perfezione matematica attraverso la coincidenza degli opposti. E poiché questa perfezione consiste per tutti nel rendere una grandezza rettilinea uguale a una [grandezza] curvilinea[3], mi propongo di cercare il rapporto di due linee rette[4] che stanno tra loro come la corda e il suo arco; una volta conosciuto questo rapporto, so come rendere una grandezza curvilinea uguale a una rettilinea; ma, per scoprire tali linee, è necessario che io conosca il rapporto fra una corda e il suo arco, affinché, una volta conosciuto tale rapporto, sia in grado di progredire in quest'arte. Ma come posso conoscere il rapporto fra una qualunque corda data e il [suo] arco, visto che forse fra queste grandezze così diverse non c'è alcun rapporto numericamente determinabile?

3. Sarà dunque necessario che ricorra alla visione intellettuale, che vede coincidere la corda minima, ma non determinabile, con l'arco minimo. Infatti, quanto più la corda è minore, tanto più la freccia diminuisce, come la freccia *de* della corda *bc* è minore della freccia *ge* della corda *fh*, poiché *bc* è minore di *fh*, e così via[5](cfr. figura 1).

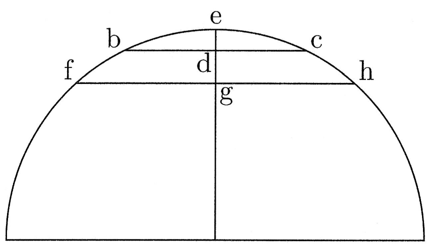


fig. 1

4. Dunque, la minima corda, di cui non si può dare una ancora minore, se fosse determinabile, non avrebbe una freccia [corrispondente], e non sarebbe neanche minore del suo arco. Qui, dunque, corda e arco coinciderebbero, se in essi si pervenisse alla grandezza minima. L'intelletto vede ciò perfettamente come necessario, sebbene sappia che né l'arco né la corda – essendo grandezze – sono le minime in assoluto, né in atto, né in potenza, dal momento che il continuo è sempre divisibile[6]. Per pervenire tuttavia alla conoscenza

[3] Qui Cusano parla di «quantitas curva et rectilinea», ossia una figura delimitata da linee dritte e una figura delimitate da linee curve.

[4] Per «linee rectae» si intendono linee dritte, ossia non curve.

[5] Cfr. Cusanus 1988b, 1, 2–5.

[6] In questo passaggio, come in Cusanus 2010c, 17, dove si legge: «punctum, qui est terminus divisionis et lineae, et est rectilinealiter indivisibilis in quantum terminus lineae, in se tamen est quantitas divisibilis» e in Cusanus 2010g, 14: «Quantitas autem, quae non potest esse minor, non est quantitas, sed punctus», vi è una confusione di Cusano sul concetto di punto e di continuo. Cusano assimilare e non assimila la più piccola grandezza restante fra la corda e l'arco a un punto. Secondo Hofmann e Hofmann 1980, nota 4, 246, il valore di questa grandezza non è né indefinito, né un minimo, ma l'intervallo che noi chiamiamo infinitesimo e, su questa scia, Nicolle si chiede se Cusano possa essere considerato un precursore di Cavalieri (Nicolle 1998, nota 2, 120). Ora, sebbene la storia della matematica, da Euclide in poi, sia piena di considerazioni sugli infinitesimi, nessuno, matematicamente parlando, fino al Seicento, è andato oltre il metodo di esaustione. Così scrive Counet: «Finally both quantities [decreasing arc and chord] vanish according to rational ma-

del loro rapporto, mi affido alla visione intellettuale, e dico di vedere dove si trova l'uguaglianza fra la corda e l'arco, ossia nel minimo assoluto[7] di ciascuno dei due. Vista questa uguaglianza, proseguo la ricerca per mezzo di un triangolo rettangolo, e ciò mediante la proposizione seguente.

Proposizione

5. Se si pone il lato maggiore di un triangolo rettangolo come prima linea e come semidiametro del cerchio, il lato minore come seconda linea e come semicorda, e il lato restante come terza linea, il rapporto fra il semiarco e la semicorda sarà uguale a quello tra la linea uguale a tre volte la prima linea e la linea uguale a due volte la prima più la terza[8](cfr. figura 2). Così, se il triangolo rettangolo è ABC, il lato maggiore *ac* è la prima linea e il semidiametro del cerchio, il lato minore *bc* è la seconda linea e la semicorda, il lato *ab* è la terza linea e *hc* è il semiarco, *de* è uguale a tre *ac*, e *fg* è uguale a due *ac* più *ab*. Dico che il rapporto fra *hc* e *bc* è uguale a quello fra *de* e *fg*.

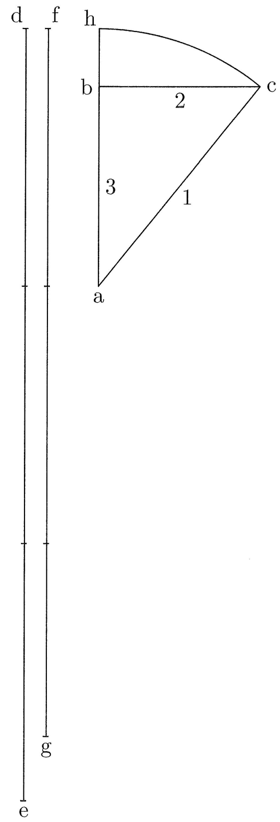


fig. 2

thematics, but intellectual intuition grasps something that is not zero (we would speak today of the rapport, which is not equal to zero even if the terms are)» (Counet 2005, 273–290, cit. 288).

[7] Per «minimus simpliciter» s'intende il limite minimo infinito.

[8] *ac* è la prima, *ab* è la seconda, *bc* è la terza. L'approssimazione è: $\frac{\text{semiarco } hc}{\text{semicorda } bc} = \frac{3ac}{(2ac+ab)}$; *bc* corrisponde al «sinus», che altrove (Cusanus 2010i, 68, 6), e poco più avanti in questo scritto Cusano chiama «semicorda del doppio arco», secondo un'invenzione indiana trasmessa attraverso gli arabi all'Occidente medioevale (cfr. Taton 1957–1958, I, 161).

Spiegazione della proposizione

6. Un triangolo rettangolo è tanto minore, quanto minore è la differenza tra la prima linea e la terza. Se dunque si potesse dare il minimo triangolo rettangolo, non ci sarebbe alcuna differenza tra prima linea e la terza; e poiché la seconda linea sarebbe la minima, allora, posta la semicorda, questa non sarebbe minore del semiarco, stando alle premesse.

Il triangolo rettangolo massimo si ha invece quando la differenza tra la prima e la terza linea è massima. Ciò accade quando la terza linea è uguale alla seconda, della quale non c'è una linea minore, e così la seconda è la semicorda del quadrante. Sia ABC il triangolo rettangolo (cfr. figura 3).

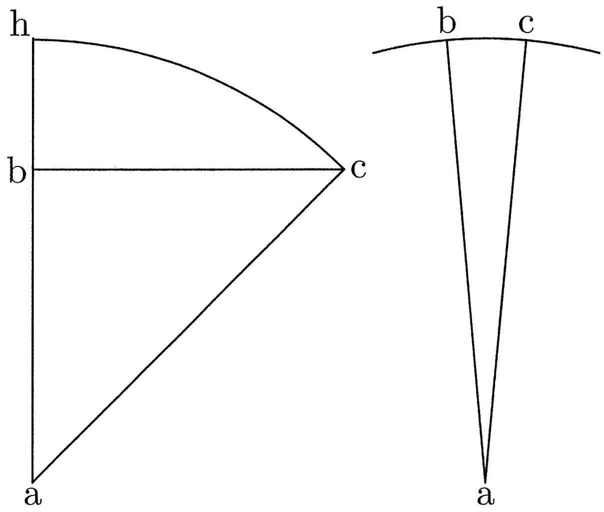


fig. 3

Dico che è possibile che, se si aggiunge una linea ad *ac*, e si aggiunge la stessa linea ad *ab*, la maggiore si rapporti alla minore come il semiarco *hc* si rapporta alla semicorda *bc*. Do come certo che possa esservi una tale linea che si aggiunge ad *ac* e ad *ab*, come posto sopra, dal momento che si può dare una linea che, aggiunta ad *ac* e ad *ab*, formi linee il cui rapporto è maggiore di quello fra il semiarco *hc* e *bc*, ed è certo che si può dare una linea che, aggiunta, formi linee il cui rapporto è minore di quello fra *hc* e *bc*. Dunque, [è certo che] se ne può dare anche una che, aggiunta, formi linee il cui rapporto non né maggiore, né minore di quello fra *hc* e *bc*, dal momento che non è contraddittorio che le linee rette si rapportino tra loro come la corda e l'arco, ossia che la corda sia commensurabile o incommensurabile rispetto all'arco[9].

7. È chiaro anche che, qualunque sia questa linea, se nel triangolo rettangolo minimo essa è aggiunta anche ad *ac* e ad *ab*, la proposizione è verificata, essendo qui la prima e la terza uguali, così come lo sono il semiarco e la semicorda. Di conseguenza, qualunque sia la linea aggiunta, la proposizione resta vera. E poiché la linea che si aggiunge nel triangolo rettangolo massimo è la stessa che si aggiunge in quello minimo, essa resterà la medesima in tutti i triangoli rettangoli intermedi.

---

[9] Poiché Cusano aveva affermato che la seconda *bc* dovesse essere il lato minore del triangolo, il triangolo rettangolo isoscele risulta il più grande possibile tra quelli ammessi. Cusano suppone l'esistenza di una grandezza t tale che $\frac{\text{arco } hc}{\text{corda } bc} = \frac{(ac+t)}{(ab+t)}$.

E questa è la base di tale dottrina, da cui consegue che, se trovo la linea che bisogna aggiungere nel triangolo rettangolo di cui *bc* è la semicorda del quadrante, e la aggiungo anche laddove *bc* è la semicorda dell'esagono, allora scopro che il rapporto tra tali linee è uguale a quello tra gli archi, ossia di 3 a 2. È chiaro che ho trovato la linea che bisogna aggiungere in tutti i casi, e su questo non c'è dubbio.

8. Ciò risulta così chiaro facilmente. È possibile che il rapporto tra la linea uguale alla somma fra la terza [linea] e due volte la prima linea del triangolo rettangolo e la linea risultante dalla somma fra la prima [linea] e quattro volte la seconda [linea] sia in qualche caso uguale a quello tra la semicorda e il semiarco. Questo è certo. Infatti, si dà un caso in cui il rapporto è minore, come nei triangoli rettangoli maggiori, e uno in cui esso è maggiore, come in quelli minori, il che di per sé è evidente. Si dà dunque un caso in cui esso non è né maggiore né minore. In qualsiasi caso ciò accada, bisogna, per quanto premesso, che la linea aggiunta alla terza sia la stessa di quella aggiunta alla prima. Ma quella aggiunta alla terza è due volte la prima. Di conseguenza, quella aggiunta alla prima sarà due volte la prima, e ciò accadrà dove la seconda è la metà della prima, vale a dire la semicorda dell'arco dell'esagono. Di conseguenza, bisogna aggiungere il diametro[10].

9. Potrai vedere questo così e anche in un altro modo. Se, per esempio, si desse un caso in cui il rapporto tra la somma di due volte la prima e due volte la seconda e tre volte la prima è uguale a quello tra la semicorda e il semiarco, si argomenterebbe come prima; ma, poiché la linea aggiunta alla terza e alla prima dev'essere la stessa, e poiché alla prima si aggiungono due volte la prima, e queste si aggiungono a due volte la seconda, allora due volte la seconda sarà uguale alla terza, e la linea aggiunta sarà il diametro. E potrai apportare tutti gli argomenti simili che vorrai.

Tuttavia, la proposizione dice che la linea aggiunta ad *ac* e *ab* è il diametro, ossia il doppio di *ac*, il che è lo stesso[11]. Da quanto detto potrai provare che lo stesso accade in tutti i casi in modo proporzionale.

10. Ma, affinché tu veda che è così come afferma la proposizione, prendi un doppio triangolo rettangolo, come sono ABC e ABD, descrivi l'arco *dc*, prolunga anche *ab* fino a toccare l'arco, e sia *be* la freccia (cfr. figura 4). Dico che è possibile che un triangolo composto da questi triangoli rettangoli sia tale che, se *ac* e *ad* sono prolungate all'infinito, e una corda, come *gf*, è parallela a *dc* ed è uguale a [la somma di] *ad, ac* e *ab*, allora l'arco, di cui *gf* è la corda, supererà la corda della freccia *be*, ossia di tanto quanto *ae* supera *ab*.

11. Non si può negare che ciò in qualche caso sia possibile, per esempio [nel caso in cui] tre semidiametri meno la freccia sono il triplo della corda; tuttavia, se ciò accada in questo o in un altro caso, non cambia: è sufficiente che sia possibile [almeno] in un caso[12].

E se volessi, potresti provarlo come prima, poiché ciò si dà nel caso in cui l'eccesso è minore della freccia, e dove l'eccesso è maggiore, e questo lo do per certo. Esso inoltre si dà nel caso in cui [l'eccesso] non è né maggiore, né minore, secondo quanto ho detto in precedenza. In qualsiasi caso ciò accada, è evidente che [la somma di] *ac*, *ad* e *ab* si rapporta a tre *ac* come la corda all'arco. Ciò è evidente poiché [la somma di] 3*ac* e 3*ac* meno la freccia, in qualche caso, è uguale a [la somma de] la corda e l'arco —e questo è certo —, o anche [nel caso in cui] l'arco supera la corda di suddetta freccia. E si ottiene

[10] Hofmann riporta una nota presente in *Cu* non presente nelle versioni stampate. Si ha: $\frac{(ab+2ac)}{(ac+4bc)} = \frac{\text{semicorda } bc}{\text{semiarco } hc} = \frac{(ab+t)}{(ac+t)}$; anche $t = 2ac = 4bc$ (cfr. Hofmann e Hofmann 1980, nota 10, 247).

[11] Si ha: $\frac{(2ac+2bc)}{3ac} = \frac{\text{semicorda } bc}{\text{semiarco } hc} = \frac{(ab+t)}{(ac+t)}$; si suppone che $t = 2ac = 4bc$; così, $ab = 2bc$ e l'angolo $bac = 26°34'$.

[12] La regola generale è la seguente: $\frac{\text{arco } ad}{\text{corda } bd} = \frac{(ac+ae+ad)}{(ac+ab+ad)} = \frac{\text{arco } gf}{\text{corda } gf}$. Se la corda $gf = ac + ab + ad$, allora l'arco $gf = ac + ae + ad = \text{corda } gf + \text{freccia } be$.

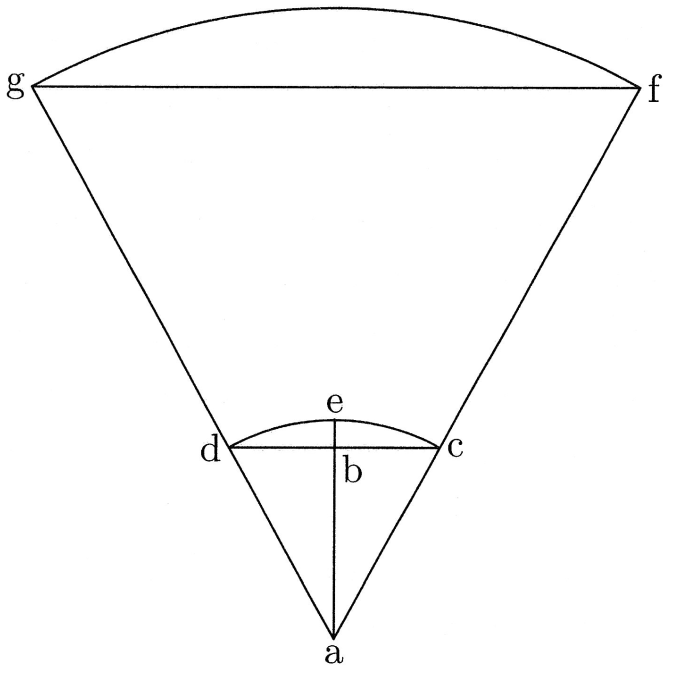


fig. 4

quel che si cerca [ossia l'uguaglianza], o all'interno o all'esterno. Se [tale uguaglianza] si realizza all'interno, allora, poiché l'arco supera la corda di una lunghezza minore della suddetta freccia, la corda sarà maggiore del caso in cui l'arco supera la corda della suddetta freccia, ma è impossibile che un arco minore sottenda una corda maggiore. Lo stesso accadrebbe se si affermasse che [l'uguaglianza], avviene all'esterno: un arco più grande sottenderebbe una corda minore. Perciò la linea da aggiungere ad *ac* e *ab* è 2*ac*, ossia il diametro del cerchio, e questa è la verità.

12. Tuttavia, poiché è il diametro dello stesso cerchio, si potrà forse dire che, in qualsiasi cerchio, la linea da aggiungere è il diametro: non si dirà che è il diametro di un cerchio maggiore, poiché allora non si avrebbe la verità nel cerchio massimo di cui non ce n'è uno che sia in atto maggiore. E neanche si potrà dire che è di un cerchio minore, poiché nel cerchio minimo in atto non si avrebbe la verità, e quindi in nessun cerchio, dal momento che ciò che si dice di un cerchio in quanto cerchio deve necessariamente valere per tutti [i cerchi]. E se non vale per tutti, allora non vale per nessuno; tuttavia, non importa che la ragione sia questa o un'altra. Il senso della proposizione è così evidente.

13. Aggiungerò un'altra dimostrazione di questa linea che deve essere aggiunta[13](cfr. figura 5). Si supponga una linea, di cui *ac* è una parte aliquota[14], che si rapporta alla linea che essa supera della stessa lunghezza di cui *ac* supera *ab*, in un rapporto

[13] In *Cu* 219, la figura è orizzontale. Si ha: $[\frac{(4ac)}{(4ac-bh)} = \frac{(ac+3ac)}{(ab+3ac)}] < \frac{\text{semiarco } hc}{\text{semicorda } bc} < [\frac{(ac+ac)}{(ab+ac)} = \frac{2ac}{(2ac-bh)}]$. Da cui: $(\frac{\text{semiarco } hc}{\text{semicorda } bc}) = \frac{3ac}{(3ac-bh)} = \frac{(ac+2ac)}{(ab+2ac)}$.

[14] Per «aliquota» s'intende: contenuta un numero intero di volte, ossia un sottomultiplo intero. Scrive Bradwardine 1328, 68: «pars autem aliquota est illa quae, aliquotiens sumpta, reddit aequaliter summum suum. Pars vero non-aliquota est illa quae nullatenus, aliquotiens sumpta, reddit aequaliter summum suum» («Una parte aliquota è invero quella che, presa un determinato numero di volte, dà come risultato il suo tutto. Una parte non aliquota è quella che, presa un qualsiasi numero di volte, non dà come risultato il suo tutto» (in Clagett 1964–1984a, 493,trad. nostra).

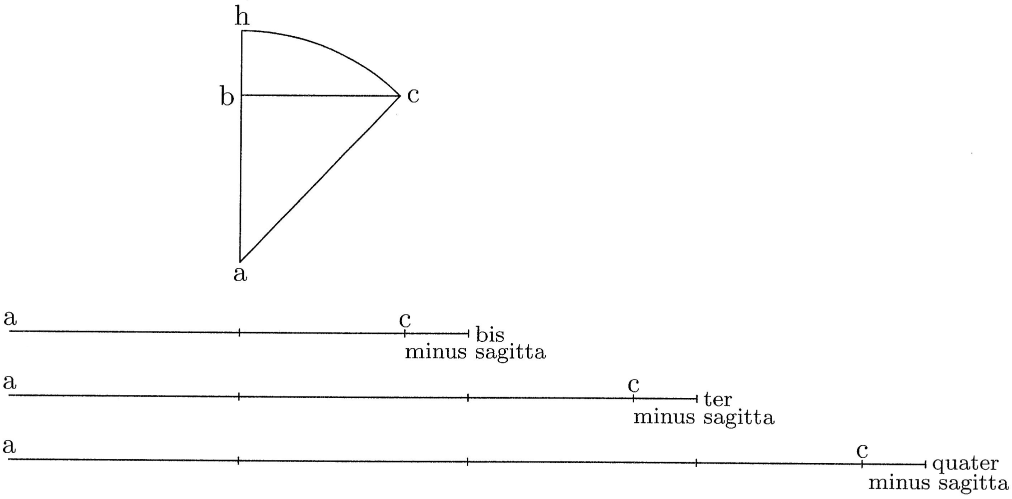


fig. 5

maggiore di quello fra *hc* e *bc*: sia tale linea il quadruplo di *ac*. Queste cose sono assolutamente vere. Di conseguenza, si può dare una linea, di cui *ac* è una parte aliquota, che si rapporta alla linea che essa supera della lunghezza di cui *ac* supera *ab* come *hc* si rapporta a *bc*. Questa linea, essendo necessariamente maggiore del doppio e minore del quadruplo, sarà tripla rispetto ad *ac*. Per questo, bisogna aggiungere ad *ac* il doppio di se stessa, vale a dire il diametro.

14. Perché tu veda anche numericamente quelle verità che ho detto sul doppio e sul quadruplo di *ac*, poni, secondo l'approssimazione di Archimede, che *ac* è 7, *ab* circa 5 e *bc*, essendo nel quadrante, anche uguale a 5. *hc* sarà 5 e mezzo secondo l'approssimazione della posizione, poiché il semicerchio è 3*ac* più un settimo, cioè circa 22; e così il rapporto fra *hc* e *bc* sarà circa come tra 5 e mezzo e 5, o tra 11 e 10, e l'eccesso di *ac* rispetto ad *ab* circa 2. È chiaro che il rapporto tra il doppio di *ac*, cioè 14, e la lunghezza più piccola di tanto quanto è la differenza tra *ac* e *ab*, cioè circa 2, per esempio 12, è maggiore di quello fra 11 e 10, e il rapporto tra 4*ac*, cioè 28, e la grandezza minore di due [unità], cioè 26, è minore di quello tra 11 e 10[15]. La linea, di cui *ac* deve essere una parte aliquota, deve essere maggiore del doppio e minore del quadruplo. Essa sarà dunque il triplo, poiché essa sola è la linea di mezzo, di cui *ac* è la parte aliquota.

15. Invece il motivo per cui l'argomentazione afferma che, della linea che si sta cercando, *ac* deve essere una parte aliquota è questo: poiché deve essere la stessa linea in tutti i triangoli rettangoli, è necessario che si prenda *ac*, che è anche la sola e unica in tutti, e non *ab* o *bc* che variano sempre. Si potrebbero aggiungere altri innumerevoli modi per dimostrare la proposizione, ma questi sono [quelli] fondamentali e sufficienti.

16. Molte cose nascoste si sono qui svelate, poiché vedi come ciò che si verifica per il massimo e il minimo si verifica per gli intermedi, e colui che vede il massimo coincidere

[15] Da $[\frac{28}{26} < \frac{11}{10} < \frac{14}{12}]$ Cusano conclude che $\frac{11}{10} \approx \frac{21}{19}$. Hofmann fa notare che il valore numerico approssimativo di $\frac{21}{19} = 1,105$ per $(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}) = 1,111$ è esatto nonostante l'approssimazione utilizzata insufficiente di $\sqrt{2} > \frac{7}{5}$; il valore numerico esatto in base alla regola di Cusano sarebbe $\frac{3}{(2+\frac{1}{\sqrt{2}})} = 1,108$ (Hofmann e Hofmann 1980, nota 14, 248).

con il minimo, cogliendo insieme il massimo e il minimo, in ciò vede tutto[16]. E, mediante questo procedimento, saprai come misurare grandezze diverse, che sembrano incommensurabili. Tutto ciò mi sembra importante e finora intentato. Archimede, infatti, che voleva trovare una linea retta che avesse la stessa misura della circonferenza di un cerchio attraverso l'elica, non ottenne nulla da quest'arte, né scoprì ciò che egli cercava in particolare. Egli sbagliò, infatti, perché presupponeva ciò che cercava: l'elica o spirale, infatti, non può essere descritta senza il movimento di due punti, dove il rapporto tra i movimenti è uguale al rapporto esistente fra il semidiametro e la circonferenza del cerchio. Dunque, parlando dell'elica, egli presuppose proprio ciò che cercava[17]. Ma così stanno le cose. Torniamo al nostro compito e dalla ricchezza di questa proposizione deduciamo qualche corollario, affinché da questi, con un procedimento equivalente, se ne possano spiegare altri innumerevoli.

Corollario

17. Il rapporto fra tre semidiametri e tre semidiametri meno la freccia della corda di un quadrante o[18] di un [arco] minore è uguale a quello fra un arco qualsiasi e la sua corda (cfr. figura 6).

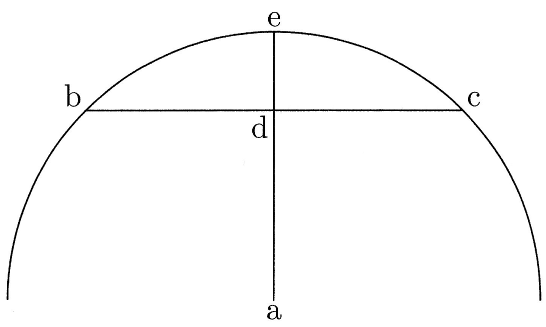


fig. 6

Sia *bc* la corda di un quadrante o di un arco minore e si conduca una linea dal centro *a* fino a toccare la circonferenza nel punto *e*, passando per il punto medio di *bc*, ossia *d*. Il rapporto fra tre *ae* e la somma di due *ae* e *ad* è uguale al rapporto fra l'arco e la corda *bc*. Parlando della corda del quadrante o di un [arco] minore, è evidente che sulla [corda] maggiore il lato minore del triangolo rettangolo non può essere la semicorda, che tuttavia è ciò che si richiede. Il corollario risulta chiaramente evidente dalle premesse.

Corollario

18. Risolvere un dato arco in una retta.

Se l'arco è un quadrante o un [arco] minore, prendilo così com'è; se è maggiore, prendi la parte aliquota di esso in modo che sia un quadrante o un [arco] minore. Sia *bc* l'arco del quadrante da risolvere in una retta (cfr. figura 7). Traccia dal centro *a* linee di lunghezza infinita che passano per *b* e *c*, e un'altra, *ad*, che taglia la metà della corda, e,

[16] Cfr. Cusanus 1972a, I, 4, 11.
[17] Cfr. Cusanus 2010j, 2, 11–17; Cusanus 2010i, 3, 2–11.
[18] In latino si legge «et», che è qui da intendersi nel senso di «o» alternativo.

fra le infinite linee, descrivi una linea *ef* parallela alla corda *bc* che sia uguale a [la somma di] *ab, ad* e *ac*.

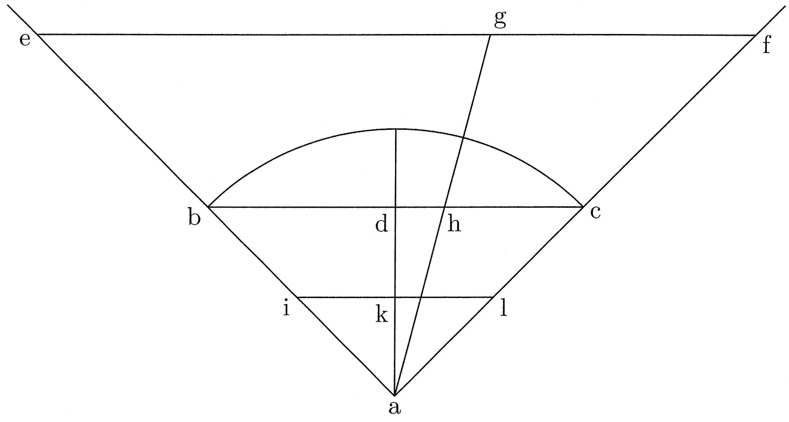


fig. 7

Su *ef* riporta *ab*, e sia *fg* uguale ad *ab*. Traccia la linea *ag*, e indica con la lettera *h* il punto in cui essa taglia la corda *bc*. Dico che *hc* è un terzo dell'arco. Dunque, triplica *hc*, e hai trasformato l'arco in una retta. Oppure traccia la linea parallela a *bc* verso il centro, ossia *ikl*, in modo che [la somma di] *ai, ak* e *al* siano uguali alla corda *bc*, e *ai* sarà un terzo dell'arco. Tutto ciò è evidente da sé[19].

Corollario

19. Risolvere una data retta in un arco.

Sia *ab* la linea retta che vuoi risolvere nel quadrante di un qualsiasi cerchio: traccia dal centro *o* linee perpendicolari di lunghezza indefinita, ossia *od* e *oe*, e fai passare dalla metà dell'angolo un'altra linea, *of*, e segna la terza parte della linea *ab*, che vuoi risolvere [in arco], su *od* e *oe*, e sia *og* un terzo di *ab*, e allo stesso modo *oh*; traccia *gih* (cfr. figura 8).

Di conseguenza, traccia *kl* parallela a *gih*, uguale a [la somma di] *oh, oi* e *oh*, e descrivi il quadrante avente come corda *kl*, poiché è la linea a cui *ab* è uguale. E se volessi risolverla in un altro arco, minore di un quadrante, fa in questo modo. Se esso è più grande, prendi una parte aliquota. Per esempio, se vuoi ridurla a un cerchio, prendi la quarta parte della linea retta, risolvila in un quadrante e hai ridotto il tutto in un cerchio.

20. Se tu volessi veramente risolvere una data retta nell'arco di un dato cerchio, nella sua totalità o in una sua parte aliquota, procedi come sopra descritto, variando l'angolo [compreso tra] *od* e *oe* fino a raggiungere la corda uguale a [la somma di] *og, oi* e *oh*[20].

Corollario

21. Risolvere un dato arco di cerchio nell'arco di un altro cerchio.

[19] La regola è la seguente: $\frac{\text{arco } bc}{\text{corda } bc} = \frac{3ab\ (=gf)}{ab+ac+ad\ (=ef)} = \frac{3hc}{bc}$. Il secondo metodo non è sostanzialmente diverso dal primo.

[20] Oggi siamo soliti costruire secondo lo svolgimento di Huygens 1656, prop. 13: se ABC è il triangolo dato e $ae = 2ac$, ec interseca nel punto x la tangente del punto h. Il semiarco ch = linea hx; quindi il $\frac{\text{semiarco } ch}{\text{semiarco } bc} = \frac{3ac}{2ac+ab} = \frac{he}{be} = \frac{hx}{bc}$. Questo procedimento si utilizza tanto per rendere lineare un arco quanto per rendere curva una linea.

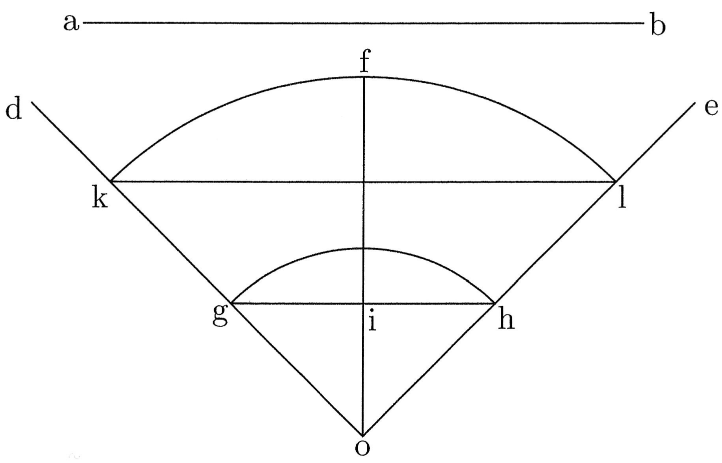


fig. 8

Ciò si ottiene risolvendolo dapprima in una retta, e poi la retta in un arco di un altro cerchio, come descritto sopra.

Corollario

22. Trovare angoli che si rapportano tra loro come linee date.
Ciò si ottiene risolvendo le linee in archi di uno stesso cerchio, e tracciando dal centro i raggi[21] fino agli estremi di tali archi[22].

Corollario

23. Il rapporto fra il semidiametro e il semidiametro meno la freccia è pari al rapporto fra un terzo dell'arco e l'eccesso di cui la corda supera due terzi del suo arco (cfr. figura 9).

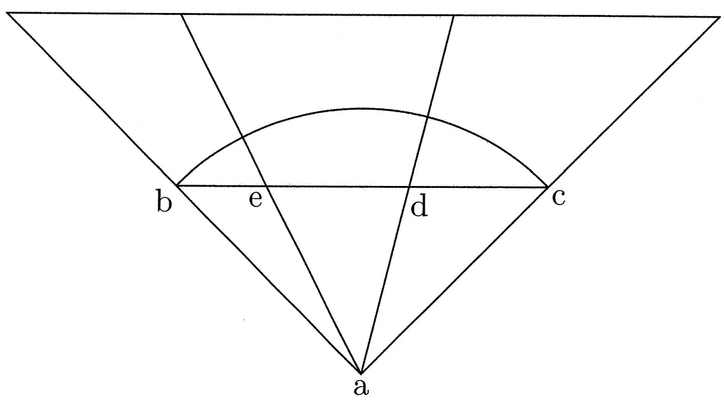


fig. 9

[21] Cusano utilizza il termine generico di «sectores».
[22] Cfr. Cusanus 2010k, 6, 1–3.

Sia *bc* la corda di un quadrante; su di essa hai segnato, stando a quanto premesso, due terzi dell'arco, cioè *cd* e *de*. Dico che il rapporto fra un terzo dell'arco *de* e l'eccesso *eb*, di cui la corda supera i due terzi, è pari al rapporto fra il semidiametro e il semidiametro meno la freccia[23]. Questo corollario è evidente da quanto premesso. Ed è vero nel triangolo rettangolo massimo, in quello minimo, e in tutti quelli intermedi.

Corollario

24. Trovare la corda di un dato arco di una parte aliquota di un semicerchio.

Poni il caso che, una volta conosciuta la corda di un quadrante, tu voglia conoscere la corda di un arco pari alla metà del quadrante. Conoscendo la parte della corda del quadrante che è uguale a un terzo dell'arco, prendi la sua metà, aggiungi a questo uno simile[24], e cerca l'eccesso che si rapporta a un terzo come il semidiametro meno la freccia si rapporta al semidiametro[25].

25. Aggiungerò qui precisi corollari.

Se tre semidiametri meno la freccia sono il triplo della corda, l'arco sarà uguale al semidiametro.

Se essi sono il doppio della corda, l'arco si rapporterà al semidiametro come tre a due[26].

Tre semidiametri sono il medio proporzionale fra tre semidiametri meno la freccia e il semicerchio[27].

Se tre semidiametri meno la freccia sono multipli della corda, tre semidiametri meno la freccia saranno multipli della corda della metà dell'arco e in modo proporzionale di una qualsiasi parte aliquota.

I tre lati di un triangolo equilatero saranno uguali alla circonferenza di un cerchio, il cui diametro è la terza parte dei due lati e della linea retta condotta da un lato alla metà del lato opposto[28].

26. Se dal centro si conducono tre linee – una che passi per il punto iniziale della corda del quadrante o di un arco minore, l'altra per la metà, la terza per il punto finale – che terminano su una linea parallela alla corda, di modo che il rapporto fra queste tre linee e la corda sia pari a quello fra la circonferenza e l'arco, allora la linea condotta per il punto iniziale della corda, triplicata, è uguale alla circonferenza.

L'arco uguale a tre quarti del diametro supera la sua corda della metà della freccia.

---

[23] Se si definisce R il semidiametro, C la corda, F la freccia e A l'arco, si ottiene: $\frac{A}{C} = \frac{3R}{(3R{-}F)}$. Se ne ricava che $\frac{R}{R{-}F} = \frac{\frac{A}{3}}{(C-\frac{2}{3}A)}$.

[24] «similis» è inteso qui come uguale.

[25] Il ragionamento sembra essere il seguente: conosci la parte della corda del quadrante che è uguale al terzo dell'arco ($\frac{1}{3}$di$\frac{1}{8}$d'arco $=$ $\frac{1}{24}$d'arco), prendi la sua metà ($\frac{1}{2}$di$\frac{1}{3}$di$\frac{1}{4}$d'arco $=$ $\frac{1}{24}$d'arco), aggiungi ad esso lo stesso ($2 \times \frac{1}{3}$di$\frac{1}{8}$d'arco $=$ $\frac{1}{3}$di$\frac{1}{4}$d'arco) e trovi l'eccesso che si rapporta al terzo (corda – $\frac{2}{3}$d'arco); questo è definibile come il quarto proporzionale.

[26] Cfr. nota 23. Il punto di partenza è la regola: $\frac{A}{C} = \frac{3R}{(3R{-}F)}$. Si ricava che $\frac{R}{R{-}F} = \frac{(\frac{A}{3})}{(C-\frac{2}{3}A)}$. Da ciò consegue che $3R{-}F = 3C$ e dunque $A = C$. Ma, essendo $3R{-}F = 2C$, allora $A : R = 3 : 2$.

[27] La regola $\frac{A}{C} = \frac{3R}{(3R{-}F)} = \frac{\text{semicerchio}}{3R}$ non vale sempre, ma soltanto per $\frac{1}{6}$. Si tratta apparentemente di una conseguenza errata, derivante dal fatto che Cusano non distingue tra le frecce che appartengono ad archi diversi.

[28] Il triangolo equilatero di lato c e altezza h è tale che: $\frac{\text{circonferenza}}{\text{diametro}} = \frac{\frac{1}{6}\text{d'arco}}{\text{corda}} = \frac{3c}{(2c+h)}$. Questa proposizione si comprende facilmente se si riporta la regola alla formula inversa $\frac{A-C}{A} = \frac{F}{3R}$.

Il diametro di un cerchio è uguale a due terzi dei lati di un triangolo isoperimetrico e al semidiametro del cerchio inscritto nello stesso triangolo.

L'eccesso del semicerchio sulle due corde di un quadrante è pari all'eccesso della diagonale[29] del quadrato sul suo lato, se la diagonale è uguale alla terza parte del semicerchio[30].

Il rapporto di tre diametri di un cerchio e la sua circonferenza è uguale al rapporto tra 14 più la radice di 36 per $\frac{3}{4}$ e 21[31].

La dottrina sulle corde è ora esaurientemente trattata.

La dottrina della quadratura del cerchio è giunta ormai al suo fine. Quest'arte assolutamente perfetta insegna che, a seconda del rapporto fra date linee, siano esse commensurabili o incommensurabili, si danno linee, superfici delimitate da linee dritte[32], da linee curve, e solidi.

Dalla coincidenza fra la tangente minima e l'arco minimo traggo, inoltre, la seguente proposizione:

Proposizione

27. Se si pone il secondo lato di un triangolo rettangolo come semidiametro di un cerchio, e il terzo come linea tangente al cerchio, o viceversa, e sarà descritto il cerchio, il rapporto fra la tangente e l'arco che cade dentro il triangolo rettangolo, sarà pari al rapporto fra la superficie delimitata da linee dritte e quella delimitata dalla linea curva (cfr. figura 10).

Se ABC è il triangolo rettangolo*,* *bc* la tangente, e *ab* il semidiametro del cerchio descritto, il cui arco *bd* cade nel triangolo rettangolo, il rapporto fra *bc* e *bd* sarà pari al rapporto fra la superficie delimitata da linee diritte ABC e la superficie delimitata dalla linea curva ABD.

La dimostrazione è la seguente: ciò si verifica nel minimo, se si potesse dare, e quindi in tutti i casi, poiché non è necessario stabilire che il triangolo rettangolo sia o no il massimo.

28. Risolvere una superficie data, delimitata da un arco e da raggi[33], in un triangolo rettangolo.

Dato ABC, si risolva l'arco *bd* nella linea retta *bc*, e si chiuda il triangolo rettangolo con *ad*. Così, che *bd* sia o meno proporzionale alla circonferenza, sai come si riconduce

[29] Cusano utilizza il termine «diameter» per indicare la diagonale in base a una etimologia inesatta da «δύο» e «μετρεῖν» (che divide in due) ripresa da Bradwardine 1495b, II, 1, concl. 8: «linea diagonali quae ducitur ab angulo ad angulum […]in quadrato vocatur diameter»). Una fonte chiara è la *Practica geometriae (*1220) di Leonardo Pisano (1862, II, 2). Nel 1498 si trova ancora il termine diametro per designare la diagonale del quadrato in Luca Pacioli: «Si ha costume di parlare di diametro anche per i quadrati: ecco (è) perché, al fine di evitare qualunque equivoco, si dice diametro del cerchio e diametro del quadrato per differenziarli» (Pacioli 1509, I, Cap. LXX). Cfr. Cusanus 2010i, 9, 3; Cusanus 2010g, 4.

[30] L'affermazione segue dalla seguente formula: $\frac{(A-C)}{(\frac{C}{3})} = \frac{F}{R} = \frac{\text{(diagonale del quadrato–lato del quadrato)}}{\text{diagonale del quadrato}}$.

[31] Generalmente *et* indica l'operazione di addizione. Questo rapporto deriva dalla regola sopra enunciata per un sesto di cerchio, con $c = 7$, per cui $h = \frac{7}{2}\sqrt{3} = \sqrt{36\frac{3}{4}}$.

[32] Si è qui tradotto «superficies recta» con «superficie delimitata da linee dritte» e non con «superficie piana». Quest'ultimo significato avrebbe senso se si volesse distinguere la «superficies recta» dalla «superficies curva», come quella di una sfera; ma qui sembra che Cusano tenga conto di due e non di tre dimensioni, cioè ragioni nel piano, anziché nello spazio.

[33] Come nei Cusanus 2010i, n. 90, 3, qui Cusano utilizza il termine «sectores» per indicare i raggi. Si tratta in pratica di un settore circolare.

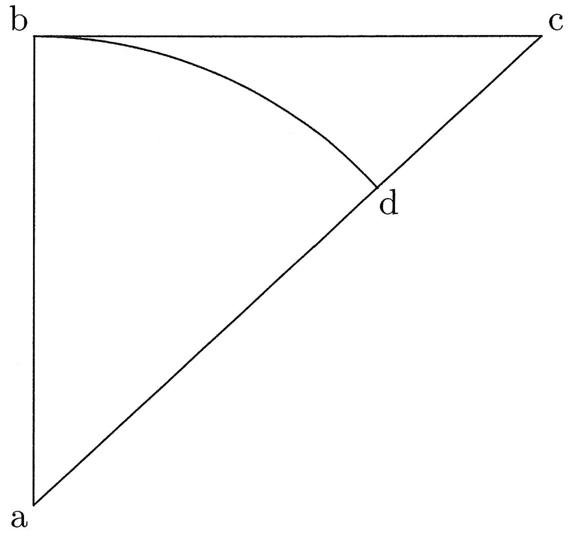


fig. 10

una [qualunque] superficie a una superficie delimitata da linee diritte. E sai come risolvere un cerchio in un triangolo rettangolo, e così in un quadrato o in un'altra figura.

29. Risolvere una data superficie delimitata da lati diritti in una porzione di cerchio[34].

Da quanto premesso la soluzione è evidente se essa è un triangolo rettangolo. Se così non è, [la] si riduce in triangolo rettangolo.

Risolvere le porzioni di cerchio comprese fra corda e arco[35] in [superfici] delimitate da linee dritte e in quelle delimitate da linee circolari, è evidente da sé.

30. Il rapporto tra la superficie curva di una sezione di sfera[36] e la [superficie della] base piana [di tale sezione], è come [quello tra] la linea dallo zenith al centro della base [della sezione], più il semidiametro della base [della sezione], e il suo semidiametro.

Ciò è evidente, dal momento che è così nella sezione minima dove la superficie della base piana coincide con quella curva, e dove lo zenith coincide con il centro. Lo stesso accade in tutti gli altri casi.

La superficie curva della metà di una sfera è il doppio della superficie piana del cerchio della base.

Risolvere una superficie curva data di una sfera in una superficie piana circolare e con lati diritti.

Risolvere una sfera in un cubo, e un cubo in una sfera[37].

Allo stesso modo ricava i rapporti in tutte le altre superfici curve, facendo riferimento a quelli minimi. E tutto ciò che si può umanamente conoscere nelle matematiche[38] si trova, a mio avviso, con tale procedimento.

Gloria a Dio[39].

---

[34] Qui per «portio circularis» Cusano intende il settore circolare.

[35] Qui per «abscissio» Cusano intende il segmento circolare. Quanto segue nel testo deriva da Archimedes 1910a, I, 30, 42–43 (Archimede 1974, 146–147).

[36] Qui Cusano intende la calotta sferica.

[37] Cfr. Cusanus 2010b, 44.

[38] Cfr. Cusanus 1972b, II, 14, 144; Cusanus 1982, 27, 82, 13–15.

[39] Rispetto alla versione ultima, la *forma prior* del *De mathematica perfectione* (Cusanus 2010h) presenta tre passaggi in cui emergono differenze interessanti rispetto alla versione definitiva. Riportiamo qui la tra-

duzione dei tre estratti:

Primo estratto (4–7): «Si deve considerare quindi in che modo, se applico la visione intellettuale a qualsiasi grandezza, per esempio a una linea, vedendola nella necessità d'essere, che non può essere né maggiore né minore, vedo quella grandezza come assoluta, […], ossia come misura adeguata di ogni grandezza, e, come in una grandezza, lo stesso vale per il triangolo, il cerchio e per tutte le altre figure; e come vedo che tutte le cose del genere della grandezza che sono nella necessità dell'essere della grandezza sono la grandezza assoluta stessa, così tutte le cose che sono assolutamente nella necessità dell'essere sono la necessità stessa. E da ciò considero di vedere la verità e la conoscenza delle cose là dove tutte le cose sono le stesse, cioè la necessità dell'essere. Dunque, se voglio trovare come si possa conoscere l'uguaglianza tra una grandezza rettilinea e una grandezza curvilinea è necessario che io sia guidato dalla visione intellettuale, la quale intuisce la loro uguaglianza nel cerchio massimo e nello stesso tempo nel cerchio minimo. Infatti, finché l'intelletto intuisce il cerchio nella necessità dell'essere, cioè così che non può essere né maggiore né minore, essendo il massimo e nello stesso tempo il minimo, esso vede il cerchio assoluto complicare ogni cerchio, e che la proporzione è vera in esso, dato che la corda e l'arco si identificano, e le linee, che sono limitate sulla corda, sono le stesse che sono limitate sull'arco, come sono note a chi le osserva. Dunque, da ciò che si vede qui, si ha che, nei cerchi sensibili, la vera conoscenza sta nella proporzione che sono le esplicazioni della complicazione del cerchio assoluto, come io ne ho trattato nei precedenti libri sulla dotta ignoranza. Come, infatti, nei [cerchi] sensibili, la corda e l'arco differiscono e variano, mentre sono lo stesso assoluto nel cerchio massimo assoluto, così in essi le linee limitate differiscono proporzionalmente. Da ciò, nello stesso modo, deriva la diversità della corda e dell'arco nei cerchi sensibili, poiché la semplicità del primo cerchio assoluto non può, come è comprensibile, essere sensibile, dato che la rettitudine della sua circonferenza, man mano che discende dalla sua perfezione, declina in curvatura; così la corda, che è sottesa all'arco, non può essere come l'arco. E poiché forse non sei molto abituato alle visioni intellettuali, e non sai cogliere la coincidenza del cerchio massimo con il cerchio minimo, [né cogliere] che la circonferenza è uguale alla linea retta, poiché né la ragione né l'immaginazione colgono ciò – infatti, essendo precedente alla grandezza divisibile, trascende tutte le capacità ‹conoscitive›, tranne quella intellettuale – ti guiderò affinché tu possa comprendere».

Questa esposizione è interessante perché precisa la nozione di *visio intellectualis*, annunciata in modo molto laconico nella versione definitiva: «Sarà dunque necessario che io ricorra alla visione intellettuale, che vede coincidere la corda minima, ma non determinabile, con l'arco minimo» (3, 1–3). Nella prima versione Cusano puntualizza che la visione intellettuale deriva da una certezza logica: essa è una «necessità dell'essere» (*necessitas essendi*). Ancora, oltre che annullare la nozione di *quantitas* al fine di realizzare l'uguaglianza delle grandezze, la visione intellettuale porta a grandezze assolute, minimo e massimo, ossia a figure perfette non percepite attraverso i sensi; la visione intellettuale, inoltre, annulla la differenza fra più e meno nell'assoluto, dove il minimo e il massimo coincidono, essendo l'atto di tutte le possibilità.

Secondo estratto (20–21): «Ora voglio trasformare una porzione di cerchio o un cerchio in un triangolo rettangolo. Considero in che modo nel cerchio massimo il triangolo rettangolo e la porzione o il cerchio coincidono, cioè sono uguali, dato che retta e arco sono uguali. Da ciò vedo che, se i due lati del triangolo rettangolo che formano l'angolo retto sono uguali al semidiametro e alla porzione dell'arco, le superfici saranno uguali in tutti i cerchi, proprio come nel ‹cerchio› massimo esse coincidono. E la coincidenza che si vede nel ‹cerchio› massimo si vede anche nel triangolo rettangolo minimo in qualsiasi cerchio. È dunque chiaro che il triangolo rettangolo, di cui un lato è ‹uguale› al semidiametro del cerchio e l'altro con cui il lato forma l'angolo retto è uguale alla circonferenza del cerchio, è uguale alla circonferenza più il cerchio. In questo modo determinerai in maniera proporzionale le porzioni ‹di cerchio›; si risolve ogni triangolo rettangolo in rettangolo o in quadrato o in altri poligoni grazie a ciò che è conosciuto in matematica. E così tu hai l'arte ‹di trasformare› una superficie delimitata da linee curve in una superficie delimitata da linee dritte, quadrangolare, triangolare o in un'altra figura».

La versione definitiva (27, 1–9) appare molto meno empirica, più «teorica», e cancella tutti i riferimenti alla nozione di coincidenza.

Terzo estratto (25–30): «Ho così voluto rivelare queste cose attraverso degli esempi, per dare occasione agli studiosi di meditare sul modo in cui si ottiene la conoscenza delle cose dalla visione intellettuale che si eleva al minimo e al massimo, affinché sappia che che ciò che vede in modo complicato quasi all'origine o al principio, è esplicato nelle figure sensibili e sul modo in cui nella coincidenza degli opposti si vede la complicazione delle cose conoscibili, come in questa matematica, dove si vede coincidere l'arco, la corda e la tangente nel triangolo rettangolo minimo. E così qui si complica il sapere delle cose conoscibili riguardo all'uguaglianza di ciò che è dritto e di ciò che è curvo[…] E, poiché questi esempi sono utilissimi a coloro che ricercano la verità, specie quando quelle questioni che, nonostante il massimo impegno, sono rimaste finora senza risposta, sono ora risolte in modo facile e certo, così, con questo esempio l'intelletto si aiuta e si volge allo scibile teologico, ossia alla coincidenza assoluta del minimo e del massimo o all'opposizione delle opposizioni, così come Dionigi il grande definisce dio come opposizione delle opposizioni, che non è altro che la coincidenza o l'uguaglianza. Infatti quell'uguaglianza innominabile è la forma dell'essere e del conoscere e la si vede attraverso la coincidenza degli opposti prima di ogni posizione e rimozione. A colui che contempla questa considerazione aiuterà moltissimo ricavare che la visione intellettuale è la vita dell'intelletto, che si nutre di verità; infatti, soltanto con tale visione è visibile, ed è spirituale colui che è abituato a quella visione, poiché, tra tutti coloro che si sforzano di parlare della verità, ‹è il solo che può› giudica‹re›, senza essere giudicato da nessuno; infatti soltanto chi apprende, sa riferire cose vere. Quella visione è dunque la luce della ragione, senza la quale ogni discorso è incerto e ogni movimento è ambiguo. La ragione, infatti, senza di essa, non sa fin dove si estende. Infatti soltanto la visione intellettuale è senza errore e senza inganno, e giudica la vera via, che conduce alla visione della verità, e se non è principio, mezzo e fine di ogni movimento della ragione, ogni lavoro è vano, così come colui che ricerca ciò che non conosce si affatica inutilmente. Da ciò, attraverso la fede, è iniziata la vera teologia di Cristo. La fede, infatti, è, per così dire, una sorta di visione, ma enigmatica; si conclude certamente con una visione, che si dice visione faccia a faccia senza enigma, ossia così com'è; e tuttavia non si vede nient'altro rispetto a ciò che si credeva. Dunque, la fede porta ciò che la visione coglie non all'incertezza, ma alla certezza, e ciò che coglie è la felicità, alla quale ogni natura intellettuale aspira attraverso l'attività intellettuale. Tuttavia la visione intellettuale è definita da Dionigi transizione in Dio. E, come colui che vede in questa frase di Euclide, ossia «il punto è ciò che non ha parti», in modo complicato, attraverso la visione intellettuale perfetta, tutto ciò che egli scrisse di geometria, e accede alla conoscenza di questi; così, colui che vede il verbo, attraverso cui egli agì, e il futuro, accede alla sapienza del padre creatore, poiché in quel verbo vede tutto ciò che è stato creato o può essere creato in modo complicato. Questa visione è la transizione alla sapienza, che è Dio. Lo stesso Dottore definisce quella visione anche nutrimento. Infatti l'intelletto si nutre nella visione dell'arte divina, che è il verbo. Ricava, infine, un esempio da come Dio creò il mondo, sebbene il modo divino sia senza modo. Come il matematico forma un concetto nuovo della quadratura del cerchio non a parteire dalla prima materia dell'essere, ma all'interno di se stesso, e poi lo rappresenta all'esterno, e, affinché possa rappresentarlo al meglio adatta gli strumenti e la tavola nella quale descriverà il concetto o il verbo nel modo in cui può cogliere la rappresentazione del suo verbo, e fa ciò per mostrare la gloria o la chiarezza del suo intelletto, la quale è tanto più lodata quanto più è compresa, allo stesso modo Dio ha creato tutto da sé stesso affinché sia manifesta la sua gloria, la quale è tanto più lodata quanto più la sua sapienza è colta o compresa. A Lui lode e gloria nei secoli dei secoli. Fine».

Quest'ultimo passaggio non ha un equivalente nella versione definitiva. Cusano sembra qui formulare qualche idea della sua filosofia della matematica: le dimostrazioni matematiche sarebbero esemplari per la conoscenza di tutte le cose; la visione intellettuale in matematica permetterebbe di spiegare la complicazione e sarebbe dunque una via d'accesso all'essere delle cose.

La proposizione aurea nelle matematiche del reverendo Padre Niccolò, cardinale di San Pietro

Versione originale latina a p. 155.

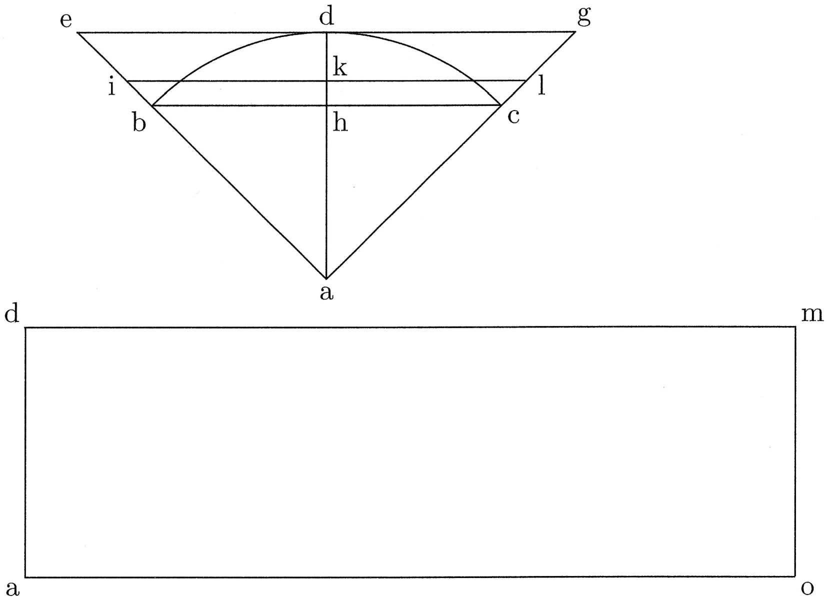


fig. 1

1. Tre linee tracciate da un centro che formano angoli uguali, semirette o minori, hanno lo stesso rapporto con la linea che le delimita, sia essa un arco o una corda[1] (cfr. figura 1).

Se da *a*, centro di *bdc*, sono tracciate linee di lunghezza indefinita, che formano intorno ad *a* due angoli uguali, semirette o minori, questi angoli sono delimitati o da un arco di un qualsiasi cerchio, per esempio *bdc*, o dalla sua corda *bhc*, o dalla tangente *edg*: le tre linee *ab, ad* e *ac* hanno con l'arco che le delimita lo stesso rapporto che le linee *ab, ah* e *ac* hanno con la corda *bhc* che le delimita o che le linee *ae, ad* e *ag* hanno con la tangente *edg*. E' la stessa cosa se si dicesse: se l'arco *bdc* è un quadrante e le tre linee *ab, ad* e *ac* i suoi semidiametri, allora *edg* è uguale al quadrante e *ae, ad* e *ag* sono uguali ai tre semidiametri del suo cerchio[2].

2. Questo perchè se l'arco *bdc* dovesse essere esteso in una retta compresa tra le due linee che passano da *a* per *b* e da *a* per *c*, e le cui estremità sono equidistanti dal centro *a*,

[1] Si tratta dell'ultimo trattato matematico conosciuto di Cusano, concluso a Roma l'8.8.1459, nel periodo in cui Cusano era incaricato dalla legazione romana. Esso contiene le stesse idee del *De mathematica perfectione*, ma introduce una formula matematica fondamentale. La denominazione "proposizione aurea" non rimanda in nessun modo al concetto di oro, ma a una proprietà preziosa e misteriosa della matematica, nella quale Cusano vede il simbolo della Trinità divina.

[2] L'ipotesi è dunque che $\frac{(ab+ad+ac)}{\text{arco } bdc} = \frac{(ab+ah+ac)}{\text{corda } bhc} = \frac{(ae+ad+ag)}{\text{tangente } edg}$. Sulla figura, *ad* è il raggio del cerchio, *dm* è la semicirconferenza, cioè 2 archi *bc* e *admo* è il rettangolo avente la stessa area del cerchio.

allora le estremità e il punto medio avrebbero necessariamente la stessa distanza dal centro *a* sia sulla retta sia sull'arco[3]. Se infatti le estremità avessero la stessa distanza [sulla retta e sull'arco], allora la distanza tra il punto medio e la retta dal centro *a* sarebbe minore della distanza tra il punto medio e l'arco e la retta sarebbe minore dell'arco come sulla corda *bhc*[4]. E se i punti medi avessero la stessa distanza [sulla retta e sull'arco], allora la distanza tra le estremità e le rette sarebbe maggiore [di quella tra le estremità e l'arco] come, per esempio, sulla tangente *edg*[5], e allora questa sarebbe maggiore dell'arco *bdc*. Bisogna quindi che il punto medio dell'arco, mentre questo si estende, si abbassi verso il centro e, allo stesso tempo, le estremità si alzino verso il centro come su *ikl*, dove il punto medio dell'arco in estensione si abbassa da *d* verso *k* e le estremità *b* e *c* si alzano verso *i* e *l*; l'innalzamento delle estremità è uguale all'abbassamento dei punti medi in modo che le estremità e il punto medio della retta abbiano la stessa distanza dal centro *a* di quella delle estremità e il punto medio dell'arco *bdc*[6]. Se non vi fosse questa equidistanza, allora la retta non sarebbe uguale a questo arco, ma all'arco corrispondente di un cerchio maggiore se la distanza dal centro fosse maggiore, o a uno minore se essa fosse minore[7].

3. E poiché più grande è il cerchio, più l'arco si avvicina alla retta, allora la mente vede che se si potesse tracciare un cerchio di grandezza infinita, allora sarebbe contemporaneamente arco e retta e la proposizione sarebbe vera[8]. E ancora, poiché l'angolo attorno al centro resta lo stesso, il rapporto tra ciò che delimita e ciò che è delimitato è lo stesso; ecco perché ciò che la mente vede come vero per il massimo, lo coglie anche in tutti gli altri casi[9]. La proposizione è, quindi, considerata la più vera in questi e altri innumerevoli casi.

4. La ragione per la quale la proposizione parla di due angoli semiretti che sommati formano un angolo retto o di due minori, e non di tutti gli angoli, è che, poiché dall'arco minimo e dalla minima porzione di cerchio fino al quadrante, il triangolo composto dai triangoli rettangoli e inscritto nella porzione di cerchio aumenta continuamente, esso [triangolo] diventa massimo nel quadrante e poi diminuisce[10]. Ecco perché la proposizione non può essere [parimenti] vera nel caso in cui l'arco, la porzione [di cerchio] e il triangolo aumentano [contemporaneamente] e nel caso in cui l'arco e la porzione [di cerchio] aumentano mentre il triangolo diminuisce.

5. È evidente che qualsiasi arco può essere facilmente rettificato (cfr. figura 2). Infatti se tre segmenti di una retta sono una parte aliquota di tre semidiametri, allora questa retta sarà una parte aliquota dell'arco[11]; la superficie delimitata dalla linea curva è pertanto maggiore della superficie delimitata dalla retta. Se togli, quindi, un terzo dei tre segmenti della retta e tracci il semidiametro descrivendo un arco, questo sarà uguale alla retta e in generale puoi trasformare un arco in una retta e una retta in un arco e l'arco di un cerchio

---

[3] Questo vuol dire che, nel corso della rettificazione di un arco, le estremità si allontanano dal centro mentre il suo centro vi si avvicina. La somma delle tre distanze resta, quindi, costante.

[4] $ah < ad$ il segmento $bhc <$ arco bdc.

[5] $ae > ab$, $ag > ac$ e il segmento $adg >$ arco bdc.

[6] $ai + ak + ah = ab + ad + ac$.

[7] Per estendere l'arco *bdc*, l'innalzamento delle estremità *bi* e *cl* deve essere compensato con l'abbassamento del centro dell'arco *dk*.

[8] Allusione alla *visio intellectualis*.

[9] Questa giustificazione del teorema con l'esempio del massimo non può essere ammesso in matematica, come anche l'esempio del minimo utilizzato nel *De mathematica perfectione*.

[10] Questo vuol dire che il triangolo rettangolo (per esempio *ACH*) di cui l'angolo al centro del cerchio comincia a sorpassare i 45°, diminuisce in superficie.

[11] Per esempio, se $(ab + ah + ac) = 3ad$, allora $ab + ah + ac$ è una parte aliquota del cerchio.

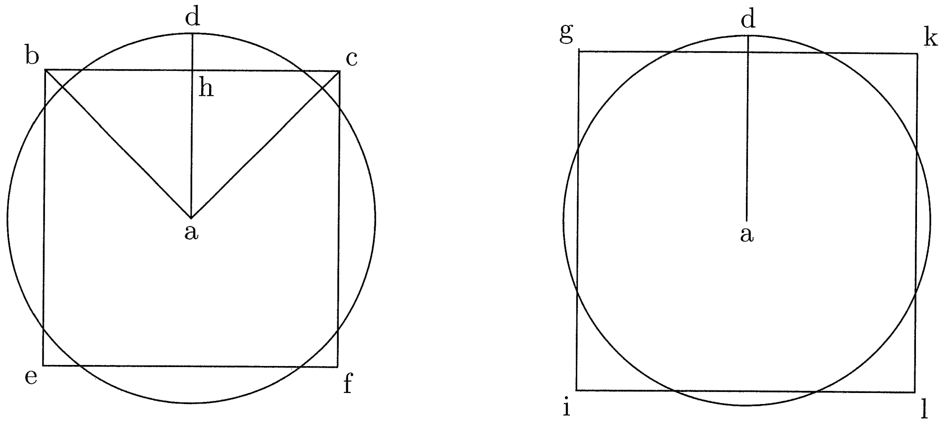


fig. 2

in arco di un altro cerchio[12].

6. È chiaro anche che si possono dare angoli che si rapportano tra loro come il lato e la diagonale di un quadrato e, in generale, si possono dare allo stesso modo linee, superfici e solidi. Hai anche moltissimi modi per rettificare il cerchio e trasformarlo in rettangolo e in quadrato. Questo vale per qualsiasi porzione di cerchio, che sia commensurabile o meno al cerchio[13]. Si scopre anche ciò che era sconosciuto sui seni e sulle corde. Tutto questo era finora sconosciuto nelle matematiche e tutto ciò che si saprà in questo campo, lo sarà grazie agli infiniti corollari non ancora trovati che derivano da questo.

7. Coloro che guardano più lontano vedono che l'uguaglianza del rapporto è il mezzo della trasformazione e del passaggio da contrario a contrario e che c'è qualcosa di divino nel fatto che tre linee tracciate da un punto siano delimitate o da un solo arco – e sono tutte uguali – o da una retta – e le estremità sono uguali e i punti medi variano fino all'incommensurabilità, come sono il lato e la diagonale di un quadrato. Il diverso modo in cui [le linee] sono delimitate rende diverse le superfici, così che una è delimitata da una curva, l'altra da una retta, mantenendo il rapporto delle linee di delimitazione uguale a quello delle linee che provengono da uno stesso punto in modo uguale. Questo non può essere vero né al di qua né al di là delle tre linee, considerate non come separate, ma come un'unica, semplice lunghezza[14]. Sarà compito della più alta speculazione occuparsi di questo principio unitrino e la derivazione delle cose da esso[15].

Finito a Roma l'8 Agosto 1459 al tempo della legazione nella città ecc.

---

[12] $\frac{(ab+ah+ac)}{3} = \frac{a}{d}$ e l'arco bdc = segmento bc.

[13] *bac* è un angolo retto, *ad* è un terzo della somma di *ab, ah* e *ac* ed è il raggio del cerchio di cui un quarto della circonferenza è uguale al segmento *bhc*. La somma dei quattro segmenti *bc, cf, be* e *ef* forma il perimetro del quadrato isoperimetrico al cerchio, cioè $bc + cf + be + ef = 4$ archi *bdc*; da ciò, tuttavia, non deriva che le superfici sono uguali, poiché la superficie del cerchio è maggiore di quella del quadrato. *gk* è e la media geometrica tra *ad* ed il doppio dell'arco dato *bc*, e anche il lato del quadrato la cui superficie è uguale a quella del cerchio, per cui il quadrato GIKL risulta uguale al cerchio, avente come raggio *ad*.

[14] Nel rapporto delle tre linee in questione Cusano vede l'espressione del mistero della Trinità. Cfr. Cusanus 1972a, I, 19, 55, 37ss. Cusanus 1972b, I, 35ss.

[15] Cfr. Cusanus 1988b, 33, 1; 39, 1ss.; 60, 11–17.

Appendice
‹Il maestro Paolo al cardinale Niccolò Cusano›

Versione originale latina a p. 159.

1. Le ampiezze[1] di tutti i poligoni isoperimetrici hanno tra loro e con il cerchio isoperimetrico lo stesso rapporto che esiste fra le prime linee[2] dell'uno e le prime linee dell'altro, e con il semidiametro isoperimetrico[3]. Ugualmente, gli eccessi delle ampiezze delle figure diverse dal triangolo rispetto all'ampiezza del triangolo hanno lo stesso rapporto di quello che gli eccessi delle prime linee di queste altre figure hanno rispetto alla prima linea del triangolo[4].

2. Per esempio: Sia *ab* la prima linea di un triangolo, sia *cd* la prima linea di un'altra figura intermedia, per esempio del quadrato, *ce* la prima linea del cerchio ossia il suo semidiametro, *ac* la semicirconferenza di tutte queste superfici, essendo esse isoperimetriche (cfr. figura 1). La superficie di *ae*[5] sarà l'ampiezza del cerchio, la superficie di *ad* sarà l'ampiezza di una figura intermedia come il quadrato, la superficie di *af* sarà l'ampiezza del triangolo. Dico per prima cosa che il rapporto tra la superficie di *ae* e la superficie di *ad* è uguale a quello tra la linea *ce* e la linea *cd* e che il rapporto fra la superficie di *ad* e la superficie di *af* è uguale a quello tra la linea *cd* e la linea *cf*, per la prima proposizione del libro VI di Euclide[6]. Le suddette figure hanno la stessa altezza e dunque sono proporzionali alle loro basi. Nello stesso modo si provano gli eccessi delle ampiezze, dato che il rapporto tra le superfici di *ge* e *bd* e le linee *ed* e *df* è lo stesso di quello tra le superfici di *be* e *bd* – che sono gli eccessi dell'ampiezza del cerchio e del quadrato sul triangolo – e le linee *fe* e *fd* – che sono gli eccessi delle prime linee del cerchio e del quadrato sulla prima

[1] Il termine «capacitas» è qui tradotto con ampiezza. Come negli altri scritti matematici, per rispettare al meglio lo spirito del linguaggio cusaniano, a differenza sia di J. E. Hofmann che traduce «capacitas» con «Fläche» (cfr. Hofmann e Hofmann 1980, 128) sia di J.-M. Nicolle che traduce il termine latino con «Surface» (cfr. Nicolle 1998, 49), si è preferito qui differenziare i due termini (*capacitas* e *superficies*), utilizzati entrambi da Cusano, rendendo il latino *capacitas* a volte con ampiezza, altre volte, a seconda del contesto, con estensione o superficie.

[2] La prima linea designa il semidiametro del cerchio inscritto al poligono in questione; la seconda linea designa il semidiametro del cerchio circoscritto al poligono.

[3] Sebbene sulla data di composizione di questa lettera non si abbiano notizione certe e documentate, è molto probabile che essa sia stata scritta nell'inverno, tra il 1453 e il 1454. I primi editori hanno creduto che si trattasse di un testo di Cusano, ma in realtà si tratta di una critica di Toscanelli alla proposizione fondamentale de *I complementi matematici*, ossia la proposizione 12, come emerge da due note a margine di *Cu* scritte dallo stesso Cusano. Essa deve essere letta fra il libro I e il libro II de *I complementi matematici*. Dall'ultima frase del testo si evince che il testo doveva essere dato a Peurbach, e da questi a Regiomontano. Nel 1533 fu pubblicato in *n* da Johannes Schöner.

[4] Dalla relazione $f_n = \frac{u}{2}\rho_n$ (cfr. Cusanus 2010i, 1) si deduce la proporzionalità tra f_n e ρ_n, e in particolare tra $f - f_n$ e $r - \rho_n$. Se si chiama n il numero dei lati del poligono, f la sua superficie, ρ il semidiametro del suo cerchio inscritto (la linea «prima»), r il semidiametro del suo cerchio circoscritto (la linea «seconda»), allora:
$\frac{f_3}{f_4} = \frac{f_n}{f} = \frac{\rho_3}{\rho_4} = \frac{\rho_n}{\rho}$. Da ciò si evince: $\frac{(f_{n-1} - f_n)}{(f_n - f)} = \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n - \rho}$.

[5] Per tradizione si designano le superfici rettangolari attraverso la loro diagonale. Così, nella figura, a*d* designa la superficie del rettangolo *AGDC*.

[6] Cfr. Euclide 2007, VI, 1: «I triangoli e i parallelogrammi che sono sotto la stessa altezza sono l'uno proporzionale all'altro come le loro basi».

linea del triangolo[7]. Queste cose sono chiare in base alla prima proposizione del libro VI di Euclide. Dunque, ciò che si è detto a proposito delle ampiezze dei corpi e degli eccessi delle loro ampiezze può essere detto delle prime linee e de loro eccessi.

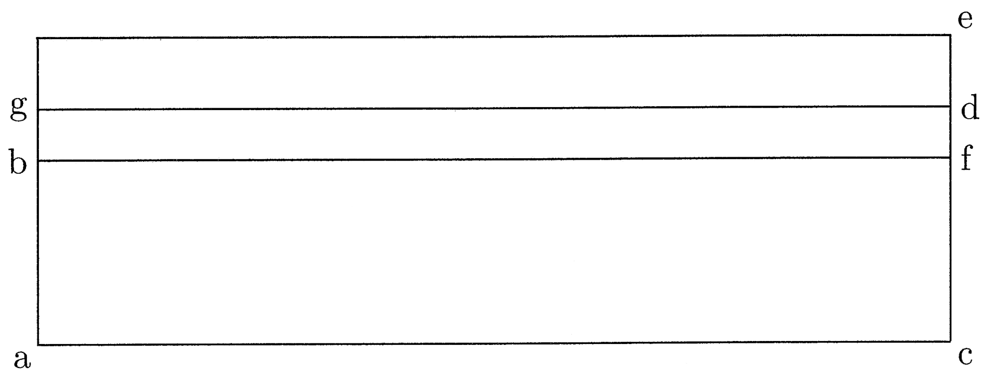


fig. 1

3. Se dalla seconda estremità della prima [linea] del cerchio alla seconda [linea] del triangolo si conduce una linea retta parallela alla base, il rapporto tra questa e l'eccesso della seconda sulla prima dello stesso triangolo che essa taglia è lo stesso di quello tra essa e l'eccesso delle seconde dalle prime di tutte le altre figure intermedie[8].

4. Sia tracciata su un'estremità della linea *ac* la perpendicolare *ab*, e sia questa la prima linea del cerchio, e sull'altra estremità di detta linea *ac* la perpendicolare *cd*, e sia questa la seconda linea del triangolo. Poiché la linea *ab* è minore della linea *cd*, se dal punto *b* si traccia la linea *be* parallela alla base *ac*, questa linea arriva alla linea *cd*, e divide l'eccesso della seconda sulla prima, che è *hd*, nello stesso rapporto che esiste tra *de* e *eh*. Dico che se si segnano la prima e la seconda di un'altra figura intermedia, per esempio con *gi* la prima e con *gf* la seconda, allora l'eccesso della seconda sulla prima, che è *fi*, è diviso nel punto *k* dalla linea *be*, nello stesso rapporto che esiste tra *fk* e *ki*, condotte dalle linee *db* e *hb*, così che il rapporto tra *fk* e *ki* sarà lo stesso di quella tra *de* e *eh*. Infatti, l'intero triangolo DHB è diviso dalla retta parallela alla base *fi*. Il rapporto tra *eb* e *kh* sarà dunque uguale a quello tra *dh* e *fi*, e il rapporto tra *de* e *kf* ed *eh* e *ki*, per la similitudine dei triangoli, sarà uguale al rapporto tra *eb* e *kb*. Dunque, *de* sta a *fk* come *eh* sta a *ki*, e permutando, *de* sta a *eh* come *fk* sta a *ki*[9]; dunque, questi eccessi sono divisi in maniera proporzionale, il che era ciò che bisognava dimostrare (cfr. figura 2).

5. Si può anche dire che, se *gf* è la seconda di una sola delle figure intermedie, allora *gi* non sarà la prima[10]. La prima di queste figure sarà o maggiore o minore di *gi*. Sia presa

---

[7] Toscanelli pone 4 proporzioni:
$\frac{\text{superficie } ae}{\text{superficie } ad} = \frac{\text{linea } ce}{\text{linea } cd}$;
$\frac{\text{superficie } ad}{\text{superficie } af} = \frac{\text{linea } cd}{\text{linea } cf}$;
$\frac{\text{superficie } ge}{\text{superficie } bd} = \frac{\text{linea } ed}{\text{linea } df}$; $\frac{\text{superficie } be}{\text{superficie } bd} = \frac{\text{linea } fe}{\text{linea } fd}$.

[8] $\frac{(r_3-\rho_3)}{(r_n-r_3)} = \frac{(r_n-\rho_n)}{(r_n-r_3)}$.

[9] Si tratta di dimostrare che: $\frac{fk}{ki} = \frac{de}{eh}$. Posto $\frac{eb}{kb} = \frac{dh}{fi}$ e $\frac{de}{kf} = \frac{eh}{ki} = \frac{eb}{kb}$, si ha: $\frac{de}{kf} = \frac{eh}{ki}$; permutando, si ottiene $\frac{de}{eh} = \frac{fk}{ki}$.

[10] Toscanelli inizia qui una dimostrazione indiretta per mostrare che *gi* è necessariamente la linea «prima», sempre continuando a presupporre la proporzionalità sostenuta da Cusano e rifacendosi a *I complementi*

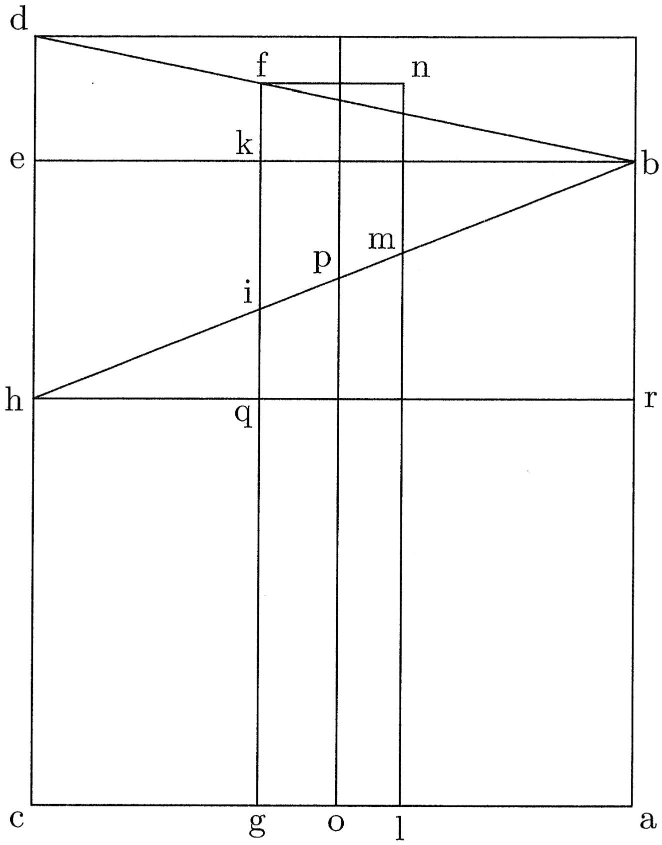


fig. 2

inizialmente maggiore e sia essa *lm*. La prolungo verso l'alto fino a *n*, in modo che *ln* sia uguale a *gf*, e traccio la linea *fn* parallelamente alla base, per il fatto che le due linee *gf* e *ln* hanno la stessa lunghezza. Fra i due punti, *g* e *l*, si possono tracciare molteplici linee prime e seconde di figure intermedie. Se ne tracci una, e sia *op* la prima, e la si prolunghi fino alla seconda della stessa figura: essa cadrà o sulla linea *fn*, o al di sotto o al di sopra di essa. Ma non potrà cadere né sotto né sulla linea, poiché essa è la seconda di una figura di superficie minore; e dunque dovrebbe essere più lunga; e tuttavia, non può essere posta più lunga [di *ln*], poiché gf [$= ln$], è posta fra figure di superficie minore, e sarebbe più corta, il che è impossibile, dato che le linee seconde non vanno diminuendo nella direzione delle figure di superficie crescente, e ciò è impossibile. Sarebbe parimenti impossibile se si dicesse che la prima di queste figure è minore di *gi*. Non potendo essere né maggiore né minore, *gi* sarà essa stessa la prima, poiché tutti gli eccessi delle seconde sulle prime sono divisi nello stessa rapporto, il che è ciò che bisognava dimostrare.

6. Questa sembra la spiegazione della vostra undicesima conclusione, da cui dipende tutta la dimostrazione della quadratura[11]. Infatti, *hq* si rapporta a *qi* come *hr* si rapporta a *rb*. Inoltre, di queste quattro linee in proporzione[12], le prime tre sono conosciute, la prima *hq* è nota, poiché è la differenza tra la freccia del quadrato – o di un'altra figura intermedia – e la freccia del triangolo; *qi*, la seconda, è anch'essa nota, poiché è l'eccesso

---

matematici. Cfr. Cusanus 2010i, 11.

[11] Cfr. Cusanus 2010i, 22.

[12] Considerando i due triangoli rettangoli BHR e IHQ, si ha: $\frac{hr}{hq} = \frac{rb}{qi}$, da cui si deduce $rb = \frac{(hr \times qi)}{hq}$.

della prima del quadrilatero[13] sulla prima del triangolo. La terza *hr* è anch'essa conosciuta, poiché è la freccia del triangolo. Se dunque moltiplichi *hr* per *qi*, e dividi per *hq*, ottieni *rb,* che, aggiunto alla prima linea del triangolo, *ra*, darà *ab*, la prima del cerchio, cioè il suo semidiametro cercato. Ma non vedo perché le due linee *hb* e *bd*, entro cui sono compresi tutti gli eccessi delle prime e delle seconde, non possano essere curve di ogni genere di curvatura, nel qual caso la dimostrazione non porterebbe ad alcuna conclusione[14]. Accadrà infatti ciò che hai detto nella decima conclusione, cioè che le prime linee delle superfici più estese saranno sempre maggiori e le seconde sempre minori[15].

7. Penso che quanto detto sia sufficiente. Molti altri punti mi danno da pensare, per esempio che quelle coincidenze, o accrescimento e diminuzione delle forme, non debbano essere rappresentate mediante linee rette, come dicono i moderni; ma è una questione che riservo a un altro momento[16]. Ti saluto.

8. Sia data al nostro venerabile e fedele caro maestro, l'astronomo George Peurbach[17].

[13] Del quadrilatero, se si prende come esempio di figura intermedia un quadrato.

[14] Toscanelli avanza qui la sua obiezione: le linee *db* e *hb* sono effettivamente linee rette? o meglio, saranno esse curve incurvate l'una verso l'altra? La proposizione sostenuta da Cusano è la stessa qualunque sia *n*, il numero dei lati del poligono isoperimetrico? Come mostra Hofmann e Hofmann 1980, nota 5, 234, se ad esempio poniamo il raggio isoperimetrico uguale a *r*, si ha $gi = \rho_n = r \times \frac{\phi}{tg\phi}$; $gf = r_n = r \times \frac{\phi}{\sin\phi}$; $\phi = \frac{\pi}{n}$. Attribuendo al punto *g* un'ascissa proporzionale a $f_n = \frac{u}{2}\rho_n = r^2\pi \times \frac{\phi}{tg\phi}$; è chiaro che *hb* è rappresentata da una retta, cosa che non accade con *db*. Ponendo ad esempio $\rho_n = \lambda x$; $r_n = y$ (dove per λ si intende un fattore di proporzionalità positivo costante) si ha $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\lambda} \times \frac{(\sin\phi - \phi\cos\phi)}{(\phi - \cos\phi\sin\phi)} < 0$. Qui $\phi = \frac{\pi}{3}$ corrisponde al valore iniziale ρ_3, e $\phi = 0$ corrisponde al valore finale *r*. Il rapporto $\frac{(\sin\phi - \phi\cos\phi)}{(\phi - \cos\phi\sin\phi)}$ oscilla nel campo $\frac{\pi}{3} \geq \phi \geq 0$ tra i valori 0, 558 e 0,500. Se ora determiniamo $\frac{dx}{d\phi} \times \frac{d^2y}{d\phi^2} - \frac{dy}{d\phi} \times \frac{d^2x}{d\phi^2} = (\frac{r}{\lambda^2\sin\phi})(\phi\frac{dx}{d\phi} + 2\sin\frac{dx}{d\phi})$ ci accorgiamo che la curva tra *b* e *d* è senza punti di flessione e devia dalla corda *db* soltanto un po' verso il basso. Il riferimento all'obiezione riportato nella nota a margine dei *Complementi matematici* scosse Cusano al punto che rinunciò alla proposizione e decise di scrivere il secondo libro.

[15] Cfr. Cusanus 2010i, 21.

[16] La teoria delle *intensiones et remissiones formarum* è ripresa da Oresme 1968. Cfr. Hofmann e Hofmann 1980, nota 6, 234.

[17] Da quest'ultima frase sembra che Toscanelli abbia fatto appello all'autorità di Peurbach per esaminare la questione.

Apparati

Bibliografia

AA.VV. (1964). *Cusano e Galileo*. Archivio di filosofia. Padova: Cedam.

——— (1970). *Nicolò Cusano agli inizi del mondo moderno: Atti del convegno internazionale in occasione del V centenario della morte di Nicolò Cusano, Bressanone, 6–10 settembre 1964*. Firenze: Sansoni.

Achtner, Wolfgang (2005). Infinity in Science and Religion: The Creative Role of Thinking about Infinity. *Neue Zeitschrift für systematische Theologie und Geschichtsphilosophie* (47):392–411.

——— (2011). Infinity as a Transformative Concept in Science and Technology. In: *Infinity: New Research Frontiers*. A cura di M. Heller e W. Hugh Woodin. Cambridge: Cambridge University Press, 19–51.

Albertson, David (2014). *Mathematical Theologies: Nicholas of Cusa and the Legacy of Thierry of Chartres*. Oxford: Oxford University Press.

Amodeo, Federico (1909). Riproduzione delle questioni sul trattato "De latitudinis formarum" di Nicola Oresme fatte da Biaglio Pelacani di Parma. *Annali di R. Istituto Tecnico G. B. Della Porta* (25): 111–137.

Aquinas, Thomas (1975–1976). *Documenta Catholica Omnia*. Rome: Ed di San Tommaso, 210 ss. Il testo è disponibile on line: http://www.documentacatholicaomnia.eu/03d/1225-1274,_Thomas_Aquinas,_Quaestiones_Disputatae._de_Veritate,_LT.pdf.

——— (1918, 1926, 1930). *Documenta Catholica Omnia*. Rome: Ed. di San Tommaso. *Summa contra gentiles. Editio Leonina vo. 13–15.* Il testo è disponibile on line: http://www.documentacatholicaomnia.eu/03d/1225-1274,_Thomas_Aquinas,_Summa_Contra_Gentiles,_LT.pdf.

Archimede (1974). *Opere*. A cura di A. Frajese. Torino: UTET.

Archimedes (1544). *Archimedis Syracusani (...) Opera, quae quidem extant, omnia, multis iam seculis desiderata (...)* Basileae: Ioannes Heruagius excudi fecit.

——— (1910a). *Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii, editio altera*. A cura di I. L. Heiberg. I. Leipzig: B. G. Teubner. *De sphaera et cylindro*, 1–229.

——— (1910b). *Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii, editio altera*. A cura di I. L. Heiberg. I. Leipzig: B. G. Teubner. *De mensura circuli*, 231–243.

Baldi, Bernardino (2007). *Le vite de' matematici*. A cura di E. Nenci. Milano: FrancoAngeli. 1a ed. 1998.

Beierwaltes, Werner (1980). *Identität und Differenz*. Tr. it. a cura di S. Saini, Milano 1989. Frankfurt am Main: Klostermann.

Belloni, Annalisa (1986). *Professori giuristi a Padova nel XV secolo. Profili bio-bibliografici e cattedre*. Frankfurt am Main: Klostermann.

Bialas, Volker (2003). Zur Cusanus-Rezeption im Werk von Joahnnes Kepler. In: *Nikolaus von Kues: Vordenker moderner Naturwissenschaft?* A cura di H. Schwaetzer e K. Reinhardt. Regensburg: Roeder, 45–53.

Bianca, Concetta (1983). La biblioteca romana di Niccoló Cusano. In: *Scrittura, biblioteche e stampe a Roma nel Quattrocento*. A cura di M. Miglio. Cittá del Vaticano: Scuola Vaticana di Paleografia, 669–708.

——— (1993). Niccolò Cusano e la sua biblioteca: note, «notabilia», glosse. In: *Bibliothecae selectae: da Cusano a Leopardi*. A cura di E. Canone. Firenze: Leo S. Olschki, 1–11.

——— (2002). Le cardinal de Cues en voyage avec ses livres. In: *Les humanistes et leur bibliotheques*. A cura di R. De Smet. Leuven-Paris: Peeters, 25–36.

Bischoff, Bernhard (1967). *Mittelalterliche Studien: Ausgewählte Aufsätze zur Schriftkunde und Literaturgeschichte*. Vol. 2. Stuttgart: Hiersemann.

Björnbo, Axel Anthon (1911–1912). Die mathematischen S. Marcohandschriften in Florenz, parte 3. *Biblotheca Mathematica* 3(12):97–132.

Blumenberg, Hans (1960). *Paradigmen zu einer Metaphorologie*. Tr. it. a cura di M. V. Serra Hansberg, Il Mulino, Bologna 1969. Bonn: Bouvier.

Bocken, Inigo (2005). Die Zahl als Grundlage der Bedeutung bei Nikolaus von Kues. *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* (29):201–220.

Boethius (1867). *De institutione arithmetica libri duo/De institutione musicae libri quinque accedit Geometria quae fertur Boëtii*. A cura di Gotfried Friedlein. Leipzig: B. G. Teubner.

Böhlandt, Marco (2002). *Wege ins Unendliche. Die Quadratur des Kreises bei Nikolaus von Kues*. Augsburg: Rauner.

——— (2005). Vollendung und Anfang. Zur Genese der Schrift De mathematica perfectione. *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* (29):3–40.

——— (2009). *Verborgene Zahl, verborgener Gott. Mathematik und Naturwissen im Denken des Nicolaus Cusanus (1401-1464)*. Stuttgart: Franz Steiner.

Bond, W.H. e C.U. Faye (1962). *Supplement to the Census of Medieval and Renaissance Manuscripts in the United States and Canada*. New York: Bibliographical Society of America.

Bradwardine, Thomas (1328). Tractatus de proportionibus velocitatum in motibus. In: *Thomas Bradwardine. His Tractatus on Properties, Its Significance in the Development of Mathematical Physics*. A cura di H. L. Crosby. Madison, University of Wisconsin Press, 64–140.

——— (1495a). *Arithmetica speculativa*. Paris: Guy Marchant.

——— (1495b). *Geometria speculativa*. A cura di Guidon. Paris: Guidon. Ed. Georg Molland, Stuttgart 1989. Il testo completo di Th. Bradwardine è scaricabile nel sito BEIC: http://atena.beic.it/view/action/singleViewer.do?dvs=1480269550341~694&locale=it_IT&VIEWER_URL=/view/action/singleViewer.do?&DELIVERY_RULE_ID=10&frameId=1&usePid1=true&usePid2=true..

Bredow, Gerda Von (1970). Die Bedeutung des Minimum in der Coincidentia oppositorum. In: *Niccolò Cusano agli inizi del mondo moderno*. A cura di G. Santinello. Firenze: Sansoni, 357–366.

——— (1977). Der Punkt als Symbol. *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* (12):103–115.

Breidert, Wolfang (1977). Mathematik und symbolische Erkenntnis bei Nikolaus von Kues. *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* (12):116–126.

Brient, Elisabeth (2006). How can the Infinite to Be the Measure of the Finite? Three Mathematical Metaphors from De docta ignorantia. In: *Cusanus: The Legacy of Learned Ignorance*. A cura di P. J. Casarella. Washington, DC: Catholic University of America Press, 210–225.

Brugmans, Hajo (1998). *Catalogus codicum manuscriptorum Universitatis Groninganae Bibliothecae*. Groningen: J. B. Wolters.

Bruno, Giordano (1985). *Dialoghi italiani,* III ed. A cura di G. Aquilecchia. Vol. I. Firenze: Sansoni.

Busard, H.L. (1980). Der Traktat De Isoperimetris, der unmittelbar aus dem Griechischen ins Lateinische übersetzt worden ist. *Medieval Studies* (42):61–88.

Buteus, Johannes (1559). *De quadratura circuli libri duo*. Lugduni: Guillaume Rouille.

Calcoen, Roger (1965). *Inventaire des manuscrits scientifiques de la Bibliothèque Royale de Belgique*. Vol. I. Bruxelles: Bibliothèque Royale.

Calma, Dragos e Ruedi Imbach (2009). Le notes marginales de Nicolas de Cues au traité Colliget principiorum d'Heymericus de Campo. In: *Heymericuc de Campo. Philosophie und Theologie im 15. Jahrhundert*. A cura di K. Reinhardt. Regensburg: Roderer, 15–51.

Cantor, Moritz (1894–1908). *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. 4 voll. Leipzig: B. G. Teubner.

——— (1965). *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*. Vol. II. Stuttgart: Teubner.

Cardano, Gerolamo (1663). Encomium geometriae (1535). In: *Opera omnia*. A cura di I. A. Huguetan e M. A. Ravaud. Vol. IV. Lyon, 440–445.

Carratelli, Giovanni Pugliese (1998). Bessarione, il Cusano e l'umanesimo meridionale. *La parola del passato* (53):201–225.

Cassirer, Ernst (1920). *Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit*. Vol. 3. Tr. it. di A. Pasquanelli, Einaudi, Milano 1968. Berlin: Darmstadt.

——— (1927). *Individuum und Kosmos in der Philosophie der Renaissance*. Tr. it. di F. Federici, La nuova Italia, Firenze 1935. Leipzig: B. G. Teubner.

Celeyrette, Jean (2011). Mathématiques et théologie : l'infini chez Nicolas de Cues. *Revue de métaphysique et de morale* 70(2):151–165. ISSN: 9782130587392. DOI: 10.3917/rmm.112.0151. URL: https://www.cairn.info/revue-de-metaphysique-et-de-morale-2011-2-page-151.htm.

Christianson, Gerald (2004). Cusanus, Cesarini and the Crisis of Conciliarism. In: *Conflict and Reconciliation Perspectives on Nicolas of Cusa*. A cura di Inigo Bocken. Leiden: Brill, 91–103.

Christianson, Gerald e Thomas M. Izbicki (1996). *Nicholas of Cusa on Christ and the Church*. Leiden, New York, Köln: Brill.

Clagett, Marshall (1964–1984a). *Archimedes in the Middle Age*. Vol. 5. University of Wisconsin Press. Vol. I. Madison 1964; vol. II–V: The American Philosophical Society, Philadelphia 1976–1984.

——— (1964–1984b). *The Science of Mechanics in the Middle Ages*. Tr. it. di L. Sosio, La scienza della meccanica nel Medioevo, Feltrinelli, Milano 1972. Madison, Wisconsin: The University of Wisconsin Press.

——— (1968). *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions. A Treatise on the Uniformity and Difformity of Intensities Known as "Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum"*. with an introduction, English translation and commentary. Madison, Milwaukee e London: University of Wisconsin Press.

Colomer, Eusebio (1961). *Nikolaus von Kues und Raimund Llull aus Handschriften der Kueser Bibliothek*. Berlin: De Gruyter.

——— (1964). Nikolaus von Kues und Heimeric van den Velde. *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* (4):198–213.

Counet, Jean-Michel (2000). *Mathématiques et dialectique chez Nicolas de Cues*. Paris: Vrin.

——— (2005). Mathematics and the Divine in Nicholas of Cusa. In: *Mathematics and the Divine: A Historical Study*. A cura di T. Koetsier e L. Bergmans. Amsterdam: Elsevier, 273–290.

——— (2014). L'art divin dans la Docte Ignorance et les Conjectures. In: *Manuductiones, Festschrift zu Ehren von Jorge M. Machetta und Claudia D'Amico*. A cura di C. Rusconi e K. Reinhardt. Münster: Aschendorff Verlag, 11–28.

Crapulli, Giovanni (1969). *Mathesis Universalis. Genesi di un'idea nel XVI secolo*. Roma: Edizioni dell'Ateneo.

Cuozzo, Gianluca (2002). *Mystice Videre. Esperienza religiosa e pensiero speculativo in Cusano*. Torino: Trauben.

Cürsgen, D. (2007). *Die Logik der Unendlichkeit: die Philosophie des Absoluten im Spätwerk des Nikolaus von Kues*. Frankfurt am Main: Peter Lang.

Cusanus (1959a). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita*. A cura di Raymond Klibansky e Hildebrand Bascour. VII. Hamburg: Felix Meiner. *De pace fidei. Epistula ad Ioannem de Segobia*.

——— (1959b). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita*. A cura di Paul Wilpert. Vol. IV. Hamburg: Felix Meiner. *De deo abscondito. De quaerendo deum. De filiatione dei. De dato patris luminum. Coniectura de ultimis diebus. De genesi*.

——— (1963). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita.* A cura di Gerhard Kallen. Vol. XIV. Hamburg: Felix Meiner. *De concordantia catholica,* libri tres.

——— (1964). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita*. A cura di Bruno Decker e Karl Bormann. Vol. XI/3. Hamburg: Felix Meiner. *Compendium*.

——— (1972a). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita*. A cura di Ernst Hoffmann e Raymond Klibansky. I. rist. Hamburg, Meiner 2014. Leipzig: Felix Meiner. *De docta ignorantia*.

——— (1972b). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita*. A cura di Joseph Koch e Karl Bormann. Vol. III. Hamburg: Felix Meiner. *De coniecturis*.

——— (1973). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita*. In: a cura di Renate Steiger. Vol. XI/2. Hamburg: Felix Meiner. *Trialogus de possest*.

——— (1982). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita*. A cura di Raymond Klibansky e Hans G. Senger. Vol. XII. Hamburg: Felix Meiner. *De venatione sapientiae. De apice theoriae*.

——— (1983a). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita*. A cura di Renate Steiger. Vol. V. Terza edizione. Hamburg: Felix Meiner. *Idiota de mente*.

——— (1983b). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita*. A cura di Renate Steiger. Vol. V. Terza edizione. Hamburg: Felix Meiner. *Idiota de sapientia*.

——— (1983c). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita*. A cura di Renate Steiger. Vol. V. Terza edizione. Hamburg: Felix Meiner. *Idiota de staticis experimentis*.

Cusanus (1988a). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita*. A cura di Hans G. Senger. Vol. IX. Hamburg: Felix Meiner. *Dialogus de ludo globi*.

——— (1988b). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita*. A cura di Hans G. Senge e Karl Bormann. Vol. XI/ 1. Hamburg: Felix Meiner. *De beryllo*.

——— (1988c). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita*. A cura di Karl Bormann e Heide D. Riemann. Vol. X/2b. Hamburg: Felix Meiner. *De Deo unitrino principio* [pars] b: *Tu quis es*.

——— (1994). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita*. A cura di Karl Bormann e Heide D. Riemann. Vol. X/2a. Hamburg: Felix Meiner. *De Deo unitrino principio* [pars] a: *De theologicis complementis*.

——— (2000). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita*. A cura di Heide D. Riemann. Vol. VI. Hamburg: Felix Meiner. *De visione dei*.

——— (2001). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita*. A cura di Hans G. Senger. Vol. X. Hamburg: Felix Meiner. *De aequalitate (vita erat lux hominum) et appendicem Responsio de intellectu evangelii Ioannis (quomodo ratio divina sit vita)*.

——— (2002). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita*. A cura di Raymond Klibansky. Vol. II. Seconda edizione. Hamburg: Felix Meiner. *Apologia doctae ignorantiae*.

——— (2007). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita*. A cura di Silvia Donati, Rudolf Haubst, Isabelle Mandrella, Heinrich Pauli, Harald Schwaetzer e Franz Bernhard Stammkötter. Vol. XVIII. Hamburg: Felix Meiner. *Sermones III* (1452–1455)*, Sermo CXXII–CCIII*.

——— (2010a). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita*. A cura di Menso Folkers. Vol. XX. Hamburg: Felix Meiner. *Scripta Mathematica*.

——— (2010b). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita. Scripta Mathematica*. A cura di Menso Folkers. Vol. XX. Hamburg: Felix Meiner. *De geometricis transmutationibus*.

——— (2010c). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita. Scripta Mathematica*. A cura di Menso Folkers. Vol. XX. Hamburg: Felix Meiner. *De circuli quadratura*.

——— (2010d). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita. Scripta Mathematica*. A cura di Menso Folkers. Vol. XX. Hamburg: Felix Meiner. *De mathematica perfectione*.

——— (2010e). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita. Scripta Mathematica*. A cura di Menso Folkers. Vol. XX. Hamburg: Felix Meiner. *De una recti curvique mensura*.

——— (2010f). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita. Scripta Mathematica*. A cura di Menso Folkers. Vol. XX. Hamburg: Felix Meiner. *Appendix: Magister Paulus ad Nicolaum Cusanum cardinalem*.

——— (2010g). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita. Scripta Mathematica*. A cura di Menso Folkers. Vol. XX. Hamburg: Felix Meiner. *Dialogus de circuli quadratura*.

——— (2010h). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita. Scripta Mathematica*. A cura di Menso Folkers. Vol. XX. Hamburg: Felix Meiner. *De mathematica perfectione (forma prior)*.

——— (2010i). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita. Scripta Mathematica*. A cura di Menso Folkers. Vol. XX. Hamburg: Felix Meiner. *De mathematicis complementis*.

——— (2010j). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita. Scripta Mathematica*. A cura di Menso Folkers. Vol. XX. Hamburg: Felix Meiner. *Quadratura circuli*.

——— (2010k). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita. Scripta Mathematica*. A cura di Menso Folkers. Vol. XX. Hamburg: Felix Meiner. *Aurea propositio in mathematicis*.

——— (2010l). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita. Scripta Mathematica*. A cura di Menso Folkers. Vol. XX. Hamburg: Felix Meiner. *De caesarea circuli quadratura*.

——— (2010m). *Nicolai de Cusa opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidata edita. Scripta Mathematica*. A cura di Menso Folkers. Vol. XX. Hamburg: Felix Meiner. *De arithmeticis complementis*.

Czeike, Felix (1952). *Verzeichnis der Handschriften des Dominikanerkonventes in Wien bis zum Ende des 16. Jahrhunderts*. Wien: Maschinenschriftlich.

D'Alessandro, Paolo e Pier Daniele Napolitani (2012). *Archimede Latino: Iacopo da San Cassiano e il corpus archimedeo alla metà del Quattrocento*. Paris: Les Belles Lettres.

D'Amico, Claudia (2005). Die Rolle der geometrischen Figur in der zusammensetzung der scientia aenigmatica. *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* (29):265–278.

Da Cremona, Iacopo (1984). *The Latin Translation of the Arabic Version of Euclide's Elements, commonly ascribed to Gerardo of Cremona*. A cura di H. L. L. Busard. Leiden: E. J. Brill.

Da Novara, Campanus (2005). *Campanus of Novara and Euclid's elements*. A cura di H. L. L. Busard. Stuttgart: Steiner.

Da Siena, Sisto (1566). *Bibliotheca sancta a F. Sixto Senensi, ordinis Praedicatorum, ex praecipuis catholicae ecclesiae autoribus collecta, & in octo libros digesta, apud Franciscum Franciscium Senensem*. Venezia: apud Ioan. Gryphius.

Daly, John F. e Charles J. Ermatinger (1964). Mathematics in the Codices Ottoboniani Latini. *Manuscripta* 8:3–17.

——— (1965). Mathematics in the Codices Ottoboniani Latini. *Manuscripta* 4:12–29.

De Bernart, Luciana (1999). *Cusano e i matematici*. Pisa: Scuola Normale Superiore di Pisa.

——— (2002a). Cusano e l'archimedismo del Medioevo. In: *Nicolaus Cusanus zwischen Deutschland und Italien. Ibridazioni teoriche, eredità contese, sperimentazioni e polemiche nella matematica europea del XVI secolo*. A cura di M. Thurner. Berlin: Akademie Verlag, 339–382.

——— (2002b). *Numerus quodammodum infinitum. Per un approccio storico-teorico al "dilemma matematico" nella filosofia di Giordano Bruno*. Roma: Edizioni di Storia e Letteratura.

De Campo, Heymericus (2001a). *Opera selecta*. A cura di Ruedi Imbach e Pascal Ladner. Freiburg: Universitätsverlag. *De sigillo aeternitatis*, 93–128.

——— (2001b). *Opera selecta*. A cura di Ruedi Imbach und Pascal Ladner. Freiburg: Universitätsverlag. *Ars demonstrativa*, 129–168.

De Felice, Federica (2015). La matematica nel pensiero di Cusano. Presuppposti filosofici e suggestioni. *Itinerari* (1):49–74.

——— (2019). The Infinite in Cusanus' Cosmological and Geometrical Perspectives. *Freiburger Zeitschrift für Philosophie und Theologie* 66:61–76.

De Gandillac, Maurice (1937). Nicolas de Cues précurseur de la Méthode cartésienne. In: *Travaux du IXème Congrès international de philosophie (Congrès Descartes)*. Vol. V. Paris: Hermann, 127–133.

De Muris, Iohannes (1998). *De arte mensurandi* (1344). A cura di H. L. L. Busard. Stuttgart: Frinz Steiner.

De Tinemue, Iohannes (1964). De curvis superficiebus. In: *Archimedes in the Middle Age*. A cura di M. Clagett. Vol. I. Philadelphia: Madison, 439–557.

Di Meglio, Guglielmo (2010). Il problema isoperimetrico classico. Storia e mito. *Matematicamente* (13): 15–21.

Di San Vincenzio, Gregorio (1647). *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni decem libris comprehensum*. Anvers: Joannes et Jacobus Meursii.

——— (1668). *Opus geometricum ad mesolabum per rationum, proportionalitatumque novas proprietates*. Gand: Balduinus Manilus.

Eckhart, Meister (1964). *Expositio Libri Genesis*. Tr. it. di Marco Vannini in Meister Eckhart, Commento alla Genesi, Marietti, Genova 1989. Stuttgart: Kohlhammer.

Eisenkopf, Anke (2005). Der Begriff des numerus bei Nikolaus von Kues. Eine metaphysische Größe? *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* (29):221–246.

——— (2007). *Zahln und Erkenntnis bei Nikolaus von Kues*. Regensburg: S. Roderer.

Esteve, Esteban Hernández e Matteo Martelli, cur. (2011). *Before and after Luca Pacioli, Atti del II Incontro internazionale, Sansepolcro-Perugia-Firenze (17–19 giugno 2011)*. Perugia: Selci-Lama.

Estrada, Paula Pico (2008). Weight and proportion in Nicholas of Cusa's Idiota de Staticis Experimentis. In: *Nicolaus Cusanus: ein bewundernswerter historischer Brennpunkt: philosophische Tradition und wissenschaftliche Rezeption*. A cura di Klaus Reinhardt, Harald Schwaetzer e Oleg E. Dushin. Akten des Cusanus-Kongresses vom 20. bis 22. September 2006 in St. Petersburg. Regensburg: Roderer, 135–146.

Ettlinger, Emil (1899). Studien über die Urprovenzien von Handschriften der Großerzoglichen Hof-und Landesbibliothek zu Karlsruhe. *Zentralblatt für Bibliothekswesen* (16):437–469.

Euclide (2007). *Tutte le opere*. A cura di F. Acerbi. Milano: Bompiani.

Euclides (1883–1888). *Elementa*. A cura di I. L. Heiberg. Vol. 5. Lipsiae: B. G. Teubner.

Euler, Walter A. (2014). *Handbuch Nikolaus von Kues. Leben und Werk*. A cura di M. Brösch, W.A. Euler, A. Geissler e V. Ranff. Darmstadt: Wissenschaftliche Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 31–103.

Faider, Paul (1808). *A Catalogue of the Harleian Manuscripts in the British Museum*. Vol. 3. London: British Museum.

——— (1876). *Catalogus codicum manu scriptorum bibliothecae regiae monacensis*. Vol. IV. Parte II. München: Monachii: Sumptibus Bibliotecae, prostat in Libreria Palmania.

——— (1879). *Catalogue général des manuscrits des Bibliothèques Publiques des départements*. Vol. V. Quarta serie. Paris: Champion.

——— (1889). *Catalogus codicum manu scriptorum qui in Bibliotheca Monasterii mellicensis O.S.B. servantur, Melk 1889*. Paris: Champion.

——— (1934). *Catalogue des manuscrits conservés à Namur, Gembloux*. Vol. I. Catalogue général des manuscrits des Bibliothèques de Belgique. Gembloux: Duculot.

Falckenberg, Richard (1880). *Grundzüge der Philosophie del Nicolaus Cusanus mit besonderer Berücksichtigung der Lehre vom Erkennen*. Breslau: Koebner.

Favaro, Antonio (1879). Intorno alla vita ed alle opere di Prosdocimo de'Beldomandi matematico padovano del secolo XV. *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche* (12):203–271.

Felix, Resch (2014). *Triunitas. Die Trinitätsspekulation des Nikolaus von Kues*. Münster: Aschendorff.

Flasch, Kurt (1973). *Die Metaphysik des Einen bei Nikolaus von Kues*. Leiden: Brill.

——— (2002). Cusano e gli intellettuali italiani del Quattrocento. In: *Le filosofie del Rinascimento*. A cura di Paolo Costantino Pissavino. Milano: Bruno Mondadori, 175–193.

——— (2004). *Nikolaus von Kues in seiner Zeit. Ein Essay*. Tr. it. di T. Cavallo, ETS, Pisa, 2005. Stuttgart: Reclam.

——— (2008). *Nikolaus von Kues. Geschichte einer Entwicklung Vorlesungen zur Einführung in seine Philosophie*. Frankfurt am Main: Klostermann. Tr. it. di T. Cavallo, Aragno, Istituto Nazionale di Studi sul Rinascimento, Torino 2010.

Folkerts, Menso (1970). *"Boethius" Geometrie II, ein matematisches Lehrbuch des Mittelalters*. Wiesbaden: Steiner.

——— (2003). Die Quellen und die Bedeutung der mathematischen Werke des Nikolaus von Kues. *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* (28):291–332.

——— (2012). Eine frühe Form von Nikolaus von Kues' Schrift De arithmeticis complementis. *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* (33):315–333.

Gabriel, Astrik L. (1968). *A summary Catalogue of microfilms of One Thousand Scientific Manuscripts in the Ambrosiana Library, Milan*. Notre Dame, Indiana: The Medieval Inst. Univ. of Notre Dame.

Gadamer, Hans Georg (1970). Nikolaus von Kues im modernen Denken. In: *Niccolò Cusano agli inizi del mondo moderno, vol. 12*. A cura di G. Santinello. Firenze: Sansoni, 39–48. Atti del congresso internazionale in occasione del V centenario della morte di Niccolò Cusano, Bressanone 6–10 settembre 1964.

Gamba, Enrico e Vico Montebelli (1988). *Le Scienze a Urbino nel tardo Rinascimento*. Urbino: QuattroVenti.

Gardies, J. L. (1988). *L'éritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide. Un essai de reconstitution*. Paris: Vrin.

Garin, Eugenio (1962). Cusano e i platonici italiani del Quattrocento. In: *Nicolò da Cusa. Relazioni tenute al convegno interuniversitario di Bressanone nel 1960*. A cura di G. Flores D'Arcais. Firenze: Sansoni, 75–100.

Gauss, Joachim (1984). Circulus mensurat omnia. In: *Mensura-Maß, Zahl und Zahlensymbolik im Mittelalter*. A cura di Albert Zimmermann. New York: De Gruyter, 435–455.

Gerbertus (1899). *Gerberti postea Silvestrii II Papae Opera mathematica*. In: a cura di N. Bubnov. Berlin: Friedländer & Sohn. *Geometria*, 46–97.

Gericke, Helmuth (1982). Zur Geschichte des isoperimetrischen Problems. *Matematische Semesterberichte* (29):160–187.

Gestrich, Helmut, cur. (1992). *Codex Cusanus 218. Faksimile-Ausgabe*. Koblenz: Görres Verlag.

Gheyn, Joseph Van Den (1975). *Catalogue des manuscrits de la Bibliothèque Royale Albert Ier*. Vol. 3. Bruxelles: Bibliothèque Royale Albert Ier.

Giusti, Enrico e Carlo Maccagni, cur. (1994). *Luca Pacioli e la matematica del Rinascimento. Atti del convegno internazionale di studi, Sansepolcro, 13–16 aprile 1994*. Milano: Giunti.

Giusti, Enrico e Matteo Martelli, cur. (2010). *Pacioli 500 anni dopo. Atti del Convegno, Sansepolcro, 22–23 maggio 2009*. Sansepolcro: Centro Studi Mario Pancrazi.

Glezer, Tag (2018). *Kant on reality, cause and force*. Cambridge: Cambridge University Press.

Gómez, M. Alvarez (1969). *Die verborgene Gegenwart der Unendlichen*. München-Salzburg: Anton Pustet.

Grant, Edward (2001). *Le origini medievali della scienza moderna*. Torino: Einaudi.

Grell, Heinrich (1965). Mathematischer Symbolismus und Unendlichkeitdenken bei Nikolaus von Kues. In: *Wissenschaftliche Konferenz des Plenums der Deutschen Akademie der wissenschaften zu Berlin anlässlich der 500. Wiederkehr seines Todesjahres, vol. I*. A cura di N. Khrypffs. Berlin: Akademie Verlag, 33–41.

Hallauer, Hermann J. (1986). Cusana in Handschriften der British Library. *Mitteilungen und Forschungsbeitäge der Cusanus-Gesellschaft* (17):45–47.

Haubst, Rudolf (1952a). *Das Bild des Einen und Dreinen Gottes in der Welt nach Nikolaus von Kues*. Trier: Paulinus.

——— (1952b). Zum Fortleben Alberts des Großen bei Heymerich von Kamp und Nikolaus von Kues. In: *Studia Albertina. Festschrift für Bernhard Geyer zum 70. Geburtstage*. A cura di H. Ostlender. Münster: Aschendorff, 420–447.

——— (1955). *Studien zu Nikolaus von Kues und Johannes Wenck aus Handschriften der Vatikanischen Bibliothek*. 38. Vol. I. Münster: Aschendorff.

——— (1980). Der junge Cusanus war im Jahre 1428 zu Handschriftenstudien in Paris. *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* (14):198–205.

Heath, Thomas L. (1921). *A History of Greek Mathematics*. Vol. II. Oxford: Clarendon Press.

——— (1926). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Vol. 2. Ia ed.: 1908. Cambridge: The University Press.

Heinz-Mohr, Gerd e Willehad Paul Eckert (1963). *Das Werk des Nicolaus Cusanus. Eine bibliophile Einführung*. A cura di Wienand Verlag. Köln: Wienand Verlag.

Herold, Norbert (1975). *Menschliche Perspektive und Wahrheit. Zur Deutung der Subjektivität in den philosophischen Schriften des Nikolaus von Kues*. Münster: Aschendorff.

Hirschberger, Johannes (1975). Das Prinzip der Inkommensurabilität bei Nikolaus von Kues. *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* (11):39–61.

Hoenen, Maarten J. F. M. (1995). Heymeric van de Velde und die Geschichte des Albertismus. In: *Albertus Magnus und der Albertismus*. A cura di J. F. M. Hoenen e Alain de Libera. Leiden: Brill, 303–331.

Hofmann, Joseph Ehrenfried (1942). Die Quellen der cusanischen Mathematik I: Ramon Lulls Kreisquadratur. *Cusanus-Studien* (7):22–37.

——— (1964). Nikolaus von Kues und die Mathematik. *Schweizer Rundschau* (63):398–403.

——— (1966). Mutmaßungen über das früheste mathematische Wissen des Nikolaus von Kues. *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* (5):98–136.

——— (1967). Über Regiomontans und Buteons Stellungnahme zu Kreisnäherungen des Nikolaus von Kues. *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* (6):124–154.

——— (1970). Sinn und Bedeutung der wichtigsten mathematischen Schriften des Nikolaus von Kues. In: *Niccolò Cusano agli inizi del mondo moderno*. A cura di G. Santinello. Firenze: Sansoni, 385–398.

Hofmann, Joseph Ehrenfried e Rudolf Haubst (1973). Über eine bisher unbekannte Vorform der Schrift De mathematica perfectione des Nikolaus von Kues. *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* (10):13–57.

Hofmann, Josepha e Joseph Ehrenfried Hofmann (1980). *Die mathematischen Schriften*. Hamburg: Felix Meiner Verlag.

Hopkins, Jasper (1996). *Nicholas of Cusa on Wisdom and Knowledge*. Minneapolis: Banning Press.

——— (2002). Nicholas of Cusa (1401–1464): First Modern Philosopher? *Midwest Studies in Philosophy* (XXVI):13–29.

Hopkins, John (1983). *Nicholas of Cusa's Metaphysic of Contraction*. Minneapolis: The Artur J. Banning Press.

Huygens, Christian (1656). *De Circuli Magnitudine Inventa*. Lugduni Batavorum: J & D Elzevier.

Imbach, Ruedi (1983). Das 'Centheologicon' des Heymericus de Campo und die darin enthaltenen Cusanus-Reminiszenzen: Hinweise und Materialien. *Traditio* (39):466–477.

——— (1995). Quelques remarques sur le Traité "De sigillo aeternitatis" de Heymeric de Campo. In: *Albertus Magnus und der Albertismus*. A cura di M. Hoenen e A. Libera. Leiden: Brill, 297–302.

Imbach, Ruedi (2011). Heymeric de Campo. In: *Encyclopédie des mystiques rhénans: d'Eckhart á Nicolas de Cues et leur réception. L'apogée de la théologie mystique de l'Église d'Occident*. A cura di M. A. Vannier. Paris: Le Cerf, 567–570.

Johannes, Kepler (1938). Mysterium Cosmographicum. In: *Gesammelte Werke*. A cura di Max Caspar. Vol. I. München: C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung.

Kästner, Abraham Gotthelf (1796–1800). *Geschichte der Mathematik*. Vol. 4. Göttingen: J. G. Rosenbusch.

Kirsch, Michael (2007). A Scientific Problem: Reclaiming the Soul of Gauss. *Dynamis* (4):4–22.

Klibansky, Raymond (1999). Zur Geschichte der Überlieferung der Docta ignorantia des Nikolaus von Kues. In: *Schriften des Nikolaus von Kues in deutscher Übersetzung, vol. 15c*. A cura di H. G. Senger. Hamburg: Felix Meiner, 209–240.

Klibansky, Raymund (1980). Nicolas de Cues, Charles de Bovelles et la cycloïde. In: *Correspondance du P. Marin Mersenne*. A cura di C. de Waard e A. Beaulieu. Vol. XIV. Paris: CNRS, 358–362.

Knobloch, Eberhard (2002). Unendlichkeit und Mathematik bei Nicolaus aus Kues. Grundideen und ihre Weiterentwicklung. In: *Chemie – Kultur – Geschichte. Festschrift für Hans-Werner Schütt anlässlich seines 65. Geburtstages*. A cura di A. Schürmann e B. Weiss. Berlin/Diepholz: Verlag für Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik, 223–234.

Koch, Joseph (1953). Die Ars coniecturalis des Nikolaus von Kues. *Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordheim-Westfalen* (16):7–48.

Koyré, Alexandre (1973). *Études d'histoire de la pensée scientifique*. 1a ed. PUF, Paris, 1966. Paris: Gallimard.

Kramer, Werner (1980). Kritisches Verzeichnis der Brüsseler Handschriften aus dem Besitz des Nicolaus von Kues. *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* (14):182–197.

Krchňák, Alois (1962). Die kanonistischen Aufzeichnungen des Nikolaus von Kues in Cod. Cus. 220 als Mitschrift einer Vorlesung seines Paduaner Lehrers Prosdocimus de Comitibus. *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* 2:67–84.

Kremer, Klaus (2004). Erkennen bei Nikolaus von Kues. Apriorismus–Assimilation–Abstraktion. In: *Praegustatio naturalis sapientiae. Gott suchen mit Nikolaus von Kues*. A cura di K. Kremer. Münster: Aschendorff, 1–49.

Kristeller, Paul Oscar (1963–1992). *Iter Italicum*. 6 voll. Leiden: Brill.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1849–1863). *Leibnizens mathematische Schriften*. A cura di C. I. Gerhardt. ristampa: Hildesheim, Georg Olms, 1961. Berlin-Halle: A. Asher & Comp.

Leinkauf, Thomas (2006). *Nicolaus Cusanus: Eine Einführung*. Buchreihe der Cusanus-Gesellschaft. Münster: Aschendorff.

Liebmann, Heinrich (1929). Über drei neugefundene mathematische Schriften des Nikolaus von Cues und ihre Bedeutung. *Forschungen und Fortschritte* (5).

Lohr, Charles H. (1983). Die Exzerptensammlung des Nikolaus von Kues aus den Werken Ramon Lulls. *Freiburger Zeitschrift für Philosophie und Theologie* XXX:373–384.

Lutz, Cora Elisabeth (1981). Essays on Manuscripts and Rare Books. *Scriptorium* XXXV(1):116–117.

Madan, Falconer e H. H. Craster (1905). *A Summary Catalogue of Western Manuscripts in the Bodleian Library at Oxford*. Vol. 1. Clarendon.

Magnus, Albertus (1972). *Opera omnia*. A cura di P. Simon. Vol. XXXVII. Münster: Aschendorff. *Super Dionysium de divinis nominibus*.

Mahnke, Dietrich (1937). *Unendliche Sphaere und Allmittelpunkt. Beiträge zur genealogie der Mathematischen Mystik*. Rist. Stuttgart, Friedrich Frommann, 1968. Halle: Niemeyer.

Manfredi, Antonio (1994). *I codici latini di Niccolò V. Edizione degli inventari e identificazione dei manoscritti*. Città del Vaticano: Biblioteca apostolica Vaticana.

Maracchia, Silvio, cur. (2017). *Matematica in Aristotele*. Vol. II. Roma: Ed. Nuova Cultura.

Marx, Jacob (1905). *Verzeichnis der Handschriften-Sammlung des Hospitals zu Cues bei Bernkastel a. Mosel*. Repr. Minerva, Frankfurt 1966. Trier: Hospital zu Cues.

Maurizi, Marco (2008). *La nostalgia del totalmente non altro: Cusano e la genesi della modernità*. Soveria Mannelli: Rubbettino.

Mazzuconi, Daniela (1980). Il «De cesarea circuli quadratura» e l'«Aurea propositio in mathematicis» di Niccolò Cusano. *Italia medioevale e umanistica* (23):49–76.

McDermott, Peter L. (1998). Nicholas of Cusa: Continuity and Conciliation at the Council of Basel. *Church History* 67(2):254–273.

Meerseeman, Gilles Gérard (1935). *Geschichte der Albertismus, II. Die erste kölner Kontroversen*. Roma: Dissertationes Historice, Istituto Storico domenicano.

Meuthen, Erich (1976). *Acta Cusana. Quellen zur Lebensgeschichte des Nikolaus von Kues*. Vol. I/ 1. Hamburg: Meiner.

——— (1989). Die deutsche Legationsreise des Nikolaus von Kues 1451/52. In: *Lebenslehren und Weltentwürfe im Übergang vom Mittelalter zur Neuzeit. Politik-Bildung-Naturkunde-Theologie. Bericht über Kolloquien der Kommission zur Erforschung der Kultur des Spätmittelalters 1983 bis 1987*. A cura di H. Boockmann et al. Göttingen: Göttingen Vandenhoeck u. Ruprecht, 421–499.

——— (1995). Das Itinerar der deutschen Legationreise des Nikolaus von Kues 1451–1452. In: *Papstgeschichte und Landesgeschichte*. A cura di J. Dahlhaus e E. Wolgast. Köln: Böhlau, 473–502.

Miller, Clyde Lee (1991). Nicholas of Cusa's On conjectures (De coniecturis). In: *Nicholas of Cusa in Search of God and Wisdom. Essays in Honor of Morimichi Watanabe*. A cura di G. Christianson e Th. Izbicki. Leiden: Brill, 119–140.

Mondolfo, Rodolfo (1967). *L'infinito nel pensiero dell'antichità classica*. Firenze: La Nuova Italia.

Moritz, Arne (2006). *Explicite Komplikationen. Der radikale Holismus des Nikolaus von Kues*. Vol. 14. Münster: Aschendorff.

Müller, Tom (2005). Möndchenquadratur und duale Mathematik bei Leon Alberti und Nikolaus von Kues. *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* (29):41–64.

——— (2010). *Perspectivität und Unendlichkeit*. Regensburg: S. Roderer.

——— (2014). Bedeutung und Rezeption der mathematisch-naturwissenschaftlichen Ansätze des Nikolaus von Kues. *Das Mittelalter* 19(1):86–102.

Murawski, Roman (2016). Between Theology and Mathematics. Nicholas of Cusa's Philosophy of Mathematics. *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric* (44):97–110.

Murdoch, John E. (1987). Thomas Bradwardine, Mathematics and Continuity in the Fourteenth Century. In: *Mathematics and Its Applications to Science and Natural Philosophy in the Middle Ages*. A cura di Edward Grant e John E. Murdoch. New York: Cambridge University Press, 103–137.

Nagel, Fritz (1984). *Nicolaus Cusanus und die Entstehung der exakten Wissenschaften*. Buchreihe der Cusanus-Gesellschaft, IX. Münster: Aschendorff.

——— (2007). *Nicolaus Cusanus – mathematicus theologus. Unendlichkeitsdenken und Infinitesimalmathematik*. Trier: Paulinus.

Nicolle, Jean-Marie (1998). *Mathématiques et métaphysique dans l'oeuvre de Nicolas de Cues*. Lille: Anrtheses.

——— (2002). Innovation in Mathematics and Proclusean Tradition in Cusanus Thought. In: *Nicholas of Cusa. A Medieval Thinker for the Modern Age*. A cura di Kazuhiko Yamaki. New York: Routledge, 85–88.

——— (2005). How to look at the Cusanus's geometrical figures? *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* (29):279–293.

——— (2007). *Les ecrits mathematiques*. Paris: H. Champion.

——— (2010). *L'homme à la proposition d'or*. Paris: Éditions Ipagine.

Oberrauch, Martha Maria (1993a). *Aspekte der Operationalität. Untersuchungen zur Struktur des Cusanischen Denkens*. Frankfurt am Main: R. G. Fischer.

——— (1993b). Mathematische "Konstruktion" und philosophische Darstellung im Denken des Nikolaus von Kues. In: *Verum est factum. Beiträge zur Geistesgeschichte und Philosophie der Rinaissance*. A cura di T. Albertini. Frankfurt am Main: Peter Lang, 373–382.

Omodeo, Pietro Daniel (2014). Keplero interprete di Cusano: la contingente geometria del cosmo. In: *Cusano e Leibniz. Prospettive filosofiche*. A cura di Antonio Dall'Igna e Damiano Roberi. Udine: Mimesis, 215–226.

Omont, Henri (1915). Nouvelles acquisitions du Départment des Manuscrits de la Bibliothèque Nationale pendant les années 1913–1914. *Bibliothèque de l'Ecole des Chartes* (76):5–96.

Orbetello, Luca (1965). *Cusano e Galileo*. Torino: Edizioni di Filosofia.

Oresme, Nicolas (1966). *De proportionibus proportionum and Ad pauca respicientes (1351–1360)*. Edited with Introductions, English Translations, and Critical Notes by Edward Grant. Milwaukee e London: University of Wisconsin Press.

——— (1968). Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum secundum doctorem et magistrum Nych. Orem ca. 1370. In: *Nicole Oresme and the medieval geometry of qualities and motions*. A cura di Marshall Clagett. London: Madison, 158–437.

Pacioli, Luca (1494). *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*. Venezia: P. de Paganini. Rist. anast. a cura dell'Istituto poligrafico e Zecca dello Stato, con introduzione di E. Giusti, Roma 1994.

——— (1509). *De Divina proportione*. Trad. it. G. Duchesne e M. Giraud, Librairie du Compagnonnage, 1988. Venezia: P. de Paganini.

Pasqua, Hervé (2013). La méthode des conjectures de Nicolas de Cues. *Noesis* (21):345–357.

Pasqua, Hervé (2015). La notion d' "Identique absolu" dans l'opuscule De Genesi (1447). In: *La cuestión del hombre en Nicolás de Cusa. Fuentes, originalidad y diálogo con la modernidad*. A cura di Claudia D'Amico e Jorge Mario Machetta. Buenos Aires: Biblos, 469–478.

Pedersen, Olaf (1953). The Development of Natural Philosophy 1250–1350. *Classica et mediaevalia* XIV: 86–155.

Peroli, Enrico (2017). *Niccolò Cusano. Opere filosofiche, teologiche e matematiche*. Milano: Bompiani.

Pindl-Büchel, Theodor (1990a). *Cusanus Texte, III. Marginalien 3. Ramundus Lullus. Die Exzerpte und Randnotizen der Nikolaus von Kues zu der Schriften des Raimundus Lullus. Extractum ex libris meditacionum Raymundi*. Heidelberg: C. Winter.

——— (1990b). The Relationship between the Epistemologies of Ramon Lull and Nicholas of Cusa. *The American Catholic Quarterly* (64):73–87.

——— (1992). *Die Exzerpte des Nikolaus von Kues aus dem Liber contemplationis Ramon Llulls*. Frankfurt am Main: Peter Lang.

Pisanus, Leonardus (1862). *Practica geometria*. In: *Scritti di Leonardo Pisano, vol. II*. A cura di B. Boncompagni. Roma: Tipografia delle scienze matematiche, 1–224.

Platzeck, Erhard Wolfram (1953). Lullsche Gedanken bei Nikolaus von Kues. *Trierer Theologische Zeitschrift* (62):357–364.

——— (1964). Von der Lullschen zur Cusanischen Denkform. *Mitteilungen und Forschungsbeitäge der Cusanus-Gesellschaft* (4):145–163.

Porter, T. I. (1933). A History of the Classical Isoperimetric Problem. In: *Contributions to the Calculus of Variations (1931–1932)*. A cura di G. A. Bliss e L. M. Graves. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Preisendanz, Karl (1973). *Die Handschriften des Klosters Ettenheim-Münster*. Karlsruhe 1932. Wiesbaden: Harrassowitz.

Proclus (1873). *In primum Euclidis elementorum librum commentarii*. A cura di Gottfried Friedlein. Leipzig: B. G. Teubner. Proclo, Commento al I libro di Euclide, tr. it. di M. Timpanaro Cardini, Giardini, Pisa 1978.

——— (2005). *Teologia platonica*. Trad. it. a cura di Michele Abbate. Milano: Bompiani.

Regiomontanus, Johannes (1533). *De triangulis omnimodis libris quinque*. In: *Scripta clarissimi mathematici M. Ioannis Regiomontani 1544*. A cura di Johannes Schoner. Norimbergae: I. Montanum & V. Neuber.

Reinhardt, Klaus (1986). Eine bisher unbekannte Handschrift mit Werken des Nikolaus von Kues in der Kapitelsbibliothek von Toledo. *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* (17):96–141.

——— (2005). Die Lullus-Handschriften in der Bibliothek des Nikolaus von Kues: Ein Forschungsbericht. In: *Ramon Llull und Nikolaus von Kues. Eine Begegnung im Zeichen der Toleranz*. A cura di E. Bidese; A. Fidora; P. Renner. Turnhout: Brepols, 1–23.

Rignani, Orsola (2005). Biagio Pelacani e il senso agente. In: *Corpo e anima, sensi interni e intelletto dai secoli XIII–XIV ai post-cartesiani e spinoziani*. A cura di Graziella Federici Vescovini, Valeria Sorge e Carlo Vinti. Atti del Convegno Internazionale (Firenze, Dipartimento di Scienze dell'Educazione e dei Processi Culturali e Formativi, 18–20 settembre 2003). Turnhout: Brepols, 247–266.

Ritter, Heinrich (1850). *Geschichte der christlichen Philosophie*. (12 Bde), Bd. 9, Teil 5. Hamburg: Friedrich Perthes.

Rivolta, Adolfo (1933). *Catalogo dei codici pinelliani dell'Ambrosiana*. Milano: Tip. Pontificia.

Rommevaux, Sabine (2003). L'irrationalité de la diagonale et du côtée d'un même carré dans les Questions de Biaise de Parme sur le Traité des rapports de Bradwardine. *Revue d'Histoire des Sciences* (56): 401–418.

Rose, Paul Lawrence (1975). *The Italian Renaissance of Mathematics. Studies on humanists and mathematicians from Petrarch to Galileo*. Genéve: Droz.

Roth, Ulli (1997). Die Bestimmung der Mathematik bei Cusanus und Leibniz. *Studia leibniziana* (29):63–80.

Rotzoll, Maike (2002). "Un certo vescovo da quelle parti…". Die Cusanus-Handschriften in der Bibliothek des Medici-Arztes Pierleone da Spoleto. In: *Nicolaus Cusanus zwischen Deutschland und Italien*. A cura di Martin Thurner. Beiträge eines deutch-italienischen Symposiums in der Villa Vigoni. Berlin: Akademie Verlag.

Rusconi, Cecilia (2008). Sinnliche Darstellung des Nicht-Darstellbaren bei Heymeric van de Velde und Nikolaus von Kues. In: *Nicolaus Cusanus: ein bewundernswerter historischer Brennpunkt: philosophische Tradition und wissenschaftliche Rezeption; Akten des Cusanus-Kongresses vom 20.*

bis 22. September 2006 in St. Petersburg. A cura di Klaus Reinhardt, Harald Schwaetzer e Oleg E. Dushin. Regensburg: Roderer, 59–70.

——— (2012). *El uso simbolico de las figuras matemáticas en la metafisica de Nicolás de Cusa*. Buenos Aires: Biblos.

Sambin, Paolo (1979). Nicolò da Cusa, studente a Padova e abitante nella casa di Prosdocimo Conti suo maestro. *Quaderni per la storia dell'Università di Padova* (12):141–145.

Santinello, Giovanni (1971). *Introduzione a Niccolò Cusano*. Bari: Laterza.

——— (1983). Prosdocino de' Baldomandi. In: *Scienza e filosofia all'Università di Padova nel Quattrocento*. A cura di Antonio Poppi. Padova: LINT, 71–84.

Schedel, Hartmann (1493). *Liber chronicarum*. Norimberga: Anton Koberger.

Schnarr, Herman (2002). Frühe Beziehungen des Nikolaus von Kues zu italienischen Humanisten. In: *Nicolaus Cusanus zwischen Deutschland und Italien*. A cura di M. Thurner. Berlin: Akademie Verlag, 187–213.

Schulze, Werner (1978). *Zahl, Proportion, Analogie. Eine Untersuchung zur Metaphysik und Wissenschaftshaltung des Nikolaus von Kues*. Vol. 7. Buchreihe der Cusanus-Gesellschaft, Cusanus-Gesellschaft (9). Münster: Aschendorff.

Schwaetzer, Harald (2005). Viva imago Dei. Überlegungen zum Ursprung eines anthropologischen Grundprinzips bei Nicolaus Cusanus. In: *Spiegel und Porträt. Zur Bedeutung zweier zentraler Bilder im Denken des Nicolaus Cusanus*. A cura di I. Bocken. Maastricht: Shaker, 113–132.

Senger, Hans Georg (1972). *Zur Überlieferung der Werke des Nikolaus von Kues im Mittelalter. Mitteilungenund Untersuchungen über neue Cusanus-Handschriften*. Cusanus-Studien. Heidelberg: Winter.

Serina, Richard J. (2016). *Nicholas of Cusa's Brixen Sermons and Late Medieval Church Reform*. Leiden: Brill.

Settignani, M. G. (1922). L'elemento matematico applicato allo studio dell'infinito nel *De docta ignorantia* di Nicolò Cusano. *Rivista di filosofia neo-scolastica* (14):219–235.

Sfez, Jocelyne (2005). L'hypothétique influence de Nicolas de Cues sur Georg Cantor dans la question d'infinité mathématique. *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* (29): 127–158.

Silverstein, Theodore (1957). *Medieval Latin Scientific Writings in the Barberini Collection. A Provisional Catalogue*. Chicago: University of Chicago Press.

Simon, Max (1912). *Cusanus als Mathematiker*. In: *Heinrich Webers Festschrift*. Leipzig-Berlin: Teubner, 298–337.

Stadler, Michael (1983a). *Rekonstruktion einer Philosophie der Ungegenständlichkeit. Zur Struktur des Cusanischen Denkens*. Die Geistesgeschichte und ihre Methoden. Quellen und Forschungen, Bd. 11. München: Fink Verlag.

——— (1983b). Zum Begriff der mensuratio bei Cusanus. Ein Beitrag zur Ortung der cusanischen Erkenntnislehre. In: *Mensura. Mass. Zahl. Zahlensymbolik im Mittelalter*. A cura di Albert Zimmermann. Berlin-New York: De Gruyer, 118–131.

Stallmach, Josef (1967). Die Cusanische Erkenntnisauffassung zwischen Realismus und Idealismus. *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* (6):50–54.

——— (1989). *Ineinsfall der Gegensätze und Weisheit des Nichtwissens. Grundzüge der Philosophie des Nikolaus von Kues*. Buchreihe der Cusanus-Gesellschaft. Münster: Aschendorff.

Steensma, Regnerus (1970). *Het klooster Thaborbij Sneek en zijn nagelaten geschriften*. Leeuwarden: De Tille.

Stifel, Michael (1544). *Arithmetica integra, appendix libri secundi, de quadratura circuli*. Nuremberg: Jean Pétri.

Stinger, Charles L. (1977). *Humanism and the Church of Fathers. Ambrogio Traversari (1386–1439) and Christian Antiquity in the Italian Renaissance*. Albany: State University of New York Press.

Stork, Hans-Walter (2010). Bibliothek und Bücher des Nikolaus von Kues im St. Nikolaus-Hospital zu Bernkastel-Kues. In: *Sammler und Bibliotheken im Wandel der Zeiten*. A cura di Sünje Prühlen, Hans-Walter Stork e Sabine Graef. Kongress in Hamburg am 20. und 21. Mai 2010. Frankfurt am Main: Klostermann, 67–95.

Stuloff, Nikolaus (1964). Mathematische Tradition in Byzanz und ihr Fortleben bei Nikolaus von Kues. *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* (4):420–436.

——— (1967). Die Herkunft der Elemente der Mathematik bei Nikolaus von Kues im Lichte der neuzeitlichen Wissenschaft. *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* (6):55–64.

Sullivan, Donald (1974). Nicholas of Cusa as Reformer. The Papal Legation to the Germanies 1451–1452. *Medieval Studies* 36:382–428.

Taton, René (1957–1958). *Histoire générale des sciences*. Vol. 2. Paris: P.U.F.

Uebinger, Johann (1895). Die mathematischen Schriften des Nikolaus Cusanus. *Philosophisches Jahrbuch der Görres-Gesellschaft* (8):311–307, 403–422.

——— (1896). Die mathematischen Schriften des Nikolaus Cusanus. *Philosophisches Jahrbuch der Görres-Gesellschaft* (9):54–56, 391–410.

——— (1897). Die Mathematisches Schriften des Nikolaus Cusanus. *Philosophisches Jahrbuch der Görres-Gesellschaft* (10):144–159.

Ulivi, Elisabetta (2010). Nuovi documenti su Luca Pacioli. In: *Pacioli 500 anni dopo. Atti del Convegno, Sansepolcro, 22–23 maggio 2009*. Sansepolcro: Centro Studi Mario Pancrazi, 19–58.

Uzielli, Gustavo (1894). *La vita e i tempi di Paolo Dal Pozzo: ricerche e studi, con un capitolo sui lavori astronomici del Toscanelli di Giovanni Celoria*. Roma: Tip. di Forzani e C.

Vaiati, Luisa Muraro (1970). Congettura e precisione matematica in Niccolò Cusano. *Rivista di filosofia neo-scolastica* (62):163–172.

Van de Vyver, Emil (1962). Annotations de Nicolas de Cues dans plusieurs manuscrits de la Bibliothèque Royale de Bruxelles. In: *Nicolò da Cusa, Relazioni tenute al convegno interuniversitario di Bressanone nel 1960*. A cura di AA.VV. Firenze: Sansoni, 47–61.

——— (1964). Die Brüsseler Handschriften aus dem Besitz des Nikolaus von Kues. *Mitteilungen und Forschungsbeitäge der Cusanus-Gesellschaft* (4):323–335.

Van Velthoven, Theo (1977). *Gottesschau und menschliche Kreativität: Studien zur Erkenntnislehre des Nikolaus von Kues*. Leiden: Brill.

Vansteenberghe, Edmond (1920). *Le cardinal Nicolas de Cues (1401–1464)*. Paris: H. Champion.

——— (1928). Quelques lectures de jeunesse de Nicolas de Cues d'après un manuscrit inconnu de sa bibliothèque. *Archives d'Histoire Doctrinale et Littéraire du Moyen Âge* (3):275–284.

Vasoli, Cesare (1968). Profilo di un papa umanista: Tommaso Parentucelli. In: *Studi sulla cultura del Rinascimento*. Manduria: Lacaita, 69–121.

Vengeon, Frédéric (2006). Mathématiques, création et humanisme chez Nicolas de Cues. *Revue d'historie des sciences* (59):219–243.

Vescovini, Graziella Federici (1972). Il Complemento teologico rappresentato nei Complementi matematici. In: *Nicolò Cusano, Opere filosofiche*. Torino: UTET, 609–639.

——— (1983). L'importanza della matematica tra Aristotelismo e scienza moderna alla fine del secolo XIV a Padova. In: *Aristotelismo veneto e scienza moderna (Padova, 25–28 settembre 1981)*. A cura di L. Olivieri. Padova: Ed. Antenore, 661–684.

——— (1997). Cusano e la matematica. In: *Filosofia e storia della cultura. Studi in onore di Fulvio Tessitore*. A cura di G. Cacciatore, M. Martirano e E. Massimilla. Vols. 1–2. Napoli: Morano, 393–410.

——— (1998a). *Il pensiero di Nicola Cusano*. Milano: UTET.

——— (1998b). L'architettonica della mente di Cusano e la matematica. In: *Le origini della modernità*. A cura di Walter Tega. Firenze: Olshki, 31–48.

——— (2002). Cusanus und Wissenschaftliche Studium zu Beginn des XV. Jahrhundert. In: *Cusanus zwischen Deutschland und Italien*. A cura di Martin Thurner. Akten der Kongresses Grabmann Institut München Universität, Como, Villa Vigoni, 28 März -2 April 2001. Berlin: Akademie Verlag, 93–113.

——— (2005a). Cusano e lo Studio scientifico di Padova agli inizi del secolo XV. In: *Filosofia e Sceinze. Studi in onore di Girolamo Cotroneo*. A cura di Giuseppe Cantillo. Mannelli: Rubbettino, 223–240.

——— (2005b). La trasformazione dei correlativi di Lullo nella coincidenza degli opposti di Cusano. In: *Ramon Llull und Nikolaus von Kues: eine Begegnung im Zeichen der Toleranz*. A cura di Ermenegildo Bidese et al. Turnhout: Brepols, 139–154.

——— (2016). *Nicolas de Cues*. Paris: Vrin.

Vogel, Kurt (1954). *Die Practica des Algorismus Ratisbonensis*. München: Beck.

Volkmann-Schluck, Karl-Heinz (1984). *Nicolaus Cusanus: die Philosophie im Übergang vom Mittelalter zur Neuzeit*. Tr. it. di Umberto Prosch, Morcelliana, Brescia 1993. Frankfurt am Main: Klostermann.

Wackerzapp, Herbert (1962). *Der Einfluss Meister Eckarts auf die ersten philosophischen Schriften des Nikolaus von Kues (1440–1450)*. Münster: Aschendorff.

Watanabe, Morimichi (2011). *Nicholas of Cusa. A Companion to his Life and his Times*. A cura di Gerald Christianson e Thomas M. Izbicki. Farnham: Routledge.

Weissenborn, Hermann (1882). *Die Übersetzungen des Euklid durch Campano und Zamberti*. Halle: H. W. Schmidt.

Wenck, Johannes (1910). De ignota litteratura. In: *Le "De ignota Litteratura" de Jean Wenck de Herrenberg contre Nicolas de Cuse. Texte inédit et étude*. A cura di Edmond Vansteenberghe. Münster: Aschendorff.

Werland, Bärbel (1986). Meine Einblicke in das mathematische Denken des Nikolaus von Kues, insbesondere das mathematisch Unendliche. Versuch eines Bezugs sur Schulmathematik. In: *Zugänge zu Nikolaus von Kues*. A cura di H. Gestrich. Bernkastel-Kues: Cusanus Gesellschaft, 103–109.

Wertz, William F. (2001). Nicolaus of Cusa's "On the Quadrature of the Circle". *Fidelio* X(2):30–40.

Wunderle, Elisabeth (1995). *Katalog der lateinischen Handschriften der Bayerischen Staatsbibliothek München. Die Handschriften aus St. Emmeram in Regensburg*. I. Wiesbaden: Harrassowitz.

Yamaki, Kazuhiko (2005). Die Bedeutung geometrischer Symbole für das Denken des Nicolaus Cusanus. Eine Untersuchung am Beispiel der Metamorphose seiner Auffassung vom Kreis. *Mitteilungen und Forschungsbeiträge der Cusanus-Gesellschaft* (29):295–312.

Indice dei nomi